BULLETIN DE LA S. M. F.

J. DENEF
F. LOESER

Détermination géométrique des sommes de Selberg-Evans

Bulletin de la S. M. F., tome 122, nº 4 (1994), p. 533-551.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1994__122_4_533_0>

Bull. Soc. math. France,
122, 1994, p. 533–551.

DÉTERMINATION GÉOMÉTRIQUE DES SOMMES DE SELBERG-EVANS

PAR

J. DENEF et F. LOESER (*)

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous calculons le déterminant du Frobenius agissant sur la partie invariante de la cohomologie d'un faisceau de Kummer défini sur le complémentaire d'un arrangement d'hyperplans invariant sous l'action du groupe symétrique dans des situations du type Selberg-Evans. On obtient en particulier une preuve cohomologique d'une conjecture d'Evans pour des caractères génériques.

ABSTRACT. — In this paper we compute the determinant of the Frobenius acting on the invariant part of the cohomology of a Kummer sheaf defined on the complement of an hyperplane arrangement invariant under the action of the symmetric group in Selberg-Evans type situations. We obtain as a special case a cohomological proof of a conjecture of Evans for generic characters.

Introduction

Dans cet article, nous calculons le déterminant du Frobenius agissant sur la partie invariante de la cohomologie d'un faisceau de Kummer défini sur le complémentaire d'un arrangement d'hyperplans invariant sous l'action du groupe symétrique dans des situations du type Selberg-Evans. Ce travail peut être vu comme une suite à [L]. Notre approche, basée sur les travaux de LAUMON [La2], est géométrique et on obtient en particulier une preuve cohomologique d'une conjecture d'Evans (démontrée par ANDERSON [A]) pour des caractères génériques.

Le plan est le suivant. Dans la première section, on énonce le résultat principal de l'article. Dans la section suivante, on rappelle les notations

(*) Texte reçu le 18 mai 1993, révisé en septembre 1993.
J. DENEF, University of Leuven, Department of Mathematics Celestijnenlaan 200 B, B-3001 Leuven.
F. LOESER, Université Paris VI et Centre de Mathématiques, École Polytechnique, F-91128 Palaiseau.
Classification AMS : 14 G, 11 T.

et résultats concernant monodromie et déterminants qui nous seront utiles. La section 3 est consacrée à des calculs généraux de monodromie avec action d'un groupe fini. La section 4 contient le résultat technique essentiel : le calcul explicite de la monodromie sur la partie invariante sous l'action du groupe symétrique des cycles évanescents dans la situation géométrique qui nous concerne. Tout est alors en place pour, dans la dernière section, démontrer le résultat principal par récurrence.

Ce travail — rédigé en mai 1991 — a été inspiré par la note [V] de A. VARCHENKO où est donnée dans le cas complexe une formule analogue à (1.3.2). Dans un travail en préparation, nous étudions des sommes de caractères associées aux groupes de Coxeter finis.

0. Conventions et notations

0.1. — Dans cet article, k est le corps $\mathbb{F}_q$ à q éléments, $q = p^e$ avec p premier, et ℓ est un nombre premier distinct de p. On note Frob_q le Frobenius géométrique de k. On note $\mathbb{G}_{m,k} = \operatorname{Spec} k[x, x^{-1}]$ et $\mathbb{A}_k^n = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n]$. Si K est un corps, $\overline{K}$ désignera une clôture algébrique de K. Si X est un schéma défini sur K, on notera $X \otimes \overline{K}$ le schéma obtenu par extension des scalaires.

0.2. — Si $\chi : k^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ est un caractère multiplicatif, on note $\mathcal{L}_\chi$ le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau de Kummer associé à χ. C'est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 sur $\mathbb{G}_{m,k}$. On fixe un caractère additif non trivial $\psi : k \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$, et on note $g(\chi, \psi)$ la somme de Gauss

$$g(\chi, \psi) = -\sum_{x \in k^\times} \chi(x)\psi(x).$$

On pose $g_\infty(\chi, \psi) = \begin{cases} g(\chi, \psi) & \text{si } \chi \neq 1, \\ q & \text{si } \chi = 1. \end{cases}$

0.3. — Dans tout le reste de l'article, on suppose $p > 2$ et on note ϕ le caractère multiplicatif d'ordre 2, $\phi : k^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$.

0.4. — Si V est un espace vectoriel de dimension finie d, on note $\Lambda^{\max} V = \Lambda^d V$ et $(\Lambda^{\max} V)^{-1}$ l'espace dual. Si $K^\bullet$ est un espace gradué de dimension finie, on note $\det(K^\bullet)$ l'espace vectoriel $\bigotimes_i (\Lambda^{\max} K^i)^{(-1)^i}$. Si F est un endomorphisme de l'espace vectoriel gradué $K^\bullet$, F induit sur $\det(K^\bullet)$ la multiplication par un scalaire que l'on note $\det(F, K^\bullet)$.

0.5. — Soit $\mathcal{L}$ un objet de la catégorie dérivée $D_c^b(\mathbb{G}_{m,k}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (cf. [La2, (0.5)]). On note $\mathcal{H}^i(\mathcal{L})$ les faisceaux de cohomologie de $\mathcal{L}$, $U(\mathcal{L})$ l'ouvert de lissité commun des $\mathcal{H}^i(\mathcal{L})$ et $S(\mathcal{L}) = \{s_1, \dots, s_r\} = \mathbb{G}_{m,k} - U(\mathcal{L})$ le fermé complémentaire. Si $s \in S(\mathcal{L})$ on note $a_s(\mathcal{L})$ la chute totale du rang de $\mathcal{L}$ (cf. [La2, (2.2.1)]).

1. Énoncé du résultat

1.1. — Soient n un entier positif ou nul, N un entier positif et $t_1, \dots, t_N \in k$ vérifiant $t_i \neq t_j$ pour $i \neq j$. Pour $1 \leq i \leq N$, on définit $\ell_i : \mathbb{A}_k^n \to \mathbb{A}_k^1$ par :

$$\ell_i = \prod_{j=1}^{n} (x_j - t_i).$$

On définit $\Delta : \mathbb{A}_k^n \to \mathbb{A}_k^1$ par :

$$\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2.$$

On pose $U = \mathbb{A}_k^n - \big(\bigcup_{1 \leq i \leq N} \ell_i^{-1}(0) \cup \Delta^{-1}(0)\big)$.

1.2. — Étant donné $\underline{\chi} = (\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_N)$ avec $\chi_i : k^\times \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ des caractères multiplicatifs, on note $\mathcal{L}_{\underline{\chi}}$ le faisceau sur U défini par :

$$\mathcal{L}_{\underline{\chi}} = \Big(\bigotimes_{1 \leq i \leq N} \ell_i^* \mathcal{L}_{\chi_i | U} \Big) \otimes \Delta^* \mathcal{L}_{\chi_0 | U} .$$

Soit $E := \{(r,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid r + s \geq 1, \ s \geq 1\}$. On note $\alpha_{r,s} : E \to \mathbb{Z}$ l'unique fonction telle que $\alpha_{r,1} = 0$ si $r \geq 0$, $\alpha_{0,s} = 1$ si $s \geq 2$ et telle que $\alpha_{r-1,s} + \alpha_{r,s-1} = \alpha_{r,s}$ si $(r-1, s)$ et $(r, s-1)$ appartiennent à E. On a alors $\alpha_{r,s} = \binom{r+s-2}{r}$ si $r \geq 0$ et $s \geq 2$. On note S_n le groupe symétrique. Comme l'action de S_n sur U par permutation des coordonnées x_i laisse $\mathcal{L}_{\underline{\chi}}$ invariant, S_n agit naturellement sur la cohomologie $H_c^*(U \otimes \bar{k}, \mathcal{L}_{\underline{\chi}})$. On démontre en 5.1.1 que $\sum_j (-1)^j \dim H_c^j(U \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell)^{S_n} = (-1)^n \alpha_{n,N}$. On note :

$$C(n, N, \underline{\chi}) = \Big[\prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \chi_j(t_i - t_j) \Big]^{\alpha_{n-1,N+1}} \cdot \Big[\chi_0 \Big(\prod_{1 \leq i < j \leq N} (t_i - t_j)^2 \Big) \Big]^{\alpha_{n-2,N+2}}$$

et

$$g(n, N, \underline{\chi}) = \prod_{i=0}^{n-1} \Big[\frac{\big(\prod_{j=1}^{N} g(\chi_j (\chi_0 \phi)^i, \psi)\big) \cdot g\big((\chi_0 \phi)^{i+1}, \psi\big)^{N-1}}{g_\infty\big((\prod_{j=1}^{N} \chi_j)(\chi_0 \phi)^{2n-2-i}, \psi\big)} \Big]^{\alpha_{n-i-1,N}} \cdot g(\chi_0 \phi, \psi)^{-(N-1)\alpha_{n-1,N+1}}.$$

1.3. — Le résultat principal de cet article est le suivant.

THÉORÈME 1.3.1. — *Si $p > n$ (et $p > 2$), alors*

$$\text{(1.3.2)} \qquad \Big[\det\,(\mathrm{Frob}_q, H_c^*(U\otimes\bar{k}, \mathcal{L}_{\underline{\chi}})^{S_n})\Big]^{(-1)^n} = C(n,N,\underline{\chi})\cdot g(n,N,\underline{\chi}).$$

1.4. Remarque. — Pour $\underline{\chi}$ générique (c'est-à-dire ne satisfaisant pas un nombre fini de relations

$$\prod_{i=0}^{N} \chi_i^{\alpha_i} = \widetilde{\chi}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $\widetilde{\chi}$ caractère multiplicatif), les $H_c^i(U\otimes\bar{k}, \mathcal{L}_{\underline{\chi}})$ sont nuls pour $i \neq n$ (cf. [L]), et donc en particulier les $H_c^i(U\otimes\bar{k}, \mathcal{L}_{\underline{\chi}})^{S_n}$. Comme d'après le LEMME 5.1.1

$$\sum_i (-1)^i \dim H_c^i(U\otimes\bar{k}, \mathcal{L}_{\underline{\chi}})^{S_n} = (-1)^n \binom{n+N-2}{n},$$

on obtient que, pour $\underline{\chi}$ générique, les $H_c^i(U\otimes\bar{k}, \mathcal{L}_{\underline{\chi}})^{S_n}$ sont nuls pour $i \neq n$, et $H_c^n(U\otimes\bar{k}, \mathcal{L}_{\underline{\chi}})^{S_n}$ est de rang $\binom{n+N-2}{n}$. En particulier si $N = 2$, $H_c^n(U\otimes\bar{k}, \mathcal{L}_{\underline{\chi}})^{S_n}$ est de rang 1, et le terme de gauche de (1.3.2) est égal au signe près à la trace de Frob_q sur $H_c^*(U\otimes\bar{k}, \mathcal{L}_{\underline{\chi}})^{S_n}$. En appliquant la formule des traces de Grothendieck, on obtient, pour $\underline{\chi}$ générique, la relation (29) de [E], conjecturée par EVANS et dont ANDERSON [A] a donné une splendide preuve élémentaire. Il n'est pas difficile à partir de [L] de déterminer explicitement un ensemble fini de relations (pas nécessairement optimal) tel que $\underline{\chi}$ est générique s'il ne satisfait pas ces relations.

2. Déterminants et monodromie

2.1. — Soit $T = \operatorname{Spec} R$ un trait hensélien d'égale caractéristique p, de corps résiduel k. On note t, η et $\bar{t}, \bar{\eta}$ les points ordinaires et les points géométriques usuels de T. On note $G = \pi_1(\eta, \bar{\eta})$ (le groupe de Galois de T) et $I = \pi_1(\eta_{\bar{t}}, \bar{\eta})$ (le groupe d'inertie), $\eta_{\bar{t}}$ étant le point générique du trait strictement hensélien $T \otimes \bar{k}$. On a une suite exacte canonique :

$$1 \longrightarrow I \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \longrightarrow 1.$$

On note K_I le groupe de Grothendieck des I-modules (un I-module est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action de I définie sur une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$ contenue dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ qui est continue pour la topologie ℓ-adique, cf. [La2, (2.1.2)]).

2.2. — Si X est un schéma sur k, et x un point fermé de X, on note $X_{(x)}$ le hensélisé de X en x. Quand X est une courbe, $X_{(x)}$ est alors un trait hensélien d'égale caractéristique p. On note alors $\eta_x = \eta$ et $\bar{\eta}_x = \bar{\eta}$, et on note G_x et I_x le groupe de Galois et le groupe d'inertie de $X_{(x)}$.

2.3. — On note π_∞ le morphisme :

$$\pi_\infty : \begin{cases} \mathbb{G}_{m,k} & \longrightarrow & \mathbb{G}_{m,k}, \\ x & \longmapsto & x^{-1}. \end{cases}$$

Si $\mathcal{L}$ est un objet de la catégorie dérivée $D_c^b(\mathbb{G}_{m,k}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$, on note $[\mathcal{L}_{\bar{\eta}_0}]$ la classe de $\Sigma(-1)^i[\mathcal{H}^i(\mathcal{L})_{\bar{\eta}_0}]$ dans K_{I_0}. De même on note $[\mathcal{L}_{\bar{\eta}_\infty}]$ la classe de $\sum(-1)^i[(\pi_{\infty *}\mathcal{H}^i(\mathcal{L}))_{\bar{\eta}_0}]$ dans K_{I_0}.

Si $\chi : k^\times \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ est un caractère multiplicatif, on note V_χ le G_0-module $(\mathcal{L}_\chi)_{\bar{\eta}_0}$ et $[V_\chi]$ son image dans K_{I_0}.

2.4. — L'énoncé suivant se déduit de façon essentiellement analogue à [L, (5.5)] des résultats de Laumon [La2].

Proposition 2.4.1. — *Soit $\mathcal{L}$ un objet de $D_c^b(\mathbb{G}_{m,k}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ dont les objets de cohomologie sont modérements ramifiés à l'origine et à l'infini. On suppose que*

$$[\mathcal{L}_{\bar{\eta}_0}] = \sum_{i \in J_0} \alpha_i [V_{\chi_i}] \quad \text{et} \quad [\mathcal{L}_{\bar{\eta}_\infty}] = \sum_{i \in J_\infty} \alpha_i [V_{\chi_i}].$$

Alors pour tout caractère multiplicatif $\chi : k^\times \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$, on a :

$$\begin{aligned} &\det\big(\mathrm{Frob}_q, H_c^{\cdot}(\mathbb{G}_{m,\bar{k}}, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_\chi)\big)^{-1} \\ &\qquad = \det\big(\mathrm{Frob}_q, H_c^{\cdot}(\mathbb{G}_{m,\bar{k}}, \mathcal{L})\big)^{-1} \cdot \prod_{s \in S(\mathcal{L})} \chi\big(N_{k(s)/k}(s)\big)^{a_s(\mathcal{L})} \\ &\qquad\qquad \cdot \prod_{i \in J_0} \Big(\frac{g(\chi\chi_i, \psi)}{g(\chi_i, \psi)}\Big)^{\alpha_i} \cdot \prod_{i \in J_\infty} \Big(\frac{g_\infty(\chi\chi_i^{-1}, \psi)}{g_\infty(\chi_i^{-1}, \psi)}\Big)^{-\alpha_i}. \quad \square \end{aligned}$$

3. Monodromie et action de groupe

3.1. — On se place dans la situation géométrique suivante. Soit $j : U \to X$ l'immersion d'un ouvert dense U dans un schéma X projectif lisse sur k. On suppose donnés un morphisme $f : U \to \mathbb{G}_{m,k}$ et un morphisme propre $g : X \to \mathbb{P}^1_k$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\ j\ } & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathbb{G}_{m,k} & \xrightarrow{\ j_0\ } & \mathbb{P}^1_k \end{array}$$

soit commutatif, avec $j_0 : \mathbb{G}_{m,k} \to \mathbb{P}^1_k$ l'immersion standard. On suppose que $X - U$ est un diviseur à croisements normaux. On note E_i, pour $i \in J$, les composantes irréductibles de $X - U$ (par hypothèse lisses). On note $E = (g^{-1}(0))_{\mathrm{red}} = \bigcup_{i \in J_0} E_i$ et $E^0 = E - \bigcup_{i \notin J_0} E_i$. On écrit $g^{-1}(0) = \sum_{i \in J_0} N_i E_i$.

3.2. — On suppose qu'un groupe fini G (à ne pas confondre avec le groupe de Galois de la section précédente) agit sur X en laissant U et f stables, et que l'action de G sur U est libre. Si s appartient à E, on note G_s le stabilisateur de s. Pour $s \in E$, on note $[(R\psi_g \mathbb{Q}_\ell)_s^{G_s}]$ la classe de $\sum (-1)^j [(R^j \psi_g \mathbb{Q}_\ell)_s^{G_s}]$ dans K_{I_0}, en notant $R\psi_g \mathbb{Q}_\ell$ le complexe des cycles proches. On a le résultat suivant.

Proposition 3.2.1. — *On suppose que tous les $N_i, i \in J_0$, sont premiers à p, et que $|G|$ est premier à p. Soit $\mathcal{S}$ une partition de E^0 en ensembles constructibles, $S \in \mathcal{S}$ tels que $|G_s|$ et $[(R\psi_g Q_\ell)_s^{G_s}]$ soient constants sur S, pour $s \in S$. On a l'égalité suivante dans K_{I_0} :*

$$\big[(Rf_! \mathbb{Q}_\ell)^G_{\bar\eta_0}\big] = |G|^{-1} \sum_{S \in \mathcal{S}} \chi(S \otimes \bar k, \mathbb{Q}_\ell)\, |G_s|\, \big[(R\psi_g \mathbb{Q}_\ell)_s^{G_s}\big],$$

avec $s \in S$.

Démonstration. — On considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\ j\ } & X \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ U' = U/G & \xrightarrow{\ j'\ } & X' = X/G \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'} \\ \mathbb{G}_{m,k} & \xrightarrow{\ j_0\ } & \mathbb{P}^1_k, \end{array}$$

et on note $f = f' \circ \pi$ et $g = g' \circ \pi$. Comme les $N_i, i \in J_0$, sont premiers à p, les faisceaux $R^j \psi_g (j_! \mathbb{Q}_\ell)$ sont modérément ramifiés sur E d'après [R-Z] (nous renvoyons à L. ILLUSIE, *Autour du théorème de monodromie locale*, Prépublication Université Paris-Sud pour une introduction agréable à l'article [R-Z]). Il en est donc de même pour les $R^j\psi_{g'}(j'_!\mathbb{Q}_\ell)$ (on utilise ici que p est premier à $|G|$).

Considérons maintenant une partition $\mathcal{S}'$ de $\pi(E)$ en ensembles constructibles, $S' \in \mathcal{S}'$, tels que $[R\psi_{g'}(j'_!\mathbb{Q}_\ell)_{s'}]$ soit constant sur S' pour $s' \in S'$. De l'égalité $(R^j f_!\mathbb{Q}_\ell)^G_{\bar\eta_0} = (R^j f'_!\mathbb{Q}_\ell)_{\bar\eta_0}$ et de la suite spectrale

$$H^i\big(\pi(E), R^j\psi_{g'}(j'_!\mathbb{Q}_\ell)\big) \Longrightarrow (R^{i+j} f'_!\mathbb{Q}_\ell)_{\bar\eta_0},$$

on déduit, compte tenu de la ramification modérée des $R^j\psi_{g'}(j'_!\mathbb{Q}_\ell)$ et du LEMME 3.2.2, que, avec $s' \in S'$:

$$\big[(Rf_!\mathbb{Q}_\ell)^G_{\bar\eta_0}\big] = \sum_{S'\in\mathcal{S}'} \chi(S'\otimes\bar k, \mathbb{Q}_\ell)\big[R\psi_{g'}(j'_!\mathbb{Q}_\ell)_{s'}\big].$$

Soient $s \in S$ et $s' = \pi(s)$. Si s est dans $E - E^0$, alors $R^j\psi_g(j_!\mathbb{Q}_\ell)_s = 0$ pour tout entier j (par la suite exacte associée au cône du morphisme canonique $R\psi_g(j_!\mathbb{Q}_\ell)_s \to R\psi_g(\mathbb{Q}_\ell)_s$ et [SGA7, I 3.3]). Comme $R^j\psi_{g'}(j'_!\mathbb{Q}_\ell)_{s'}$ est un facteur direct de $R^j\psi_g(j_!\mathbb{Q}_\ell)_s$ on obtient que $R^j\psi_{g'}(j'_!\mathbb{Q}_\ell)_{s'} = 0$. Si s est dans E^0, G_s agit librement sur la fibre de Milnor F_s de g en s, on a donc

$$\big(R^j\psi_{g'}(j'_!\mathbb{Q}_\ell)\big)_{s'} \simeq \big(R^j\psi_{g'}(\mathbb{Q}_\ell)\big)_{s'} \simeq (R^j\psi_g\mathbb{Q}_\ell)^{G_s}_s,$$

d'où

$$\big[(Rf_!\mathbb{Q}_\ell)^G_{\bar\eta_0}\big] = \sum_{\substack{S'\in\mathcal{S}'\\ S'\cap\pi(E^0)\neq\emptyset}} \chi\big(S'\otimes\bar k, \mathbb{Q}_\ell\big)\big[(R\psi_g\mathbb{Q}_\ell)^{G_s}_s\big]$$

avec s tel que $\pi(s) \in S'$. On en déduit l'énoncé voulu. □

LEMME 3.2.2. — *Soit X un schéma de type fini sur $\bar k$ et soit $\mathcal{F}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse et modérément ramifié sur X muni d'une action de I. Pour tout point x de X on a l'égalité suivante dans K_I :*

$$\sum(-1)^i\big[H^i(X,\mathcal{F})\big] = \chi(X,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\mathcal{F}_x].$$

Démonstration. — Pour tout caractère θ de I, on note avec un exposant θ le composant θ-isotypique d'un objet sur lequel I agit. Il suffit de démontrer que pour tout θ on a :

$$\sum(-1)^i H^i(X,\mathcal{F})^\theta = \chi(X,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)\dim(\mathcal{F}_x)^\theta.$$

Mais on a $H^i(X,\mathcal{F})^\theta \simeq H^i(X,\mathcal{F}^\theta)$ et $\mathcal{F}^\theta$ est un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse et modérément ramifié sur X. Le résultat est alors conséquence de [I] et de [La1]. □

3.3. — Pour $s \in E^0$, on note $J^s = \{i \in J\,;\ s \in E_i\} \subset J_0$ et d le pgcd des N_i où $i \in J^s$. L'ensemble C des composantes géométriquement connexes de la fibre de Milnor F_s de g en s a pour cardinal d. Le stabilisateur G_s agit naturellement sur C. On a le résultat suivant.

PROPOSITION 3.3.1. — *Supposons que pour tout $i \in J_0$ et pour tout $\sigma \in G$, on ait soit $\sigma(E_i) = E_i$, soit $\sigma(E_i) \cap E_i = \emptyset$. On suppose de plus que tous les N_i, avec $i \in J_0$, sont premiers à p. Alors, quel que soit $s \in E^0$,*

$$\big[(R\psi_g \mathbb{Q}_\ell)_s^{G_s}\big] = \begin{cases} 0 & si\ |J^s| > 1, \\ \big(\mathbb{Q}_\ell^{C/G_s}\big)^\vee & si\ |J^s| = 1, \end{cases}$$

où $(\mathbb{Q}_\ell^{C/G_s})^\vee$ est le dual du module $\mathbb{Q}_\ell^{C/G_s}$ muni de l'action naturelle de I_0.

Démonstration. — L'hypothèse sur les N_i garantit que le complexe des cycles proches $R\psi_g \mathbb{Q}_\ell$ coïncide avec celui des cycles proches modérés $R\psi_g^{\mathrm{tame}} \mathbb{Q}_\ell$, (cf. [R-Z]). Soit M l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}_\ell$ de base les symboles E_i, où $i \in J^s$, et

$$M_0 = \Big\{ \sum_{i \in J^s} \alpha_i E_i\,;\ \alpha_i \in \mathbb{Q}_\ell,\ \sum_{i \in J^s} \alpha_i N_i = 0 \Big\}.$$

Comme G_s agit par permutation sur les E_i pour $i \in J^s$, il y a une action naturelle de G_s sur M_0. On a des isomorphismes :

$$(R^i \psi_g \mathbb{Q}_\ell)_s \simeq \begin{cases} (\mathbb{Q}_\ell^C)^\vee & \text{si } i = 0, \\ \big((\Lambda^i M_0^\vee)^\vee \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{Q}_\ell^C\big)^\vee & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Ces isomorphismes respectent l'action de G_s et de I_0, G_s agissant sur $\mathbb{Q}_\ell^C$ via son action sur C et sur $\Lambda^i M_0^\vee$ via son action sur M_0, tandis que I_0 agit sur $\mathbb{Q}_\ell^C$ via son action sur C et trivialement sur $\Lambda^* M_0^\vee$. Pour vérifier ceci il suffit de considérer l'application naturelle

$$M^\vee \simeq H^1\big(X_{(s)} \times_X U, \mathbb{Q}_\ell\big) \longrightarrow \big(R^1\psi_g(\mathbb{Q}_\ell)\big)_s \simeq (M_0 \otimes \mathbb{Q}_\ell^C)^\vee$$

et de vérifier que l'action de G_s sur $H^1(X_{(s)} \times_X U, \mathbb{Q}_\ell)$ coïncide avec celle sur $M^\vee$. L'hypothèse de la proposition garantit que G_s stabilise les E_i avec $i \in J^s$. Par conséquent G_s agit trivialement sur M et M_0 ce qui donne l'énoncé voulu. $\square$

PROPOSITION 3.3.2. — *Pour tout point fermé s de E le stabilisateur G_s agit librement sur C.*

Démonstration. — Si l'action de G_s sur C n'était pas libre, il existerait $h \in G_s - \{1\}$ et $D \in C$ tels que $h(D) = D$. On peut supposer que h est d'ordre premier, disons ℓ'. On peut se ramener au cas où h engendre $G = G_s$. Le morphisme $f : U \to \mathbb{G}_{m,k}$ se factorise en

$$U \xrightarrow{\pi} U/G \xrightarrow{f'} \mathbb{G}_{m,k}.$$

Soit $F'_{\pi(s)}$ la fibre de Milnor de f' en $\pi(s)$. L'image $\pi(D)$ est une composante D' de $F'_{\pi(s)}$. La projection $D \to D'$ est un revêtement galoisien de groupe de Galois $G \simeq \mathbb{Z}/\ell'$. Comme $H^j(D, \mathbb{Z}/\ell')$ est nul si $j \neq 0$, la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$H^i\big(G, H^j(D, \mathbb{Z}/\ell')\big) \Longrightarrow H^{i+j}(D', \mathbb{Z}/\ell')$$

dégénère et on a $H^i(D', \mathbb{Z}/\ell') \simeq H^i(G, \mathbb{Z}/\ell')$, où G agit sur $\mathbb{Z}/\ell'$ par l'action triviale. Comme $G \simeq \mathbb{Z}/\ell'$, on a :

$$H^1(G, \mathbb{Z}/\ell') \simeq \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}/\ell') \neq 0.$$

Les $H^i(G, \mathbb{Z}/\ell')$ étant périodiques, ceci contredit le fait que D' est de dimension cohomologique finie. ▯

3.4. — Nous considérons dans ce numéro la situation géométrique plus générale suivante : nous ne supposons plus que f se prolonge en un morphisme g défini sur X. On note maintenant g l'application rationnelle $X \to \mathbb{P}^1_k$ induite par f, et on note $g^{-1}(0)$ (resp. $g^{-1}(\infty)$) le diviseur des zéros (resp. pôles) de g. Remarquons que g est un morphisme en dehors de $g^{-1}(0) \cap g^{-1}(\infty)$. On écrit $g^{-1}(\infty) = \sum_{i \in J_\infty} N_i E_i$. Nous ne supposons plus que $X - U$ soit à croisements normaux, mais seulement que $X - U$ soit à croisements normaux sur un voisinage de Zariski de $g^{-1}(0)$. En particulier les E_i sont lisses sur un voisinage de Zariski de $g^{-1}(0)$.

PROPOSITION 3.4.1. — *On suppose que pour tout $i \in J_0 \cup J_\infty$ et pour tout $\sigma \in G$, on a $\sigma(E_i) = E_i$ ou $\sigma(E_i) \cap E_i = \emptyset$. On suppose également que $p > N_i$ pour $i \in J_0$, et que $|G|$ est premier à p. Alors* 3.2.1, 3.3.1 *et* 3.3.2 *sont valides dans la situation plus générale* 3.4.

Démonstration. — La proposition est vérifiée quand g est un morphisme, car les démonstrations de 3.2.1, 3.3.1 et 3.3.2 restent valides. Nous allons nous ramener à ce cas.

Si (E_i, E_j) est un couple avec $i \in J_0$, $j \in J_\infty$ et $E_i \cap E_j \neq \emptyset$, on définit son rang comme (N_i, N_j) muni de l'ordre lexicographique. Choisissons un couple (E_i, E_j) de rang maximal. Si on éclate X le long de $\cup_{\sigma \in G} \sigma(E_i \cap E_j)$ on sépare E_i et E_j et on n'introduit que des nouvelles paires de rang inférieur ; de plus les hypothèses restent vérifiées après éclatement. En itérant suffisamment on peut rendre ainsi g défini partout. Soit E_* le diviseur exceptionnel d'un tel éclatement, et E_*^0 le complémentaire dans E_* des autres composantes du complémentaire de U ; E_* est un fibré en $\mathbb{P}^1$, tandis que E_*^0 est un fibré en $\mathbb{P}^1 - \{0, \infty\}$. Soit $F \simeq \mathbb{P}^1 - \{0, \infty\}$ une fibre du fibré E_*^0. Comme un automorphisme de $\mathbb{P}^1$ laissant fixes 0 et ∞ n'a pas d'autre point fixe s'il est distinct de l'identité, G_s est constant sur F. De plus si g s'annule sur E_*^0, $(R^\ell \psi_g \mathbb{Q}_\ell)_s^{G_s}$ est constant sur F car $R^\ell \psi_g \mathbb{Q}_\ell$ est lisse sur F. On en déduit que E_*^0 ne contribue pas à la formule de 3.2.1 car $\chi(\mathbb{P}^1 - \{0, \infty\}) = 0$. Il découle de la première formule de 3.3.1 que $E_* - E_*^0$ n'apporte non plus aucune contribution. $\square$

Remarque 3.4.2. — La Proposition 3.2.1 et la première formule de 3.3.1 restent valides pour $\mathbb{Q}_\ell$ remplacé par un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur U modérément ramifié le long de $X - U$ muni d'une action de G, et donc par 3.4.1 également dans la situation plus générale 3.4.

4. Un calcul de monodromie avec action de groupe

Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant.

Proposition 4.1. — *Supposons $t_1 = 0$ et posons $f = \ell_1$. Alors, si $p > n$, on a :*

$$\big[(Rf_! \mathcal{L}_{\underline{\chi}})^G_{\bar\eta_0}\big] = (-1)^{n-1} \Big(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{n-i-1,N} \big[V_{\chi_1 (\chi_0 \phi)^i}\big] \Big),$$

$$\big[(Rf_! \mathcal{L}_{\underline{\chi}})^G_{\bar\eta_\infty}\big] = (-1)^{n-1} \Big(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i,N} \big[V_{(\prod_{j=1}^N \chi_j^{-1})(\chi_0^{-1}\phi)^{n-1+i}}\big] \Big).$$

On supposera dans toute cette section que $p > n$.

4.2. — On va commencer par démontrer :

Proposition 4.2.1. — *Considérons l'action de S_n sur $\mathbb{P}_k^{n-1}$ par permutation des coordonnées homogènes :*

$$\sigma[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}].$$

On note V le complémentaire dans $\mathbb{P}_k^{n-1}$ des hyperplans d'équation $x_i = 0$, $1 \leq i \leq n$ et $x_i - x_j = 0$, $i \neq j$. Si H est un sous-groupe de S_n on note T_H l'ensemble des points fermés de V dont le stabilisateur est H, considéré comme schéma réduit. On note $T_i = \bigcup T_H$, $\dim T_H = i$. Si $p > n$, on a :

(i) *si T_H est non vide, alors H est cyclique, $|H|$ divise n et* $\dim T_H = -1 + n/|H|$;

(ii) $\chi(T_H \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell) = 0$ *si* $\dim T_H \geq 2$;

(iii) $\chi(T_0 \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell) = (n-1)!$;

(iv) $\chi(T_1 \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell) = \begin{cases} 0 & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ -2(n-1)! & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{cases}$

Démonstration. — Montrons (i). Fixons $(a_1, \ldots, a_n) \in T_H$ et considérons l'homomorphisme $\theta : H \to \bar{k}^\times$ défini par $\sigma \mapsto a_{\sigma(1)}/a_1$. Comme θ est injective, H est isomorphe à un sous-groupe fini de $\bar{k}^\times$ et est donc cyclique.

Quitte à faire une permutation, on peut supposer que T_H est contenu comme ouvert dense dans un projectif de la forme

$$\Big\{ \big[z_1, z_1\zeta, \ldots, z_1\zeta^{r-1}, z_2, z_2\zeta, \ldots, z_2\zeta^{r-1}, \ldots, z_s, \ldots, z_s\zeta^{r-1}\big] \,;\ (z_1, \ldots, z_s) \in \mathbb{A}_k^s \Big\}$$

avec $rs = n$ et ζ une racine primitive r-ième de l'unité dans $\bar{k}$ (qui existe car $p > n$). On a alors $|H| = r$ et $\dim T_H = s - 1$, ce qui montre (i). Le cas $s = 1$ donne que $T_0 \otimes \bar{k}$ est constitué des $(n-1)!$ points obtenus par permutation des $n-1$ dernières coordonnées de $[1, \zeta, \ldots, \zeta^{n-1}]$, ζ étant une racine primitive n-ième de l'unité, ce qui donne (iii). Montrons (ii) quand $|H| > 1$ en reprenant les notations de la preuve de (i). On considère

$$\pi_r : \begin{cases} \mathbb{P}_k^{n-1} & \longrightarrow \quad \mathbb{P}_k^{s-1}, \\ [x_1, \ldots, x_n] & \longmapsto \quad [x_1^r, x_{r+1}^r, \ldots, x_{(s-1)r+1}^r]. \end{cases}$$

Si $s > 2$, par récurrence on a $\chi(\pi_r(T_H) \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell) = 0$. Comme $p > n > r$ on en déduit que $\chi(T_H \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell) = 0$. Le même raisonnement pour $s = 2$ donne (iv). Il reste à montrer (ii) pour $H = \{1\}$.

Pour cela on remarque que

$$\sum_{i<n-1} \chi(T_i \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell) = \begin{cases} (n-1)! & \text{si } n \text{ est impair,} \\ (n-1)! - 2(n-1)! & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$
$$= (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Mais le calcul direct donne $\chi(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, d'où l'on tire $\chi(T_{\{1\}} \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell) = 0$. □

4.3. — Supposons $t_1 = 0$, et posons $f = \ell_1$, $G = S_n$. Soit $\pi : X \to \mathbb{A}^n_k$ l'éclatement de l'origine. Soient $Z \simeq \mathbb{P}^{n-1}_k$ le diviseur exceptionnel, V le complémentaire dans Z des transformés stricts de $f = 0$ et de $\Delta = 0$.

PROPOSITION 4.3.1. — *Soit $\mathcal{S}$ la partition de V en $T_H, H \subset G$. On a*

$$|G|^{-1} \sum_{S\in\mathcal{S}} \chi\big(S \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell\big)|G_s|\big[(R\psi_{f\circ\pi}\mathbb{Q}_\ell)^{G_s}_s\big] = (-1)^{n-1}[V_{\phi^{n-1}}],$$

avec $s \in S$. (On rappelle que ϕ est le caractère non trivial d'ordre 2.)

Démonstration. — D'après la PROPOSITION 3.4.1, le terme de gauche de l'égalité est égal à :

$$(n\,!)^{-1} \sum_{H} \chi\big(T_H \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell\big)|H|\big[(\mathbb{Q}_\ell^{\mu_n/H})^\vee\big].$$

On déduit alors des PROPOSITIONS 3.3.2 et 4.2.1 qu'il est égal à $(-1)^{n-1}[\mathbb{Q}_\ell]$ si n est impair, et à $(-1)^{n-1}([\mathbb{Q}_\ell^{\mu_2}] - [\mathbb{Q}_\ell])$ si n est pair. L'énoncé résulte alors de l'égalité $[\mathbb{Q}_\ell^{\mu_2}] - [\mathbb{Q}_\ell] = [V_\phi]$. $\square$

4.4. — Le lemme suivant va nous permettre de passer de $\mathbb{Q}_\ell$ à $\mathcal{L}_{\underline{\chi}}$.

LEMME 4.4.1. — *Les faisceaux $\pi^*\mathcal{L}_{\underline{\chi}}$ et $(f\circ\pi)^*\mathcal{L}_{\chi_1\chi_0^{n-1}}$ sont isomorphes sur un voisinage étale de V dans X par un isomorphisme compatible avec l'action de G.*

Démonstration. — Localement pour la topologie étale :

$$\pi^*\mathcal{L}_{\underline{\chi}} \simeq (f\circ\pi)^*\mathcal{L}\chi_1 \otimes (\Delta\circ\pi)^*\mathcal{L}\chi_0,$$

$$\Delta\circ\pi = (\text{unité})(f\circ\pi)^{n-1}. \quad \square$$

On déduit immédiatement du LEMME 3.2.2, de la PROPOSITION 4.3.1 et du LEMME 4.4.1 :

PROPOSITION 4.4.2. — *Soit $\mathcal{S}$ la partition de V en T_H, $H \subset G$. On a :*

$$|G|^{-1} \sum_{S\in\mathcal{S}} \chi(S \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell)|G_s|\big[(R\psi_{f\circ\pi}\pi^*\mathcal{L}_{\underline{\chi}})^{G_s}_s\big] = (-1)^{n-1}\big[V_{\chi_1(\chi_0\phi)^{n-1}}\big]. \quad \square$$

4.5. Démonstration de la proposition 4.1. — On considère l'immersion standard $j : \mathbb{A}^n_k \to \mathbb{P}^n_k$. Le diviseur $\mathbb{P}^n_k - U$ est une réunion d'hyperplans projectifs, correspondant à un arrangement d'hyperplans dans $\mathbb{P}^n_k$. On appelle strate de l'arrangement toute intersection non vide d'hyperplans de l'arrangement. Rappelons (cf. [L, § 7]) que si on éclate les strates de dimension 0, puis les transformées strictes des strates de dimension 1,..., puis enfin les transformées strictes des strates de dimension $(n-2)$, on obtient $\pi : X \to \mathbb{P}^n_k$, telle que $X - U$ soit un diviseur à croisements normaux, dont les composantes correspondent aux strates. Cependant cette résolution ne convient pas pour ce qui suit. A la place, on procède comme suit.

Pour I non-vide strictement contenu dans $\{0, \ldots, n\}$, on note L_I le sous-espace projectif d'équation $x_i = 0$, pour $i \in I$, avec $x_0, \ldots, x_n$ les coordonnées projectives usuelles sur $\mathbf{P}^n_k$. On commence par éclater les L_I de dimension 0, puis les transformées strictes des L_I de dimension 1,..., puis enfin les transformées strictes des L_I de dimension $(n-2)$. On obtient ainsi une modification $\pi_1 : X_1 \to \mathbb{P}^n_k$. L'image inverse A'_1 par π_1 de la réunion A_1 des hyperplans de coordonnées de $\mathbb{P}^n_k$ est transverse à la transformée stricte A'_2 par π_1 de la réunion A_2 des autres hyperplans de $\mathbb{P}^n_k - U$, et chacun est, localement pour la topologie de Zariski, réunion d'hyperplans. (On vérifie cela par récurrence sur n comme dans [L, 7.2].) En éclatant successivement les transformées strictes des strates de A'_2 de dimension $0, 1, \ldots, n-2$, on obtient une modification $\pi : X \to \mathbb{P}^n_k$, telle que $X - U$ soit un diviseur à croisements normaux. Dans la suite on supposera que X est obtenu de cette façon, c'est-à-dire en éclatant les transformées strictes des L_I et des strates de $\mathbb{P}^n_k - U$ qui ne sont contenues dans aucun hyperplan de coordonnées (les deux descriptions coïncident car les strates de A'_2 sont les transformées strictes des strates de A_2 qui ne sont pas contenues dans A_1, car A'_1 est transverse à A'_2).

Si I est non-vide et strictement contenu dans $\{0, \ldots, n\}$, on note E_I la composante de $X - U$ associée à l'éclatement de la transformée stricte de L_I, et E^0_I le complémentaire dans E_I des autres composantes de $X - U$.

Il n'est pas vrai en général que $f : U \to \mathbb{G}_{m,k}$ se prolonge en $g : X \to \mathbb{P}^1_k$, aussi nous plaçons-nous dans la situation de 3.4. On note J_0 l'ensemble des parties non-vides de $\{1, \ldots, n\}$ et J_∞ l'ensemble des parties de $\{0, \ldots, n\}$ contenant 0 et strictement contenues dans $\{0, \ldots, n\}$. On a donc :

$$g^{-1}(0) = \sum_{I \in J_0} |I| E_I, \quad g^{-1}(\infty) = \sum_{I \in J_\infty} \big(n - |I| + 1\big) E_I.$$

On note :

• V_r le complémentaire dans $\mathbb{P}^{r-1}_k$ des hyperplans $x_i = 0$, $1 \leq i \leq r$, $x_i - x_j = 0$, $1 \leq i < j \leq r$, avec $x_1, \ldots, x_r$ les coordonnées projectives sur $\mathbb{P}^{r-1}_k$;

• U_{n-r} le complémentaire dans $\mathbb{A}^{n-r}_k$ des hyperplans $x_i = 0$, $x_i = t_\ell$, $r < i \leq n$, $2 \leq \ell \leq N$, $x_i - x_j = 0$, $r < i < j \leq n$, avec $x_{r+1}, \ldots, x_n$ les coordonnées affines sur $\mathbb{A}^{n-r}_k$.

Le LEMME 5.1.1 plus bas entraîne que

$$\chi\big(U_{n-r} \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell\big) = (-1)^{n-r} \alpha_{n-r,N}(n-r)!. \tag{4.5.1}$$

Soit L_I^0 le complémentaire dans L_I des hyperplans de $\mathbb{P}_k^n - U$ qui ne contiennent pas L_I. Tout est maintenant en place pour les deux propositions suivantes qui — avec 3.4.2 — entraînent directement la PROPOSITION 4.1. □

PROPOSITION 4.6. — *Soit $I \in J_0$. Il existe une partition $\mathcal{S}$ de E_I^0 en constructibles telle que :*

$$|G|^{-1} \sum_{S \in \mathcal{S}} \chi(S \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell) |G_s| \big[(R\psi_g \pi^* \mathcal{L}_{\underline{\chi}})_s^{G_s}\big] = (-1)^{n-1} \alpha_{n-|I|,N} \binom{n}{|I|}^{-1} \big[V_{\chi_1 (\chi_0 \phi)^{|I|-1}}\big].$$

Démonstration. — On peut supposer que $I = \{1, 2, \ldots, r\}$ avec $1 \leq r \leq n$. On a alors $L_I^0 = U_{n-r}$. Si $s \in L_I^0$ alors $G_r = S_r$ avec S_r le groupe des permutations de $I = \{1, 2, \ldots, r\}$. On a $E_I^0 \simeq L_I^0 \times V_r \simeq U_{n-r} \times V_r$, S_r agissant par permutation des coordonnées projectives sur V_r et trivialement sur U_{n-r}. La situation est donc exactement, à un produit trivial près, celle du cas $r = n$ donnée par la PROPOSITION 4.4.2. En prenant comme $\mathcal{S}$ le produit de U_{n-r} avec la partition de la PROPOSITION 4.4.2, on obtient que le terme de gauche de l'égalité que l'on doit démontrer est égal à :

$$\frac{|S_r|}{|S_n|} \chi\big(U_{n-r} \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell\big) \cdot (-1)^{r-1} \big[V_{\chi_1 (\chi_0 \phi)^{r-1}}\big].$$

La proposition est maintenant conséquence directe de (4.5.1). □

PROPOSITION 4.7. — *Soit $I \in J_\infty$. Il existe une partition $\mathcal{S}$ de E_I^0 en constructibles telle que :*

$$|G|^{-1} \sum_{S \in \mathcal{S}} \chi\big(S \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell\big) |G_s| \big[(R\psi_{\pi_\infty \circ g} \pi^* \mathcal{L}_{\underline{\chi}})_s^{G_s}\big] = (-1)^{n-1} \alpha_{|I|-1,N} \binom{n}{|I|-1}^{-1} \Big[V_{(\prod_{j=1}^N \chi_j^{-1})(\chi_0^{-1}\phi)^{n+|I|-2}}\Big].$$

Démonstration. — On peut supposer que

$$I = \{0\} \cup \{r+1, r+2, \ldots, n\}$$

avec $1 \leq r \leq n$ et $r = n - |I| + 1$. On a alors $L_I^0 = V_r$. Si s appartient à L_I^0, alors G_s est un sous-groupe de $S_r \times S_{n-r}$, avec S_r le groupe des permutations de $\{1, 2, \ldots, r\}$ et S_{n-r} le groupe des permutations de $\{r+1, \ldots, n\}$. On obtient par un calcul explicite que $E_I^0 \simeq L_I^0 \times U_{n-r} \simeq V_r \times U_{n-r}$, le groupe S_r agissant par permutation des coordonnées projectives sur V_r et trivialement sur U_{n-r}, et S_{n-r} agissant par permutation des coordonnées affines sur U_{n-r} et trivialement sur V_r. En particulier, si $s \in E_I^0$, on a $G_s \subset S_r$. De plus d'après la PROPOSITION 3.3.2, G_s agit librement sur l'ensemble C des composantes géométriquement connexes de la fibre de Milnor de $\pi_\infty \circ g$ en s. On prend pour $\mathcal{S}$ le produit de la partition de la PROPOSITION 4.4.2 avec U_{n-r}. On obtient alors :

$$\begin{aligned}|G|^{-1} \sum_{S \in \mathcal{S}} \chi\big(S \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell\big) |G_s| \big[(R\psi_{\pi_\infty \circ g} \mathbb{Q}_\ell)_s^{G_s}\big] \\ = \frac{|S_r|}{|S_n|} \chi\big(U_{n-r} \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell\big) \cdot (-1)^{r-1} [V_{\phi^{r-1}}].\end{aligned}$$

D'après (4.5.1), cela entraîne la PROPOSITION 4.7 parce que $\pi^* \mathcal{L}_{\underline{\chi}}$ est isomorphe à $(\pi_\infty \circ g)^* \mathcal{L}_{(\chi_1 \chi_2 \cdots \chi_N)^{-1} \chi_0^{-(2n-r-1)}}$ sur un voisinage étale de E_I, car $\ell_j \circ \pi = (\text{unité})(\pi_\infty \circ g)^{-1}$ et $\Delta \circ \pi = (\text{unité})(\pi_\infty \circ g)^{-(2n-r-1)}$. $\square$

5. Démonstration du théorème 1.3.1

On note $D(n, N, \underline{\chi})$ le terme de gauche de l'égalité (1.3.2) et $F(n, N, \underline{\chi})$ le terme de droite. On convient que pour $N \geq 2$, on a $D(0, N, \underline{\chi}) = 1$. On va démontrer que pour $n \geq 0$ et $N \geq 1$ on a $D(n, N, \underline{\chi}) = F(n, N, \underline{\chi})$.

Le résultat est clair si $n = 0$. D'autre part le cas $N = 1$ est conséquence directe de la PROPOSITION 4.1 et de la suite spectrale de Leray associée à f, car $R^i f_! \mathcal{L}_{\underline{\chi}}$ est lisse dans ce cas. On suppose maintenant que $n \geq 1$ et que $N \geq 2$. Il suffit donc de démontrer que, si le résultat est vérifié pour $(n-1, N)$ et $(n, N-1)$, il est aussi vérifié pour (n, N). Supposons donc le résultat vérifié pour $(n-1, N)$ et $(n, N-1)$.

5.1. Première étape. — On démontre l'égalité (1.3.2) quand $\chi_1 = 1$. Soit

$$U' = \mathbb{A}_k^n - \Big(\bigcup_{2 \leq i \leq N} \ell_i^{-1}(0) \cup \Delta^{-1}(0) \Big).$$

On note $\underline{\chi}' = (\chi_0, \chi_2, \ldots, \chi_N)$ et on définit $\mathcal{L}_{\underline{\chi}'}$ sur U' par :

$$\mathcal{L}_{\underline{\chi}'} = \bigotimes_{2 \leq i \leq N} \ell_i^* \mathcal{L}_{\chi_i | U'} \otimes \Delta^* \mathcal{L}_{\chi_0 | U'}.$$

On identifie $\mathbb{A}_k^{n-1}$ à l'hyperplan L_1 défini par $x_1 = 0$. Soit

$$U'' = \mathbb{A}_k^{n-1} - \Big(\bigcup_{2 \leq i \leq N} \ell_i^{-1}(0) \cup \Delta^{-1}(0) \Big).$$

Pour $1 \leq i \leq N$, soit $\ell''_i = \prod_{j=2}^{n} (x_j - t_i)$, et soit $\Delta'' = \prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$. Remarquons que :

$$U'' = \mathbb{A}_k^{n-1} - \Big(\bigcup_{1 \leq i \leq N} {\ell''}_i^{-1}(0) \cup {\Delta''}^{-1}(0) \Big).$$

On note

$$\underline{\chi}'' = (\chi_0, \chi_0^2, \chi_2, \ldots, \chi_N)$$

et on définit $\mathcal{L}_{\underline{\chi}''}$ sur U'' par

$$\mathcal{L}_{\underline{\chi}''} = \bigotimes_{2 \leq i \leq N} {\ell''}_i^* \mathcal{L}_{\chi_i | U''} \otimes {\ell''}_1^* \mathcal{L}_{\chi_0^2 | U''} \otimes \Delta''^* \mathcal{L}_{\chi_0 | U''}.$$

Soit $\mathcal{E}$ le faisceau géométriquement constant de rang 1 sur U'' sur lequel le Frobenius agit par multiplication par $\prod_{j=2}^{N} \chi_j(-t_j)$. On note $\widetilde{\mathcal{L}}_{\underline{\chi}''} = \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}_{\underline{\chi}''}$. On aura besoin du lemme suivant.

LEMME 5.1.1. — *Si $n \geq 0$ et $N \geq 1$, on a :*

$$\sum_j (-1)^j \dim H_c^j(U \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell)^{S_n} = (-1)^n \alpha_{n,N}.$$

Démonstration. — L'énoncé est vrai si $n = 0$ ou si $N = 1$. En général on a une suite exacte longue :

$$\cdots \longrightarrow H_c^*(U \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell)^{S_n} \longrightarrow H_c^*(U' \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell)^{S_n} \longrightarrow H_c^*(\ell_1^{-1}(0) \cap U' \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell)^{S_n} \longrightarrow \cdots.$$

Comme

$$H_c^*(\ell_1^{-1}(0) \cap U' \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell)^{S_n} \simeq H_c^*(U'' \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell)^{S_{n-1}},$$

on en tire l'énoncé par récurrence sur n et N. $\square$

Si $\chi_1 = 1$, on a une suite exacte longue :

$$\cdots \to H_c^*(U \otimes \bar{k}, \mathcal{L}_{\underline{\chi}})^{S_n} \longrightarrow H_c^*(U' \otimes \bar{k}, \mathcal{L}_{\underline{\chi}'})^{S_n} \longrightarrow H_c^*(\ell_1^{-1}(0) \cap U' \otimes \bar{k}, j^* \mathcal{L}_{\underline{\chi}'})^{S_n} \to \cdots,$$

avec $j : \ell_1^{-1}(0) \cap U' \to U'$ l'inclusion naturelle.

LEMME 5.1.2. — *Les* $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$*-modules* $H_c^*(\ell_1^{-1}(0)\cap U'\otimes\bar{k}, j^*\mathcal{L}_{\underline{\chi}'})^{S_n}$ *et* $H_c^*(U''\otimes\bar{k}\ ,\ \widetilde{\mathcal{L}}_{\underline{\chi}''})^{S_{n-1}}$ *sont isomorphes.*

Démonstration. — Vérification immédiate. □

On trouve donc, d'après les LEMMES 5.1.1. et 5.1.2,

$$D(n,N,\underline{\chi}) = \Big(\prod_{j=2}^{N}\chi_j(-t_j)^{\alpha_{n-1,N}}\Big) \cdot D\big(n,N-1,\underline{\chi}'\big)\cdot D\big(n-1,N,\underline{\chi}''\big). \tag{5.1.3}$$

Pour terminer la démonstration dans le cas $\chi_1 = 1$, il reste à savoir que le terme de droite de (1.3.2) vérifie également (5.1.3) :

LEMME 5.1.4. — *On a, pour* $n\geq 1$ *et* $N\geq 2$:

$$F(n,N,\underline{\chi}) = \Big(\prod_{j=2}^{N}\chi_j(-t_j)^{\alpha_{n-1,N}}\Big)\cdot F\big(n,N-1,\underline{\chi}'\big)\cdot F\big(n-1,N,\underline{\chi}''\big).$$

Démonstration. — On tire directement de la relation $\alpha_{r-1,s}+\alpha_{r,s-1} = \alpha_{r,s}$ que les termes en $g(\chi_j(\chi_0\phi)^i,\psi)$ pour $j\geq 2$ et les termes en g_∞ sont les mêmes dans les deux membres de la formule. Dans le membre de gauche, $g(\chi_0\phi,\psi)$ apparaît avec la multiplicité

$$\alpha_{n-2,N}+(N-1)\alpha_{n-1,N}-(N-1)\alpha_{n-1,N+1} = \alpha_{n-2,N}-(N-1)\alpha_{n-2,N+1}$$

et, dans le membre de droite, avec la multiplicité

$$\begin{aligned}(N-2)\alpha_{n-1,N-1}-(N-2)\alpha_{n-1,N}+(N-1)\alpha_{n-2,N}-(N-1)\alpha_{n-2,N+1}\\ = \alpha_{n-2,N}-(N-1)\alpha_{n-2,N+1}.\end{aligned}$$

Pour $i\geq 2$, $g((\chi_0\phi)^i,\psi)$ apparaît dans le membre de gauche avec la multiplicité

$$\alpha_{n-i-2,N}+(N-1)\alpha_{n-i-1,N}$$

et dans le membre de droite avec la multiplicité

$$\begin{aligned}&(N-2)\alpha_{n-i-1,N+1}+\alpha_{n-i-1,N}+(N-1)\alpha_{n-i-2,N}\\ &\quad = (N-2)\big(\alpha_{n-i-1,N}-\alpha_{n-i-2,N}\big)+\alpha_{n-i-1,N}+(N-1)\alpha_{n-i-2,N}.\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$g(n,N,\underline{\chi}) = g(n,N-1,\underline{\chi}')\cdot g(n-1,N,\underline{\chi}'').$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
&C(n,N,\underline{\chi})\cdot C(n,N-1,\underline{\chi}')^{-1}\\
&=\Big(\prod_{i,j=2,i\neq j}^{N}\chi_j(t_i-t_j)\Big)^{\alpha_{n-2,N+1}}\cdot\Big(\chi_0\Big(\prod_{2\le i<j\le N}(t_i-t_j)^2\Big)\Big)^{\alpha_{n-3,N+2}}\\
&\qquad\cdot\Big(\prod_{2\le j\le N}\chi_j(-t_j)\Big)^{\alpha_{n-1,N+1}}\cdot\Big(\chi_0\Big(\prod_{2\le j\le N}t_j^2\Big)\Big)^{\alpha_{n-2,N+2}}\\
&=\Big(\prod_{j=2}^{N}\chi_j(-t_j)^{\alpha_{n-1,N}}\Big)\cdot C(n-1,N,\underline{\chi}'').\quad\square
\end{aligned}$$

5.2. Deuxième étape. — On passe de $\chi_1 = 1$ à χ_1 quelconque.

On note $\underline{\chi}^0 = (\chi_0, 1, \chi_2, \dots, \chi_N)$. La PROPOSITION 2.4.1 appliquée à la restriction de $(Rf_!\mathcal{L}_{\underline{\chi}^0})^G$ à $\mathbb{G}_{m,k}$ donne, grâce à la PROPOSITION 4.1 que le quotient des termes de gauche de (1.3.2) associés à $\underline{\chi}$ et $\underline{\chi}^0$, $D(n,N,\underline{\chi})\cdot D(n,N,\underline{\chi}^0)^{-1}$, est de la forme

$$\chi_1(*)\cdot G$$

avec

$$G=\prod_{i=0}^{n-1}\left[\frac{g(\chi_1(\chi_0\phi)^i,\psi)}{g((\chi_0\phi)^i,\psi)}\cdot\frac{g_\infty((\prod_{j=2}^{N}\chi_j)(\chi_0\phi)^{2n-2-i},\psi)}{g_\infty((\prod_{j=1}^{N}\chi_j)(\chi_0\phi)^{2n-2-i},\psi)}\right]^{\alpha_{n-i-1,N}}.$$

D'autre part, le quotient des termes de droite,

$$F(n,N,\underline{\chi})\cdot F(n,N,\underline{\chi}^0)^{-1}$$

est égal à

$$\chi_1\Big(\prod_{2\le i\le N}t_i^{\alpha_{n-1,N+1}}\Big)\cdot G\,.$$

Il reste donc à démontrer que l'on peut prendre :

$$*=\prod_{2\le i\le N}t_i^{\alpha_{n-1,N+1}}.$$

Pour cela, il suffit de reprendre le même raisonnement avec χ_2 ! $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[A] ANDERSON (G.). — *The evaluation of Selberg sums*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. **311**, 1990, p. 469–472.

[E] EVANS (R.). — *Identities for products of Gauss sums over finite fields*, Enseign. Math., t. **27**, 1981, p. 197–209.

[I] ILLUSIE (L.). — *Théorie de Brauer et caractéristique d'Euler-Poincaré (d'après P. Deligne), Caractéristique d'Euler-Poincaré*, Astérisque, t. **82–83**, 1981, p. 161–172.

[La1] LAUMON (G.). — *Comparaison de caractéristiques d'Euler-Poincaré en cohomologie ℓ-adique*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. **292**, 1981, p. 209–212.

[La2] LAUMON (G.). — *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjectures de Weil*, Publ. Math. I.H.E.S., t. **65**, 1987, p. 131–210.

[L] LOESER (F.). — *Arrangements d'hyperplans et sommes de Gauss*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. **24**, 1991, p. 379–400.

[R-Z] RAPOPORT (M.) und ZINK (T.). — *Über die lokale Zetafunction von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindente Zyklen in ungleicher Charakteristik*, Invent. Math., t. **68**, 1982, p. 21–101.

[SGA7] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique, I.* — dirigé par A. Grothendieck, Lecture Notes in Math. **288**, Springer–Verlag 1972 ; II, par P. DELIGNE et N. KATZ, Lecture Notes in Math. **340**, Springer–Verlag 1973.

[V] VARCHENKO (A.). — *Determinant formula for Selberg type integrals*, Preprint 1990, p. 1–3.