J. reine angew. Math. **412** (1990), 75—96

Journal für die reine und angewandte Mathematik

Fonctions d'Igusa p-adiques, polynômes de Bernstein, et polyèdres de Newton

Par *François Loeser* à Palaiseau

1. Introduction

Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ un polynôme s'annulant à l'origine. Soit ϕ une fonction localement constante à support compact sur K^n. La fonction zêta locale d'Igusa associée à f est définie pour $\mathrm{Re}(s) > 0$ par l'intégrale

$$Z_\phi(s) = \int_{K^n} \phi |f|^s |dx|$$

et se prolonge analytiquement, d'après un résultat d'Igusa, en une fonction rationnelle de q^{-s}.

Dans le cas de polynômes à deux variables ($n = 2$) on a démontré dans [L] que les parties réelles des pôles de $Z_\phi(s)$ sont des racines du polynôme de Bernstein de f. Le propos de cet article est de démontrer un résultat analogue pour des polynômes en un nombre quelconque de variables, non dégénérés pour leur polyèdre de Newton.

Notre point de départ est un résultat de Denef, qui affirme que si f est non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'origine, et si le support de ϕ est assez petit, alors les parties réelles des pôles non triviaux de $Z_\phi(s)$ sont de la forme $-t(F)^{-1}$, $(t(F), \ldots, t(F))$ étant le point d'intersection de la diagonale avec le support d'une face F de codimension 1 du polyèdre de Newton.

Le problème est donc ramené à déterminer sous quelles conditions les rationnels $-t(F)^{-1}$ sont racines du polynôme de Bernstein de f. Il est nécessaire d'imposer des conditions, puisque par exemple les "faces à distance 1" peuvent ne pas donner de racine du polynôme de Bernstein (cf. 6.3). Notre résultat principal énoncé en 4. 6 est du type suivant: si F est une face compacte de codimension 1 qui vérifie une condition de "non résonance" avec les faces de codimension 1 voisines, et si $t(F) > 1$, alors $-t(F)^{-1}$ est une racine du polynôme de Bernstein de f.

Comme dans le cas $n=2$, le point-clef de la preuve est de montrer qu'une certaine forme différentielle multiforme définit une classe de cohomologie non nulle. Dans le cas $n=2$, nous avions utilisé pour cela un résultat de Deligne et Mostow [D-M]. Récemment, Esnault et Viehweg ont généralisé en dimension quelconque ce résultat [E-V 2]. Nous utilisons une variante toroïdale de leur résultat (théorème 3. 7).

Il est peut-être important de signaler le phénomène suivant: comme dans le cas $n=2$, le racines du polynôme de Bernstein que nous déterminons sont "géométriques", elles ne "sautent" pas par déformation équisingulière et s'expriment à l'aide d'invariants géométriques. Ceci suggère que les racines du polynôme de Bernstein provenant des fonctions d'Igusa p-adiques ont peut-être une signification géométrique particulière.

Le plan de l'article est le suivant. Dans la section 2, on rapelle les notions et résultats classiques sur les variétés toroïdales et les polyèdres de Newton que nous utilisons. La plupart d'entre eux se trouvent dans les articles de Danilov [Da 1], [Da 2]. Ensuite (dans la section 3) on étudie les complexes de De Rham logarithmiques sur les variétés toroïdales, ce qui nous permet d'établir un analogue toroïdal du résultat d'Esnault et Viehweg. Nous utilisons ce résultat dans la section suivante pour démontrer notre résultat principal sur les racines du polynôme de Bernstein des fonctions non dégénérées pour leur polyèdre de Newton. Dans la section 5, on applique ce résultat à l'étude des pôles des fonctions d'Igusa p-adiques. Enfin on conclut l'article par diverses remarques (section 6).

Remerciements. Je tiens à remercier H. Esnault et E. Viehweg qui lors d'un séjour au Max-Planck-Institut, m'ont expliqué comment les méthodes de leur article [E-V 1] permettent de généraliser le résultat de Deligne et Mostow. Mes remerciements vont également au Max-Planck-Institut pour l'hospitalité dont j'ai bénéficié à cette occasion, ainsi qu'à M. Vaquié pour d'utiles conversations. Je remercie enfin le rapporteur dont le remarques m'ont permis de corriger des inexactitudes contenues dans les versions antérieures de cet article.

2. Rappels et préliminaires

Dans cette section, on fixe les notations et on rappelle des résultats bien connus sur les variétés toriques et toroïdales qui se trouvent pour la plupart dans [Da 1], [Da 2].

2. 1. Soit $V=\mathbb{R}^n$, $V^\vee$ l'espace vectoriel dual et $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V^\vee \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire de dualité. Soit $M=\mathbb{Z}^n$ le réseau standard dans V, N le réseau dual dans $V^\vee$. On note $(e_1,\dots,e_n)$ la base standard de N, $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ la base standard (duale) de M. Si S est un sous semi-groupe du groupe M, on note $\mathbb{C}[S]$ l'algèbre du semi-groupe S sur $\mathbb{C}$. Si m appartient à M, on note x^m l'élément de $\mathbb{C}[M]$ qui lui correspond. Un vecteur $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{Z}^n$ est primitif si pgcd$\{x_i;\ 1\leqq i\leqq n\}=1$. Si A et B sont des sous-ensembles de V, on note $A-B=\{a-b;\ a\in A,\ b\in B\}$.

2. 2. 1. On appelle polyèdre convexe (resp. cône polyédral) rationnel tout ensemble qui est l'intersection d'un ensemble fini de demi-espaces fermés définis par des inéquations linéaires à coefficients entiers (resp. s'annulant à l'origine). Un polyèdre convexe entier est un polyèdre convexe dont tous les sommets appartiennent à M.

On dira souvent cône au lieu de cône polyédral rationnel. Un cône saillant est un cône ayant l'origine comme sommet. Si Δ est un polyèdre convexe rationnel, on note $\mathscr{F}(\Delta)$ l'ensemble des faces de Δ, et $\mathscr{F}^k(\Delta)$ l'ensemble des faces de codimension k.

2. 2. 2. Soit σ un cône polyédral rationnel. On lui associe la variété torique affine $X(\sigma) = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\sigma \cap M]$. C'est une variété normale.

Soit Δ un polyèdre convexe entier. A toute face F de Δ, on associe un cône C_F de la manière suivante. Si F est réduit à un sommet p, on pose $C_F = \mathbb{R}_+(\Delta - p)$. Si F est de dimension au moins 1, on choisit un point p à coordonnées rationnelles qui appartient à l'intérieur de F, et on pose $C_F = \mathbb{R}_+(\Delta - p)$. On obtient ainsi un cône indépendant du choix de p.

L'ensemble des cônes duaux

$$C_F^\vee = \{x \in V^\vee;\ \forall y \in C_F, \langle y, x\rangle \geqq 0\}$$

définit un éventail $\Sigma(\Delta)$ qui admet la définition suivante. La fonction d'appui $H(x) = \inf\limits_{y \in \Delta} \langle y, x\rangle$ est linéaire sur chacun des cônes $C_F^\vee$. L'éventail $\Sigma(\Delta)$ est l'éventail le moins fin de support $|\Sigma(\Delta)| = \bigcup\limits_{F \in \mathscr{F}(\Delta)} C_F^\vee$ ayant cette propriété. A l'éventail $\Sigma(\Delta)$ est associée une variété torique $X(\Delta)$ qui admet comme recouvrement les variétés affines $X(C_{\{p\}})$, p décrivant l'ensemble des sommets de Δ.

2. 2. 3. Soit Δ un polyèdre convexe entier. Si F est une face de Δ, on a une inclusion naturelle $X(F) \to X(\Delta)$. De plus $X(\Delta) \setminus \bigcup\limits_{F \in \mathscr{F}(\Delta)} X(F)$ s'identifie naturellement au tore $\mathbb{T}^n = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[M]$.

2. 2. 4. Si Δ est un polyèdre convexe entier compact, la variété torique $X(\Delta)$ est complète. De plus $X(\Delta)$ est alors muni naturellement d'un faisceau inversible ample $\mathscr{L}(\Delta)$ qui admet la description suivante: sur l'ouvert $X(C_{\{p\}}) = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[C_{\{p\}} \cap M]$, p étant un sommet de Δ, $\mathscr{L}(\Delta)$ est le $\mathbb{C}[C_{\{p\}} \cap M]$ module engendré par x^p.

2. 3. 1. Définitions. i) Une variété toroïdale X est un ensemble analytique complexe tel que tout point x de X admette un voisinage V_x isomorphe à un voisinage de l'origine dans une variété torique affine $X(\sigma)$, σ étant un cône polyédral rationnel.

ii) Un diviseur de Weil D sur une variété toroïdale X est dit toroïdal si toutes ses composantes irréductibles sont normales, et si en tout point du support de D il existe un modèle local $X(\sigma)$ de X, avec σ un cône polyédral rationnel, tel que dans ce modèle local $X(\sigma)$ les composantes irréductibles de D soient de la forme $X(\tau)$ avec τ des faces de codimension 1 de σ.

iii) On dit qu'un diviseur toroïdal D sur une variété toroïdale X est complet si en tout point du support de D, il existe un modèle local $X(\sigma_0 \times H)$ avec σ_0 un cône saillant et H un sous-espace vectoriel rationnel, tel que dans ce modèle local l'ensemble des composantes irréductibles de D soit exactement l'ensemble des $X(\tau \times H)$, τ décrivant l'ensemble des faces de codimension 1 de σ_0.

2. 3. 2. Remarques. 1) Dans i) et ii) on peut toujours supposer que σ est un cône saillant.

2) En un point lisse d'une variété toroïdale, un diviseur est toroïdal si et seulement si c'est un diviseur à croisements normaux.

2. 4. 1. Soit $f:(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction analytique complexe de n variables s'annulant à l'origine. Le polyèdre de Newton de f à l'origine est le polyèdre convexe entier $\Delta(f)$, enveloppe convexe de $\operatorname{Supp}(f)+\mathbb{N}^n$, $\operatorname{Supp}(f)$ étant l'ensemble des exposants des monômes de f ayant un coefficient non nul.

Comme le support de $\Sigma(\Delta(f))$ est égal à $(\mathbb{R}_+^n)^\vee$, il existe un morphisme propre naturel

$$\pi : X(\Delta(f)) \to \mathbb{C}^n = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\mathbb{N}^n].$$

Sur un ouvert $X(C_F)$, π provient de l'inclusion $\mathbb{N}^n \to C_F \cap M$.

Soit F une face de codimension 1 de $\Delta(f)$. L'hyperplan qui contient F admet une unique équation

$$\sum_{1 \leqq i \leqq n} a_i(F)\, x_i = N(F)$$

avec $N(F)$ entier positif et les $a_i(F)$ des entiers positifs vérifiant $\operatorname{pgcd}\{a_i(F);\ 1 \leqq i \leqq n\} = 1$. (On utilise ici que F contient un point à coordonnées entières.) On note $a(F)$ le vecteur primitif $(a_1(F), \ldots, a_n(F))$ et $n(F) = \sum_{1 \leqq i \leqq n} a_i(F)$.

Soit H le diviseur d'equation $\prod_{1 \leqq i \leqq n} x_i = 0$ dans $\mathbb{C}^n$. La restriction de π à $X(\Delta(f)) \setminus \bigcup_{F \in \mathscr{F}^1(\Delta(f))} X(F)$ est un isomorphisme $\pi' : X(\Delta(f)) \setminus \bigcup_{F \in \mathscr{F}^1(\Delta(f))} X(F) \to \mathbb{C}^n \setminus H$.

Soit $\tilde{E}$ l'adhérence de $\pi'^{-1}(f^{-1}(0) \setminus H)$ dans $X(\Delta(f))$. On vérifie facilement que le diviseur $\pi^{-1}(f^{-1}(0))$ est égal à

$$\sum_{F \in \mathscr{F}^1(\Delta(f))} N(F)\, X(F) + \tilde{E}.$$

De plus la restriction de π à $X(\Delta(f)) \setminus \pi^{-1}(f^{-1}(0))$ est un isomorphisme sur son image.

2. 4. 2. Si f s'écrit $f = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k$, et si F est une face de $\Delta(f)$, on pose $f_F = \sum_{k \in F} a_k x^k$.

2. 4. 3. L'énoncé suivant est également bien connu (cf. [Da 2]).

Lemme 2. 4. 3. *Si F est une face compacte de $\Delta(f)$, alors $\tilde{E} \cap X(F)$ est un diviseur de Cartier ample dans $X(F)$, et on a*

$$\mathcal{O}_{X(F)}(\tilde{E} \cap X(F)) = \mathcal{L}(X(F)).$$

Démonstration. Si p est un sommet de F, $\tilde{E} \cap X(F)$ est défini par l'equation $x^{-p} f_F(x) = 0$ dans l'ouvert $X(C_{\{p\}}) \cap X(F)$, d'où le résultat d'après la définition de $\mathcal{L}(X(F))$.

2. 5. Soit f vérifiant les conditions données en 2. 4. 1. On dit que f est non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'origine si pour toute face compacte F de $\Delta(f)$, les fonctions $\dfrac{\partial f_F}{\partial x_i}$, $1 \leqq i \leqq n$, n'ont pas de zéro commun dans $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$.

Lemme 2. 5. *Si f est non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'origine, alors*

i) *le diviseur $\tilde{E}$ est réduit,*

ii) *$\pi^{-1}(f^{-1}(0) \cup H)$ est un diviseur toroïdal complet de $(X(f))$ au voisinage de* $\pi^{-1}(0)$,

(iii) *pour toute face compacte F de codimension* 1 de $\Delta(f)$,

$$(\pi^{-1}(f^{-1}(0) \cup H) - N(F)\,X(F)) \cap X(F) \textit{ est un diviseur toroïdal complet de } X(F).$$

Démonstration. L'énoncé du lemme est bien connu si on enlève le mot "complet" ([Da 2]). C'est une conséquence directe des définitions que les diviseurs apparaissant dans l'énoncé du lemme sont complets.

2. 6. On note $\wedge^*(V) = \bigoplus_{p \geqq 0} \wedge^p(V)$ l'algèbre extérieure de V. Si v est un vecteur de V on note

$$i(v): \begin{cases} \wedge^p(V) \to \wedge^{p+1}(V), \\ \qquad x \to v \wedge x \end{cases}$$

la multiplication à gauche par v.

Si w appartient à $V^\vee$ on note $j(w)$ la multiplication intérieure à droite par w

$$j(w): \begin{cases} \wedge^{p+1}(V) \to \wedge^p(V), \\ \qquad x \to x \llcorner w. \end{cases}$$

On a la formule

$$(x \wedge y) \llcorner w = (x \llcorner w) \wedge y + (-1)^p x \wedge (y \llcorner w)$$

si $x \in \wedge^p(V)$. On en déduit

Lemme 2. 6. *Sur $\wedge^p(V)$ l'application linéaire $i(v) \circ j(w) + j(w) \circ i(v)$ coïncide avec la multiplication par $\langle v, w \rangle$.*

3. Complexes de De Rham logarithmiques sur les variétés toroïdales

3. 1. Rappelons la définition de Danilov des formes différentielles sur les variétés toroïdales. Soit X une variété toroïdale, U un ouvert lisse dont le complémentaire est de codimension au moins 2 (un tel ouvert existe car X est normale), j l'inclusion de U dans X. Le faisceau $\Omega_X^p = j_*(\Omega_U^p)$, indépendant du choix de U, est cohérent d'après la description locale qui suit, et il existe une différentielle naturelle $d: \Omega_X^p \to \Omega_X^{p+1}$ qui prolonge la différentielle uselle. De même si D est un diviseur toroïdal, on définit le faisceau $\Omega_X^p(\log D)$ comme $j_*(\Omega_U^p(\log D \cap U))$. C'est également un faisceau cohérent muni d'une différentielle naturelle qui prolonge la différentielle usuelle.

3. 2. 1. Dans un modèle local, ces faisceaux admettent la description combinatoire suivante due à Danilov [Da 1].

On note $W = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Si σ est un cône polyédral rationnel, on note

$$W_\tau = M \cap (\tau - \tau) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$$

si τ est une face de σ. Si m appartient à $\sigma \cap M$, on note

$$W(m) = \bigcap_{\substack{m \in \tau \\ \tau \in \mathscr{F}^1(\sigma)}} W_\tau .$$

Soit X une variété toroïdale, x un point de X. Soit $(X(\sigma), 0)$ un modèle local de (X, x) avec σ un cône saillant, 0 le point de $X(\sigma)$ correspondant au sommet.

Dans ce modèle local $\Omega_{X,x}^p$ s'identifie à l'ensemble des germes de séries convergentes $\sum_{m \in \sigma \cap M} \alpha_m x^m$ avec $\alpha_m \in \wedge^p(W(m))$, la différentielle d étant donnée sur les monômes par

$$d(\alpha_m x^m) = (m \wedge \alpha_m) x^m .$$

L'identification se fait de la manière suivante: sur le tore $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[M]$ contenu dans $X(\sigma)$

$$(m_1 \wedge \cdots \wedge m_p) x^m, \qquad m_i \in M \cap W(m)$$

correspond à la forme différentielle

$$x^m \frac{d x^{m_1}}{x^{m_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{d x^{m_p}}{x^{m_p}} .$$

3. 2. 2. De même si D est un diviseur toroïdal qui dans le modèle local a pour support $\bigcup_{\tau \in I} X(\tau)$, avec $I \subset \mathscr{F}^1(\sigma)$, on pose

$$W_\tau(\log D) = \begin{cases} W & \text{si} \quad \tau \in I, \\ W_\tau & \text{si} \quad \tau \notin I, \end{cases}$$

$$W(m)(\log D) = \bigcap_{\substack{m \in \tau \\ \tau \in \mathscr{F}^1(\sigma)}} W_\tau(\log D).$$

De la même façon, $\Omega_X^p(\log D)_x$ s'identifie alors à l'ensemble des germes de séries convergentes $\sum_{m \in \sigma \cap M} \alpha_m x^m$ avec $\alpha_m \in \wedge^p(W(m)(\log D))$.

En particulier si $I = \mathscr{F}^1(\sigma)$, on a une identification naturelle entre $\Omega_X^p(\log D)_x$ et $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^p(W)$. Ceci entraîne que si D est un diviseur toroïdal complet, les faisceaux $\Omega_X^p(\log D)$ sont localement libres.

3. 3. Si $\mathscr{G}$ est un faisceau de $\mathcal{O}$ modules, on note $\mathscr{G}$/tors le quotient de $\mathscr{G}$ par sa torsion. On aura besoin du lemme suivant.

Lemme 3. 3. *Soient X une variété toroïdale, D un diviseur toroïdal, $\pi: \tilde{X} \to X$ une modification propre avec $\tilde{X}$ lisse telle que $\tilde{D} = \pi^{-1}(D)$ soit un diviseur à croisements normaux. On a alors une inclusion naturelle*

$$\pi^*(\Omega_X^p(\log D))/\text{tors} \subset \Omega_{\tilde{X}}^p(\log \tilde{D})$$

compatible avec la différentielle.

Démonstration. L'inclusion à démontrer est équivalente à

$$\pi_*(\Omega_{\tilde{X}}^p(\log \tilde{D})) = \Omega_X^p(\log D).$$

Le problème étant local, on peut supposer que $X = X(\sigma)$ et $|D| = \bigcup_{\tau \in I} X(\tau)$ avec $I \subset \mathscr{F}^1(\sigma)$. Choisissons un éventail Σ dont le support est égal à $\sigma^\vee$ et qui est réunion de cônes simpliciaux dont les vecteurs des arêtes forment une $\mathbb{Z}$-base. Il lui est associé une variété torique lisse X_Σ et un morphisme naturel $\pi_1: X_\Sigma \to X$. De plus, les composantes irréductibles du diviseur $D_1 = \pi_1^{-1}(D)$ sont des diviseurs toriques associés à des arêtes de Σ.

En utilisant la description combinatoire de $\Omega_X^p(\log D)$ et $\Omega_{X_\Sigma}^p(\log D_1)$ donnée en 3. 2. 2 on vérifie facilement que

$$\pi_1^*(\Omega_X^p(\log D))/\text{tors} \subset \Omega_{X_\Sigma}^p(\log D_1).$$

On obtient donc

$$\pi_{1*}(\Omega_{X_\Sigma}^p(\log D_1)) = \Omega_X^p(\log D).$$

Pour démontrer le lemme, on remarque que d'après le théorème d'Hironaka, il existe une variété lisse X″, des modifications propres π_2 et π_3, telles que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "\pi_3"] \arrow[d, "\pi_2"'] & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ X_\Sigma \arrow[r, "\pi_1"] & X \end{tikzcd}$$

et telles que $\pi_2^{-1}(D_1) = \pi_3^{-1}(\tilde{D})$ soit un diviseur à croisements normaux. D'après [Vi], Lemma 1. 7, on a $\pi_{2*}(\Omega^p_{X''}(\log D'')) = \Omega^p_{X_\Sigma}(\log D_1)$ et $\pi_{3*}(\Omega^p_{X''}(\log D'')) = \Omega^p_{\tilde{X}}(\log \tilde{D})$.

On a donc

$$\begin{aligned} \pi_*(\Omega^p_{\tilde{X}}(\log \tilde{D})) &= \pi_* \pi_{3*}(\Omega^p_{X''}(\log D'')) \\ &= \pi_{1*} \pi_{2*}(\Omega^p_{X''}(\log D'')) \\ &= \Omega^p_X(\log D). \end{aligned}$$

3. 4. Connexions à pôles logarithmiques.

3. 4. 1. Soient X une variété toroïdale et D un diviseur toroïdal tels que $U = X \setminus |D|$ soit lisse. On note D_i, $i \in I$, les composantes irréductibles de D, X_0 la partie lisse de X et j' l'inclusion $j': X_0 \to X$.

Soit L un système local de rang un sur U. Le fibré en droites $\mathscr{L}_0 = L \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_U$ est muni naturellement d'une connexion intégrable. Comme X et D_i sont lisses au point générique de D_i, on peut considérer la transformation de monodromie γ_i autour de D_i. Cette transformation agit sur L par multiplication par un nombre complexe non nul λ_i. Pour tout choix de nombres complexes $\alpha = (\alpha_i)$, $i \in I$, vérifiant $\lambda_i = \exp(-2\pi\sqrt{-1}\,\alpha_i)$, il existe d'après [D] un fibré en droites $\mathscr{L}_{\alpha,0}$ sur X_0 muni d'une connexion intégrable à pôles logarithmiques le long de $D \cap X_0$ qui prolonge $\mathscr{L}_0$ et dont le résidu le long de D_i est α_i. On pose $\mathscr{L}_\alpha = j'_*(\mathscr{L}_{\alpha,0})$. On dit que $\mathscr{L}_\alpha$ est un faisceau muni d'une connexion intégrable à pôles logarithmiques prolongeant $L \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_U$.

3. 4. 2. Soit σ un cône saillant de dimension n. Soient $f_1, \ldots, f_k$, avec $k \geqq n$, les vecteurs primitifs engendrant les faces de codimension 1 du cône dual $\sigma^\vee$. A chaque vecteur f_i est associé un diviseur $D_i = X(\tau_i)$, τ_i étant la face de codimension 1 de σ orthogonale à f_i.

Soit L un système local de rang 1 sur $\mathbb{T}^n = X(\sigma) \setminus \bigcup_{1 \leqq i \leqq k} D_i$, $\alpha = (\alpha_i)$, $1 \leqq i \leqq k$, comme en 3. 4. 1, et $\mathscr{L}_\alpha$ le faisceau sur $X(\sigma)$ associé à ces données. On écrit $f_i = \sum_{1 \leqq i \leqq n} a_{ij} e_j$, pour $1 \leqq i \leqq k$.

Lemme 3.4.2. *Si le faisceau $\mathscr{L}_\alpha$ est localement libre, alors*

i) *il existe des nombres complexes β_i, $1 \leqq i \leqq n$, tels que*

$$\alpha_i = \sum_{1 \leqq j \leqq n} a_{ij} \beta_j \quad pour \quad 1 \leqq i \leqq k,$$

ii) *le faisceau $\mathscr{L}_\alpha$ est engendré par $x^u \otimes e$ avec $u = \sum_{1 \leqq j \leqq n} \beta_j e_j^*$ et e une section multiforme de L sur $\mathbb{T}^n$.*

Démonstration. Démontrons tout d'abord le lemme lorsque σ est simplicial. Dans ce cas i) est évident ($k = n$), vérifions ii). Soit $(f_1^*, \ldots, f_n^*)$ la $\mathbb{Q}$-base duale de $(f_1, \ldots, f_n)$. Soit e une section multiforme de L sur $\mathbb{T}^n$. Au point générique de chacun des diviseurs D_i le faisceau $\mathscr{L}_\alpha$ est engendré par $t = x^{\sum_{1 \leqq i \leqq n} \alpha_i f_i^*} \otimes e$. (C'est immédiat: pour chaque i, compléter f_i en une $\mathbb{Z}$-base de N.) Par définition même de $\mathscr{L}_\alpha$, t engendre $\mathscr{L}_\alpha$. Le lemme est donc démontré car $u = \sum_{1 \leqq i \leqq n} \alpha_i f_i^*$.

Dans le cas général, soit $K \subset \{1, \ldots, k\}$ une partie à n éléments telle que les f_i, $i \in K$, soient indépendants. Soit $\sigma_K^\vee$ le cône engendré par les f_i, $i \in K$, et σ_K le cône dual. On a un morphisme naturel $\pi_K : X(\sigma_K) \to X(\sigma)$, ainsi qu'un isomorphisme naturel entre $X(\sigma_K) \setminus \bigcup_{i \in K} \pi_K^{-1}(D_i)$ avec le tore $\mathbb{T}^n$. Remarquons que les diviseurs $\pi_K^{-1}(D_i)$, $i \in K$, sont irréductibles. Le cône σ_K étant simplicial de dimension n, on peut appliquer le lemme à $\pi_K^* \mathscr{L}_\alpha$. Soit $u_K = \sum_{1 \leqq j \leqq n} \beta_{j,K} e_j^*$, les $\beta_{j,K}$ étant les solutions du système $\alpha_i = \sum_{1 \leqq j \leqq n} a_{ij} \beta_{j,K}$ pour $i \in K$. Sur $X(\sigma_K)$ le faisceau $\pi_K^* \mathscr{L}_\alpha$ est engendré par $x^{u_K} \otimes e$, avec e une section multiforme de L sur $\mathbb{T}^n$. Comme π_K induit un isomorphisme entre $X(\sigma_K) \setminus \bigcup_{i \in K} \pi_K^{-1}(D_i)$ et $X(\sigma) \setminus \bigcup_{1 \leqq i \leqq k} D_i$, on obtient que sur $\mathbb{T}^n$, $\mathscr{L}_\alpha$ est engendré par $x^{u_K} \otimes e$. Mais $x^{u_K} \otimes e$ se prolonge à $X(\sigma)$ en une section méromorphe de $\mathscr{L}_\alpha$, c'est-à-dire en une section de $\mathscr{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathscr{L}_\alpha$, avec $\mathscr{M}$ le faisceau des fonctions méromorphes sur $X(\sigma)$ (comme $\mathscr{L}_\alpha$ est localement libre on a $j'_*(\mathscr{M} \otimes \mathscr{L}_{\alpha | X(\sigma)_0}) = \mathscr{M} \otimes \mathscr{L}_\alpha$). Soit t un générateur de $\mathscr{L}_\alpha$ sur un voisinage U de l'origine. Sur U on a donc $t = \varphi x^{u_K} \otimes e$ avec φ une fonction méromorphe sur U, qui sur $U \cap \mathbb{T}^n$ est holomorphe et ne s'annule pas. Ceci entraîne que, au voisinage de l'origine, $\mathscr{L}_\alpha$ est engendré par une section de la forme $x^{u_K + m} \otimes e$, avec $m \in M$. Mais le résidu de $\mathscr{L}_\alpha$ le long de D_i pour $i \in K$ est égal à α_i. On a donc $\langle m, f_i \rangle = 0$ pour $i \in K$, d'où l'on déduit $m = 0$. Par conséquent, $\mathscr{L}_\alpha$ est engendré par $x^{u_K} \otimes e$ sur un voisinage de l'origine, et donc aussi sur $X(\sigma)$ tout entier. On a donc $u_K = u_{K'}$ (et par conséquent $\beta_{j,K} = \beta_{j,K'}$) quelles que soient les parties à n éléments K et K' de $\{1, \ldots, k\}$ telles que les f_i, $i \in K$ (resp. $i \in K'$), soient indépendants. Comme pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ il existe un tel K auquel i appartient, on obtient l'énoncé du lemme.

3.4.3. Reprenons les conventions de 3.4.1 en supposant de plus que $\mathscr{L}_\alpha$ est localement libre. Dans ce cas on a $j'_*(\Omega^p_{X_0}(\log D \cap X_0) \otimes \mathscr{L}_{\alpha,0}) = \Omega^p_X(\log D) \otimes \mathscr{L}_\alpha$, et les différentielles $d : \Omega^p_{X_0}(\log(D \cap X_0)) \otimes \mathscr{L}_{\alpha,0} \to \Omega^{p+1}_{X_0}(\log D \cap X_0) \otimes \mathscr{L}_{\alpha,0}$ se prolongent naturellement en des différentielles

$$d : \Omega^p_X(\log D) \otimes \mathscr{L}_\alpha \to \Omega^{p+1}_X(\log D) \otimes \mathscr{L}_\alpha$$

d'où un complexe de De Rham

$$\mathrm{DR}(\mathscr{L}_\alpha) = (\Omega_X^{\cdot}(\log D) \otimes \mathscr{L}_\alpha).$$

Ce complexe admet la description locale suivante.

Lemme 3. 4. 3. *Si $\mathscr{L}_\alpha$ est localement libre, dans un modèle local $(X(\sigma), 0)$ comme en 2. 3. 1 ii), avec σ saillant, et avec les notations de 3. 2. 2 et 3. 4. 2, $(\Omega_X^p(\log D) \otimes \mathscr{L}_\alpha)_0$ s'identifie à l'ensemble des germes de séries convergentes*

$$\sum_{m \in \sigma \cap M} \gamma_m x^m \qquad \textit{avec} \qquad \gamma_m \in \wedge^p(W(m)(\log D)),$$

la différentielle étant donnée sur les monômes par

$$d_\alpha(\gamma_m x^m) = (m+u) \wedge \gamma_m x^m$$

pour $\gamma_m \in \wedge^p(W(m)(\log D))$.

Démonstration. Elle est analogue à celle de [Da 1], p. 110, compte tenu du lemme 3. 4. 2.

3. 5. La proposition qui suit est l'analogue toroïdal d'un énoncé bien connu (cf. [E-V 1], 1. 6 et 1. 7).

Proposition 3. 5. *Soient X une variété toroïdale, D un diviseur toroïdal tel que $U = X \setminus |D|$ soit lisse, L un système local de rang un sur U, j l'inclusion de U dans X, D_i $i \in I$, les composantes irréductibles de D. On suppose qu'aucune des monodromies autour des diviseurs D_i n'agit sur L avec la valeur propre 1. Alors*

i) *on a un quasi isomorphisme: $j_! L \approx Rj_* L$,*

ii) *si $\mathscr{L}_\alpha$ est un faisceau sur X muni d'une connexion intégrable à pôles logarithmiques prolongeant $L \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_U$, et si $\mathscr{L}_\alpha$ est localement libre, alors le complexe $\mathrm{DR}(\mathscr{L}_\alpha)$ est une résolution de $j_! L$.*

Démonstration. Démontrons i). Le problème étant local, on peut supposer $X = X(\sigma)$, $|D| = \bigcup_{\tau \in I} X(\tau)$, $I \subset \mathscr{F}^1(\sigma)$. On peut également supposer que σ est saillant. Il suffit de démontrer l'énoncé à l'origine de $X(\sigma)$. Pour cela, comme $X(\sigma)$ est muni d'une action de $\mathbb{R}_+^\times$ qui préserve les strates (cf. [Da 1], p. 148), il suffit de démontrer que $H^k(X(\sigma) \setminus |D|, L) = 0$ pour tout entier k. La variété $X(\sigma) \setminus |D|$ est le produit d'un tore par une variété torique lisse contractile: $X(\sigma) \setminus |D| = \mathbb{T}^m \times X(\sigma')$. Choisissons une composante irréductible $X(\tau)$ de D. Il lui correspond un vecteur primitif $f(\tau)$ de N. Comme $f(\tau)$ fait partie d'une $\mathbb{Z}$-base de N, on peut compléter l'élément du groupe fondamental de $X(\sigma) \setminus |D|$ associé à $X(\tau)$ en une base de ce groupe fondamental ($\simeq \mathbb{Z}^m$). Comme l'action de la monodromie autour de $X(\tau)$ sur L n'est pas triviale, on a donc $H^k(X(\sigma) \setminus |D|, L) = 0$ pour tout entier k d'après la formule de Künneth.

Pour démontrer ii), il suffit de vérifier que $\mathrm{DR}(\mathscr{L}_\alpha)$ est acyclique en tout point de $|D|$. Le problème étant local, on peut se placer dans la situation du lemme 3. 4. 3 dont on reprend les notations. Remarquons qu'il existe $\lambda \in N$ vérifiant $\langle m+u, \lambda\rangle \neq 0$ pour tout $m \in \sigma \cap M$. En effet, avec les notations de 3. 4. 2, écrivons $u = \sum_{1 \leqq i \leqq n} \beta_i e_i^*$; par hypothèse, l'un au moins des α_i, $1 \leqq i \leqq k$ n'est pas entier, donc, les a_{ij} étant entiers, l'un au moins des β_j, appelons-le β_{j0}, n'est pas entier. Par conséquent, il suffit de prendre $\lambda = \beta_{j0}$.

Considérons

$$h: \bigoplus_{m \in \sigma \cap M} \wedge^p(W(m)(\log D))\, x^m \to \bigoplus_{m \in \sigma \cap M} \wedge^{p-1}(W(m)(\log D))\, x^m$$

l'opérateur de produit intérieur à droite par λ. Comme la restriction de d_α à $\wedge^p(W(m)(\log D))\, x^m \to \wedge^{p+1}(W(m)(\log D))\, x^m$ est donnée par la multiplication à gauche par $(m+u)$ d'après le lemme 2. 6, sur $\wedge^p(W(m)(\log D))x^m$ l'opérateur $d_\alpha \circ h + h \circ d_\alpha$ coïncide avec la multiplication par $\langle m+u, \lambda\rangle$. Comme $\langle m+u, \lambda\rangle \neq 0$, ceci prouve l'acyclicité de $\mathrm{DR}(\mathscr{L}_\alpha)_0$.

3. 6. Formes différentielles multiformes méromorphes.

3. 6. 1. Soient X une variété toroïdale de dimension n et D un diviseur toroïdal tels que $U = X \setminus |D|$ soit lisse. On note D_i, $i \in I$, les composantes irréductibles de D, X_0 la partie lisse de X et j' l'inclusion $j': X_0 \to X$. Soient L un système local sur U et $\omega \in H^0(U, \Omega_U^p \otimes_{\mathbb{C}} L)$ une forme différentielle multiforme sur U. On dit que ω est méromorphe sur X s'il existe un fibré muni d'une connexion intégrable à pôles logarithmiques $\mathscr{L}_{\alpha,0}$ sur X_0 prolongeant $L \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_U$ tel que ω se prolonge en une section de $\Omega_{X_0}^p(\log(D \cap X_0)) \otimes_{\mathcal{O}} \mathscr{L}_{\alpha,0}$ sur X_0.

3. 6. 2. Supposons $p = n$. Soit D_i une composante irréductible de D. Au voisinage d'un point général de D_i, ω s'écrit $\omega = x^{\alpha_i(\omega)} \dfrac{dx}{x} \wedge \varphi \otimes e$, avec $\alpha_i(\omega)$ un nombre complexe, $x = 0$ une équation locale de D_i, φ une forme différentielle holomorphe qui ne s'annule pas et e une section locale multiforme de L. Le nombre complexe $\alpha_i(\omega)$ est indépendant des choix.

A la famille $\alpha(\omega) = (\alpha_i(\omega))$ est associé un fibré $\mathscr{L}_{\alpha(\omega),0}$ sur X_0 (3. 4. 1) et un faisceau $\mathscr{L}_{\alpha(\omega)} = j'_*(\mathscr{L}_{\alpha(\omega),0})$ sur X.

Proposition 3. 6. 2. *Si le diviseur toroïdal D est complet* (2. 3. 1) *et si*

$$\omega \in H^0(U, \Omega_U^n \otimes_{\mathbb{C}} L)$$

ne s'annule pas sur U, alors le faisceau $\mathscr{L}_{\alpha(\omega)}$ est localement libre, et $\mathscr{L}_{\alpha(\omega)}^{-1} = \Omega_X^n(\log D)$.

Démonstration. La forme différentielle ω donne une trivialisation de

$$\Omega_{X_0}^n(\log(D \cap X_0)) \otimes_{\mathcal{O}} \mathscr{L}_{\alpha(\omega),0} \quad \text{sur } X_0.$$

Le prolongement $j'_*(\Omega^n_{X_0}(\log(D \cap X_0)) \otimes_{\mathcal{O}} \mathscr{L}_{\alpha(\omega),0})$ est donc le faisceau trivial. Comme D est complet, $\Omega^n_X(\log D)$ est localement libre (3. 2. 2), ce qui entraîne que

$$j'_*(\Omega^n_{X_0}(\log(D \cap X_0)) \otimes_{\mathcal{O}} \mathscr{L}_{\alpha(\omega),0}) = \Omega^n_X(\log D) \otimes_{\mathcal{O}} \mathscr{L}_{\alpha(\omega)}.$$

Le faisceau $\Omega^n_X(\log D) \otimes_{\mathcal{O}} \mathscr{L}_{\alpha(\omega)}$ étant trivial, on obtient l'énoncé voulu.

3. 7. Dans cette section on démontre un analogue toroïdal d'un résultat d'Esnault et Viehweg [E-V2]. Notre preuve est une transcription de la leur dans le cadre toroïdal.

Rappelons que si X est un ensemble analytique compact irréductible de dimension n, un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur X est dit de dimension Kodaira maximale si sa dimension de Kodaira $\kappa(\mathscr{L})$ est égale à n, et est dit numériquement effectif, si pour tout 1-cycle effectif C sur X, le degré de la restriction de $\mathscr{L}$ à C est positif ou nul. Une conséquence directe de ces définitions est que si $\pi: X' \to X$ est un morphisme birationnel propre et si $\mathscr{L}$ est un faisceau inversible sur X de dimension de Kodaira maximale (resp. numériquement effectif), alors $\pi^* \mathscr{L}$ est de dimension de Kodaira maximale (resp. numériquement effectif).

Théorème 3. 7. *Soient X une variété toroïdale compacte irréductible de dimension n, D un diviseur toroïdal complet sur X, tels que $U = X \setminus |D|$ soit lisse. Supposons que $\Omega^n_X(\log D)$ est un faisceau inversible de dimension de Kodaira maximale et numériquement effectif. Soit L un système local de rang un sur U dont aucune des monodromies autour des composantes irréductibles de D n'est l'identité. Soit $\omega \in \Gamma(U, \Omega^n_U \otimes_{\mathbb{C}} L)$ une forme différentielle multiforme sur U. On suppose que ω est méromorphe sur X et ne s'annule pas sur U. Alors la classe de cohomologie de la forme différentielle ω dans $H^n(U, L)$ est non nulle.*

Démonstration. D'après la proposition 3. 6. 2, le faisceau $\mathscr{L}_{\alpha(\omega)}$ est inversible et $\mathscr{L}^{-1}_{\alpha(\omega)} = \Omega^n_X(\log D)$. Soit $\bar{\pi}: \bar{X} \to X$ une résolution des singularités de X telle que $\bar{\pi}^{-1}(X)$ soit un diviseur à croisements normaux. Comme $\bar{\pi}^* \mathscr{L}^{-1}_{\alpha(\omega)}$ est de dimension de Kodaira maximale et numériquement effectif, il existe d'après ([E-V2], p. 212) une résolution des singularités $\pi: X' \to X$ telle que

i) $(\pi^* \mathscr{L}^{-1}_{\alpha(\omega)})^M = \mathcal{O}_{X'}(D')$ avec D' un diviseur à croisements normaux et M un entier strictement plus grand que les multiplicités des composantes irréductibles de D',

ii) $X' \setminus |D'|$ est affine,

iii) $D' = \pi^* D + D''$, $|\pi^* D|$ et $|D''|$ étant réunion de composantes irréductibles de D'.

D'après le théorème d'annulation (2. 8. 2) de [E-V1] on a

$$H^q(X', \Omega^p_{X'}(\log D') \otimes \pi^* \mathscr{L}_{\alpha(\omega)}) = 0$$

pour $p + q \neq n$. D'après la proposition 3. 5, on a

$$H^n(U, L) = \mathbb{H}^n(X, \Omega^{\cdot}_X(\log D) \otimes \mathscr{L}_{\alpha(\omega)}).$$

Il suffit donc de montrer que l'application naturelle

$$H^0(X, \Omega_X^n(\log D) \otimes \mathcal{L}_{\alpha(\omega)}) \to \mathbb{H}^n(X, \Omega_X^{\cdot}(\log D) \otimes \mathcal{L}_{\alpha(\omega)})$$

est injective, ou encore que l'application

$$\mathbb{H}^{n-1}(X, \Omega_X^{\cdot}(\log D)^{\leqq n-1} \otimes \mathcal{L}_{\alpha(\omega)}) \to H^0(X, \Omega_X^n(\log D) \otimes \mathcal{L}_{\alpha(\omega)})$$

est nulle. Pour cela on remarque que, d'après le lemme 3. 3, on peut munir $\pi^* \mathcal{L}_{\alpha(\omega)}$ d'une connexion intégrable à pôles logarithmiques le long de D' prolongeant celle dont est muni $\mathcal{L}_{\alpha(\omega)}$ et que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^{n-1}(X, \Omega_X^{\cdot}(\log D)^{\leqq n-1} \otimes \mathcal{L}_{\alpha(\omega)}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & H^0(X, \Omega_X^n(\log D) \otimes \mathcal{L}_{\alpha(\omega)}) \arrow[d, "\pi^*"] \\
\mathbb{H}^{n-1}(X', \Omega_{X'}^{\cdot}(\log D')^{\leqq n-1} \otimes \pi^* \mathcal{L}_{\alpha(\omega)}) \arrow[r] & H^0(X', \Omega_{X'}^n(\log D') \otimes \pi^* \mathcal{L}_{\alpha(\omega)}).
\end{tikzcd}$$

Les

$$H^q(X', \Omega_{X'}^p(\log D') \otimes \pi^* \mathcal{L}_{\alpha(\omega)})$$

étant nuls pour $p+q=n-1$, $\mathbb{H}^{n-1}(X', \Omega_{X'}^{\cdot}(\log D')^{\leqq n-1} \otimes \pi^* \mathcal{L}_{\alpha(\omega)})$ est nul d'après la suite spectrale d'hypercohomologie. Comme π^* est injective, ceci entraîne que l'application α est nulle.

3. 8. Remarque. On peut aussi obtenir le théorème 3. 7 comme conséquence directe de [E-V 2] en utilisant (3. 3) et (3. 5). (Remarque du rapporteur.)

4. Racines du polynôme de Bernstein

4. 1. Soit $f:(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction analytique complexe de n variables s'annulant à l'origine. On choisit un représentant de Milnor (que l'on note également f) $f: B \to D$. On écrit $B(t) = B \cap f^{-1}(t)$, et on note $\underline{H}_{n-1}$ le système local sur $D \setminus \{0\}$ de fibre $H_{n-1}(B(t), \mathbb{C})$ en $t \in D \setminus \{0\}$.

4. 2. On reprend les notations de 2. 4. 1. Si F et F' sont deux faces distinctes de codimension 1 du polyèdre de Newton à l'origine de f, on note $\beta(F, F')$ le plus grand commun diviseur des mineurs d'ordre 2 de la matrice $(a(F), a(F'))$; on note

$$\lambda(F, F') = n(F') - \frac{n(F)}{N(F)} N(F') \quad \text{et} \quad \mu(F, F') = \lambda(F, F')\, \beta(F, F')^{-1},$$

si $N(F)$ est non nul (ce qui est le cas si F est une face compacte).

Théorème 4. 2. *Soit f un germe de fonction analytique non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'origine $\Delta(f)$. Soit F_0 une face compacte de codimension 1 de $\Delta(f)$. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées:*

i) $\dfrac{n(F_0)}{N(F_0)}$ *n'est pas entier,*

ii) *pour toute face F de codimension 1 de $\Delta(f)$, distincte de F_0 et dont l'intersection avec F_0 n'est pas vide, on a $\mu(F_0, F) \notin \mathbb{Z}$.*

Alors il existe une section horizontale multiforme $\gamma(t)$ du fibré $\underline{\underline{H}}_{n-1}$ sur $D \backslash \{0\}$ telle que

$$\lim_{t \to 0} t^{1-\frac{n(F_0)}{N(F_0)}} \int_{\gamma(t)} \frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}{df} = C$$

avec C une constante non nulle.

La démonstration de ce résultat occupe les sections 4. 3—4. 5.

4. 3. Soit f vérifiant les hypothèses du théorème 4. 2. On considère la modification torique associée à f (2. 4. 1), $\pi : X(\Delta(f)) \to \mathbb{C}^n$. On note $X_0(\Delta(f)) = \pi^{-1}(B)$, et π la restriction de π à $X_0(\Delta(f))$. On a l'égalité

$$\pi^{-1}(f^{-1}(0)) = \sum_{F \in \mathscr{F}^1(\Delta(f))} X(F) + \tilde{E},$$

avec $\tilde{E}$ l'adhérence de $\pi^{-1}(f^{-1}(0) \backslash H)$ dans $X_0(\Delta(f))$ (2. 4. 1). Le diviseur $\tilde{E}$ est réduit (2. 5).

Fixons une face compacte F_0 de codimension 1 de $\Delta(f)$. On note X la variété torique $X(F_0)$, I' l'ensemble des faces F de $\mathscr{F}^1(\Delta(f))$ distinctes de F_0 qui rencontrent F_0. Si $F \in I'$, on note $D(F)$ le diviseur $X \cap X(F)$. On note $E = X \cap \tilde{E}$. D'après le lemme 2. 5, le diviseur $D = \sum_{F \in I'} D(F) + E$ est un diviseur toroïdal complet dans X. Soit U l'ouvert lisse $U = X \backslash D$. On note $\alpha(F) = \mu(F_0, F)$ si $F \in I'$, et $\alpha(E) = 1 - \dfrac{n(F_0)}{N(F_0)}$. Soit η la forme différentielle multiforme $\eta = \pi^*(f^{1-\frac{n(F_0)}{N(F_0)}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$. Son résidu le long de $\pi^{-1}(f^{-1}(0))$, la forme $\dfrac{\eta}{\pi^*(df)}$, une fois restreinte à U définit une forme différentielle multiforme ω sur U qui ne s'annule pas $\left(\text{bien sûr ceci est dû au choix de l'exposant } 1 - \dfrac{n(F_0)}{N(F_0)}\right)$; pour s'en convaincre, il suffit d'effectuer un calcul en coordonnées locales au voisinage d'un point de U dans $X_0(\Delta(f))$ et de remarquer que $\pi^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$ s'annule le long de U à l'ordre $n(F_0) - 1$ exactement. Notons L le système local de rang 1 sur U, tel que ω soit une section sur U de $\Omega_U^n \otimes_{\mathbb{C}} L$.

Proposition 4. 3. *La forme différentielle multiforme ω est méromorphe sur X (au sens de 3. 6). De plus, avec les notations de 3. 6, on a $\alpha_i(\omega) = \alpha(F)$ (resp. $\alpha(E)$) si $D_i = D(F)$ (resp. E).*

Démonstration. On va démontrer qu'en un point général de $D(F)$,

$$\omega = x^{\alpha(F)} \frac{dx}{x} \wedge \varphi \otimes e$$

avec $x=0$ une équation locale de $D(F)$ dans X, φ une forme différentielle holomorphe qui ne s'annule pas et e une section locale multiforme de L. Pour cela choisissons un cône $\sigma^\vee$ de dimension n appartenant à l'éventail $\Sigma(\Delta(f))$ tel que $a(F_0)$ et $a(F)$ engendrent des faces de dimension 1 de $\sigma^\vee$. Choisissons $n-2$ vecteurs primitifs $a_3, \ldots, a_n$ engendrant des faces de dimension 1 de $\sigma^\vee$ tels que $a_1 = a(F_0)$, $a_2 = a(F)$, $a_3, \ldots, a_n$ soient linéairement indépendants. A ces n vecteurs est associée une application monomiale

$$\lambda: \begin{cases} \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \\ (y_1, \ldots, y_n) \to (x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

définie par

$$x_i = \prod_{1 \leq j \leq n} y_j^{a_{ji}}$$

avec $a_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$.

On note $Y(F_0) = \{y \in \mathbb{C}^n; y_1 = 0\}$, $Y(F) = \{y \in \mathbb{C}^n; y_2 = 0\}$ et $Y = Y(F_0) \cap Y(F)$. Au point général de Y on a

$$\lambda^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = y_1^{n(F_0)-1} y_2^{n(F)-1} \varphi(y), \tag{1}$$

$$f \circ \lambda(y) = y_1^{N(F_0)} y_2^{N(F)} \psi(y) \tag{2}$$

avec φ et ψ ne s'annulant pas.

Soit $\tilde{\eta}$ la forme différentielle multiforme $\tilde{\eta} = \lambda^*(f^{1-\frac{n(F_0)}{N(F_0)}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$. D'après (1) et (2) le résidu de $\tilde{\eta}$ le long de $\lambda^{-1}(f^{-1}(0))$ restreint à $Y(F_0) \setminus Z$, avec Z l'adhérence de $|\lambda^{-1}(f^{-1}(0))| \setminus Y(F_0)$ dans $\mathbb{C}^n$, définit une forme différentielle multiforme $\tilde{\omega}$ sur $Y(F_0) \setminus Z$; de plus, en un point général de Y, on a

$$\tilde{\omega} = y_2^{\lambda(F_0, F)-1} \gamma(y) \otimes e' \tag{3}$$

avec γ holomorphe ne s'annulant pas et e' une section multiforme du système local associé à $\tilde{\omega}$.

L'application $\tau: M \to M$ qui à m associe $\tau(m) = \sum_{1 \leq i \leq n} \langle m, a_i \rangle e_i^*$ envoie $\sigma \cap M$ dans $\mathbb{N}^n$. On en déduit un morphisme $\theta: \mathbb{C}^n \to X(\sigma)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}^n \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[dr, "\lambda"] & \\ X(\sigma) \arrow[rr, "\pi|X(\sigma)"] & & \mathbb{C}^n. \end{tikzcd}$$

Soit σ' un cône saillant de dimension 2, $\sigma' \subset V$ avec $\dim V = 2$. Soient a'_1 et a'_2 les vecteurs primitifs engendrant les faces de dimension 1 du cône dual dans $V^\vee$. Soit $d(\sigma')$ le déterminant de (a'_1, a'_2) dans la base (e_1, e_2) de N.

Soit θ' le morphisme $\mathbb{C}^2 \to X(\sigma')$ associé à

$$\begin{cases} \sigma' \cap M \to \mathbb{N}^2, \\ \qquad m \to \sum\limits_{1 \leqq i \leqq 2} \langle m, a'_i \rangle e_i^*. \end{cases}$$

On a une action de $\mathbb{Z}/d(\sigma')\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}^2$ telle que $\theta' : \mathbb{C}^2 \to X(\sigma')$ soit le morphisme de passage au quotient; θ' est étale de degré $d(\sigma')$ en dehors de l'origine.

Le cône dual du cône engendré par a_1 et a_2 est de la forme $\sigma' \times L$ avec σ' un cône saillant de dimension 2 et L un espace vectoriel. Notons

$$\tilde{\theta} : \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{n-2} \to X(\sigma') \times \mathbb{C}^{n-2}$$

le morphisme produit de $\theta' : \mathbb{C}^2 \to X(\sigma')$ et de l'identité de $\mathbb{C}^{n-2}$ (on identifie $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{n-2}$, avec les coordonnées (y_1, y_2) sur $\mathbb{C}^2$, $(y_3, \ldots, y_n)$ sur $\mathbb{C}^{n-2}$). Remarquons que $\tilde{\theta}$ est un morphisme fini de degré $d(\sigma') = \beta(F_0, F)$, étale en dehors de $\{0\} \times \mathbb{C}^{n-2}$.

Soit p un point de $D(F) \setminus (\bigcup\limits_{F' \neq F} D(F'))$. Le point p appartient à l'image de Y par θ. Choisissons un point q de Y tel que $\theta(q) = p$. On peut trouver des voisinages ouverts V_q de q dans $\mathbb{C}^n$, U_p de p dans $X(\sigma)$, $\tilde{V}_q$ de l'origine dans $\mathbb{C}^n$, $\tilde{U}_p$ de l'origine dans $X(\sigma') \times \mathbb{C}^{n-2}$, des isomorphismes $g' : V_q \to \tilde{V}_q$ et $g : U_p \to \tilde{U}_p$ tels que

— $g'(q) = 0, \quad g(p) = 0;$

— $\theta(V_q) = U_p, \quad \theta(V_q \cap Y(F_0)) = U_p \cap X, \quad \theta(V_q \cap Y(F)) = U_p \cap X(F),$
$\theta^{-1}(U_p \cap X) = V_q \cap Y(F_0), \quad \theta^{-1}(U_p \cap X(F)) = V_q \cap Y(F);$

— $g'(Y(F_0)) = \tilde{V}_q \cap \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n;\, y_1 = 0\};$
$g'(Y(F)) = \tilde{V}_q \cap \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n;\, y_2 = 0\};$

— $\tilde{\theta} \circ g' = g \circ \theta.$

Par conséquent si $x = 0$ est une équation locale de $D(F)$ dans X au point p, la restriction de $x \circ \theta$ à un voisinage de q dans $Y(F_0)$ est de la forme $y_2^{\beta(F_0, F)} \psi$, avec ψ une unité locale. On déduit donc de (3) que, en un point général de $D(F)$, on a $\omega = x^{\alpha(F)} \dfrac{dx}{x} \wedge \varphi \otimes e$ avec φ holomorphe ne s'annulant pas et e une section locale multiforme de L. La démonstration de l'énoncé analogue pour E et $\alpha(E)$ est similaire (et plus simple), ce qui termine la preuve de la proposition.

4. 4. D'après 4. 3, il existe un système local de rang 1 sur U, noté L, de monodromie $\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,\alpha(F))$ (resp. $\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,\alpha(E))$) autour de $D(F)$ (resp. E) et ω est une section méromorphe de $\Omega_U^{n-1}\otimes L$. Supposons maintenant que la face F_0 vérifie les conditions i) et ii) du théorème 4. 2.

Ceci assure qu'aucune des monodromies autour des composantes irréductibles de $X\setminus U$ n'est l'identité. Pour pouvoir appliquer le théorème 3. 7, il nous reste à vérifier que $\Omega_X^{n-1}(\log D)$ est un faisceau inversible de dimension de Kodaira maximale et numériquement effectif. Mais $\Omega_X^{n-1}(\log(D-E))=\Omega_X^{n-1}(\log(\sum_{F\in I'} D(F)))$ est trivial; en effet la forme différentielle $\frac{dx_1}{x_1}\wedge\cdots\wedge\frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}}$ ne s'annule pas sur le tore $\mathbb{T}^{n-1}=X\setminus\bigcup_{F\in I'} D(F)$ et se prolonge à X en une section de $\Omega_X^{n-1}(\log(\sum_{F\in I'} D(F)))$ qui trivialise ce faisceau. On a donc $\Omega_X^{n-1}(\log D)=\mathcal{O}_X(E)$ qui est ample d'après le lemme 2. 4. 3.

En appliquant le théorème 3. 7, on obtient donc que la classe de cohomologie de la forme différentielle ω dans $H^{n-1}(U,L)$ n'est pas nulle.

4. 5. Soient N un entier strictement positif multiple de tous les $N(F)$ non nuls et $F\in\mathscr{F}^1(\Delta(f))$. Soit Y' l'espace obtenu à partir de $X_0(\Delta(f))$ par changement de base $\lambda(\tilde{t})=t^N$

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r] \arrow[d] & X_0(\Delta(f)) \arrow[d, "f\circ\pi"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "\lambda"] & \mathbb{C}. \end{tikzcd}$$

Soit Y la normalisée de Y'. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & X_0(\Delta(f)) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f\circ\pi"] & B \arrow[dl, "f"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "\lambda"] & \mathbb{C}. & \end{tikzcd}$$

Soit f' la fonction de $X\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f'(x,z)=z^n-f(x)$, f' est non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'origine $\Delta(f')$ et Y s'identifie naturellement à la transformée stricte de $f'^{-1}(0)$ dans $X_0(\Delta(f'))$, si $X_0(\Delta(f'))$ est la préimage de $X\times\mathbb{C}$ dans $X(\Delta(f'))$ (cf. [Da 2]).

D'après le lemme 2. 5, Y est une variété toroïdale au voisinage de $g^{-1}(\pi^{-1}(0))$. De plus $\tilde{f}^{-1}(0)$ est un diviseur toroïdal réduit au voisinage de $g^{-1}(\pi^{-1}(0))$. Soit $\tilde{X}$ le diviseur $g^{-1}(X)$, $\tilde{U}=g^{-1}(U)$. On note h la restriction de g à $\tilde{U}$; c'est un revêtement étale $h:\tilde{U}\to U$.

Lemme 4. 5. *La forme différentielle $h^*(\omega)$ est une forme différentielle méromorphe uniforme et définit une classe de cohomologie non nulle dans $H^{n-1}(\tilde{U},\mathbb{C})$.*

Démonstration. Un calcul simple montre que la forme différentielle $h^*(\omega)$ est égale au résidu le long de $\tilde{U}$ de

$$\frac{1}{N}\tilde{f}^{1-N\frac{n(F_0)}{N(F_0)}}(\pi\circ g)^*(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n).$$

La forme différentielle $h^*(\omega)$ est donc méromorphe et uniforme. Ceci montre également que h^*L est le système local constant $\mathbb{C}$ sur $\tilde{U}$. Comme h est un morphisme étale $h^*: H^{n-1}(U, L)\to H^{n-1}(\tilde{U}, h^*L)$ est injectif, ce qui, compte tenu de 4. 4, entraîne le lemme.

D'après le lemme 4. 5 il existe donc un cycle $\tilde{\gamma}\in H_{n-1}(\tilde{U}, \mathbb{C})$ tel que $\int_{\tilde{\gamma}} h^*(\omega)\neq 0$. Comme $\tilde{f}$ est une fibration au voisinage de $\tilde{U}$, il existe une famille continue horizontale de cycles $\tilde{\gamma}(t)$ de $H_{n-1}(\tilde{f}^{-1}(t)\cap\tilde{V}, \mathbb{C})$, pour t petit et $\tilde{V}$ un voisinage convenable de $\tilde{U}$, telle que $\tilde{\gamma}(0)=\tilde{\gamma}$. Cette famille horizontale se descend à $\mathbb{C}^n$ en une famille horizontale multiforme $\gamma(t)$, pour t petit non nul, $\gamma(t)\in H^{n-1}(B(t), \mathbb{C})$, et on a par construction

$$\lim_{t\to 0} t^{1-\frac{n(F_0)}{N(F_0)}}\int_{\gamma(t)}\frac{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n}{df}=C$$

avec C une constante non nulle, ce qui termine la démonstration du théorème 4. 2.

4. 6. Soit $f:(\mathbb{C}^n, 0)\to(\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction analytique s'annulant à l'origine. Rappelons qu'il existe un polynôme non nul $e(s)\in\mathbb{C}[s]$ et un germe d'opérateur différentiel holomorphe dépendant polynomialement de s, $P(s)$, tel que l'on ait la relation

$$P(s)f^{s+1}=e(s)f^s.$$

Par définition, le polynôme de Bernstein (local) de f est le générateur unitaire $b_{f,0}$ de l'idéal des $e\in\mathbb{C}[s]$ qui satisfont cette propriété. L'existence de $b_{f,0}(s)$ a été démontrée par J. Bernstein dans le cas algébrique et par Björk dans le cas général. Remarquons que $b_{f,0}(-1)=0$.

Théorème 4. 6. *Soit f un germe de fonction analytique s'annulant à l'origine et non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'origine $\Delta(f)$. Soit F_0 une face compacte de codimension 1 de $\Delta(f)$. On suppose que F_0 vérifie les conditions suivantes:*

i) $\dfrac{n(F_0)}{N(F_0)}<1$,

ii) *pour toute face F de codimension 1 de $\Delta(f)$, distincte de F_0 et dont l'intersection avec F_0 n'est pas vide, on a $\mu(F_0, F)\notin\mathbb{Z}$.*

Alors $-\dfrac{n(F_0)}{N(F_0)}$ est une racine du polynôme de Bernstein local de f.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 4. 2 et de [M], proposition 3. 3.

5. Fonctions d'Igusa p-adiques

5. 1. Fixons un nombre premier p. Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ d'anneau des entiers R, d'idéal maximal $\mathscr{P}$, de corps résiduel $R/\mathscr{P} = \mathbb{F}_q$ et de clôture algébrique $\bar{K}$. On note $R^\times$ le groupe des unités de R et $\hat{R}$ le groupe des caractères continus de $R^\times$ à valeurs complexes. On fixe une uniformisante π, et pour x dans K on note $v(x)$ la valuation $\mathscr{P}$-adique de x, $|x| = q^{-v(x)}$, $a(x) = x\pi^{-v(x)}$. On note $|dx|$ la mesure de Haar sur K^n de masse totale 1 sur R^n.

5. 2. Soit $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ un polynôme vérifiant $f(0) = 0$. Soit ϕ une fonction à valeurs complexes localement constante à support compact définie sur K^n, χ un caractère appartenant à $\hat{R}$. Par définition, la fonction zêta locale d'Igusa associée à (f, ϕ, χ) est donnée par l'intégrale

$$Z_{\phi,\chi}(s) = \int_{K^n} \phi\chi(a(f))|f|^s|dx|$$

pour $\mathrm{Re}(s) > 0$. D'après J.-I. Igusa [I] cette fonction se prolonge analytiquement en une fonction rationnelle de q^{-s}.

5. 3. Au polynôme f on peut associer un polyèdre de Newton $\Delta(f)$ défini comme en 2. 4. 1. Le polynôme f est dit non dégénéré (resp. absolument non dégénéré) pour $\Delta(f)$, si pour toute face compacte F de $\Delta(f)$ le système $\frac{\partial f_F}{\partial x_i} = 0$, $1 \leqq i \leqq n$, n'a pas de solution dans $(K\setminus\{0\})^n$ (resp. $(\bar{K}\setminus\{0\})^n$). Le résultat suivant est dû à J. Denef [De].

Théorème 5. 3. 1. *Si f est non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'origine, si le support de ϕ est contenu dans un voisinage suffisamment petit de l'origine, les parties réelles des pôles de $Z_{\phi,\chi}$ sont de la forme $-\frac{n(F)}{N(F)}$, avec F une face de codimension 1 de $\Delta(f)$, ou égales à -1.*

Remarque 5. 3. 2. Dans [De] le résultat est seulement énoncé pour $\chi = 1$, mais la démonstration est la même pour χ quelconque.

5. 4. Soit $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$. D'après J. Bernstein, de même qu'en 4. 6, il existe $e(s) \in K[s]$ et $P(s) \in K\left[x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right] \otimes_K K(s)$ tels que $P(s) f^{s+1} = e(s) f^s$. On définit de même le polynôme de Bernstein b_f comme le générateur unitaire de l'idéal des $e \in K(s)$ qui satisfont cette propriété. Si $f(0) = 0$, pour tout plongement $\delta: K \to \mathbb{C}$, f définit un germe de fonction analytique complexe à l'origine f_δ, et par définition $b_{f_\delta,0}$ divise b_f.

5. 5. Le résultat suivant est une conséquence directe des théorèmes 4. 6 et 5. 3. 1.

Théorème 5. 5. 1. *Soit $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ un polynôme vérifiant $f(0) = 0$. Soit $\Delta(f)$ le polyèdre de Newton de f à l'origine. On suppose que f est absolument non dégénéré pour $\Delta(f)$ et que toutes les faces de $\Delta(f)$ non contenues dans des hyperplans de* *coordonnées sont compactes. On suppose que toutes les faces compactes F_0 de $\Delta(f)$ vérifient les conditions suivantes:*

i) $\frac{n(F_0)}{N(F_0)} < 1$,

ii) *pour toute face F de codimension 1 de $\Delta(f)$, distincte de F_0 et dont l'intersection avec F_0 n'est pas vide, on a $\mu(F_0, F) \notin \mathbb{Z}$.*

Alors les parties réelles des pôles de $Z_{\phi,\chi}$, pour tout ϕ à support dans un voisinage suffisamment petit de l'origine, sont des racines du polynôme de Bernstein b_f.

5. 5. 2. Remarques.

5. 5. 2. 1. Si on remplace la condition $\frac{n(F_0)}{N(F_0)} < 1$ par la condition $\frac{n(F_0)}{N(F_0)} \notin \mathbb{N}$, on obtient l'énoncé suivant, à partir des théorèmes 4. 2 et 5. 3. 1: si α est la partie réelle d'un pôle de $Z_{\phi,\chi}$, pour ϕ de support suffisamment petit, alors $\exp(2\sqrt{-1}\,\pi\alpha)$ est une valeur propre de la monodromie locale de $f_{\delta,0}$ à l'origine.

5. 5. 2. 2. Dans [L] on a démontré que si $f \in K[x_1, x_2]$ est un polynôme de deux variables quelconques, alors les parties réelles des pôles de $Z_{\phi,\chi}$ sont toujours des racines du polynôme de Bernstein b_f. (Dans [L] l'énoncé n'est donné que pour $\chi = 1$, mais la preuve est la même pour χ quelconque.)

6. Remarques

6. 1. Soit f un germe de fonction analytique à singularité isolée à l'origine non dégénéré pour son polyèdre de Newton. Soit $\sigma(f)$ la borne supérieure des quotients $-\frac{n(F)}{N(F)}$, F décrivant l'ensemble des faces compactes de codimension 1 de $\Delta(f)$. D'après [E-L], [Sa], [V], [V-K], $\sigma(f)$ est une racine du polynôme de Bernstein local de f. Avec nos notations, cela peut se voir de la manière suivante (si $\sigma(f) > -1$). Pour F_0 tel que $\sigma(f) = -\frac{n(F_0)}{N(F_0)}$, la forme différentielle $h^*(\omega)$ est une forme différentielle à pôles logarithmiques et donc sa classe de cohomologie est non nulle. La difficulté pour F_0 quelconque vient du fait que $h^*(\omega)$ n'étant en général plus à pôles logarithmiques, il faut un autre critère pour obtenir que $h^*(\omega)$ a une classe de cohomologie non nulle. Un tel critère nous est fourni par [E-V 2] et le théorème 3. 7.

6. 2. En général, pour f à singularité isolée, excepté $\sigma(f)$, les racines du polynôme de Bernstein que nous obtenons sont nouvelles; elles ne proviennent pas du spectre calculé dans [Sa], [V-K]. Par exemple si f est le polynôme $x^6 + x^2y^3 + y^5$, d'après le théorème 4. 6, $-\frac{7}{18}$ et $-\frac{2}{5}$ sont des racines du polynôme de Bernstein, mais $\frac{2}{5}$ n'appartient pas au spectre.

6. 3. Dans les théorèmes 4. 2 et 4. 6, la condition ii) est nécessaire, au moins pour les faces qui rencontrent les hyperplans de coordonnées, comme le montre l'exemple

$$x^{15}+y^8+z^5+xy^7+zy^6.$$

6. 4. Dans l'article [B-G-M-M], Briançon, Granger, Maisonobe et Miniconi donnent un algorithme de calcul du polynôme de Bernstein pour les fonctions à singularité isolée non dégénérées pour leur polyèdre de Newton. Dès que $n>2$, il ne semble pas possible de déduire nos résultats des leurs.

6. 5. On peut généraliser le théorème 4. 2 en considérant une forme différentielle monomiale $\prod\limits_{1\leqq i\leqq n} x_i^{p_i}\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$ au lieu de $dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$.

6. 6. Soit $f:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ un germe de fonction analytique et $\pi:X\to(\mathbb{C}^n,0)$ une modification propre avec X lisse. On suppose que π est un isomorphisme en dehors de $\pi^{-1}(f^{-1}(0))$ et que $\pi^{-1}(f^{-1}(0))$ est un diviseur à croisements normaux que l'on écrit $\sum\limits_{i\in I} N_i D_i$, avec D_i irréductible. On note $n_i=1+v_{D_i}(\pi^* dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n)$. Soit D_{i_0} une composante compacte, I_0 l'ensemble des $i\neq i_0$ tels que $D_i\cap D_{i_0}$ n'est pas vide. On suppose que pour tout i appartenant à I_0, $\frac{n_{i_0}}{N_{i_0}}N_i$ n'est pas entier et que le faisceau $\Omega^{n-1}_{D_{i_0}}(\log(D_{i_0}\cap(\bigcup\limits_{i\in I_0} D_i)))$ est de dimension de Kodaira maximale et numériquement effectif.

Par la preuve du théorème 4. 2, on obtient qu'il existe une famille horizontale multiforme de cycles $\gamma(t)$ de $H_{n-1}(X(t),\mathbb{C})$, $t\neq 0$, telle que

$$\lim_{t\to 0} t^{1-\frac{n_{i_0}}{N_{i_0}}}\int_{\gamma(t)}\frac{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n}{df}=C \qquad \text{avec} \qquad C\neq 0.$$

Références

[B-G-M-M] *J. Briançon, M. Granger, Ph. Maisonobe, M. Miniconi*, Polynôme de Bernstein d'une singularité non dégénérée par rapport à son polyèdre de Newton, Prépublication Juillet 1987.

[Da 1] *V. I. Danilov*, The geometry of toric varieties, Russian Math. Surveys **33.2** (1978), 97—154.

[Da 2] *V. I. Danilov*, Newton polyhedra and vanishing cohomology, Funct. Anal. Apl. **13** (1979), 103—115.

[D] *P. Deligne*, Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lect. Notes Math. **163** (1970).

[D-M] *P. Deligne, G. D. Mostow*, Monodromy of hypergeometric functions and non lattice integral monodromy, Publ. Math. I.H.E.S. **63** (1986), 5—89.

[De] *J. Denef*, Poles of p-adic complex powers and Newton polyhedra, Résumé dans groupe d'étude d'analyse ultramétrique **17** (1984/85).

[E-L] *F. Ehlers, K.-C. Lo*, Minimal characteristic exponent of the Gauss-Manin connection of isolated singular point and Newton polyhedron, Math. Ann. **259** (1982), 431—441.

[E-V 1] *H. Esnault, E. Viehweg*, Logarithmic De Rham complexes and vanishing theorems, Invent. Math. **86** (1986), 161—194.

[E-V 2] *H. Esnault, E. Viehweg*, A remark on a non-vanishing Theorem of P. Deligne and G. D. Mostow, J. reine angew. Math. **381** (1987), 211—213.

[I] *J.-I. Igusa*, Lectures on forms of higher degree, Tata Inst. Lect. Notes **59**, Berlin-Heidelberg-New-York 1978.

[L] *F. Loeser*, Fonctions d'Igusa p-adiques et polynômes de Bernstein, Am. J. Math. **110** (1988), 1—22.

[M] *B. Malgrange*, Sur les polynômes de I. N. Bernstein, Séminaire Goulaouic-Schwartz, Exposé **20** (1973—74).

[Sa] *M. Saito*, Exponents and Newton polyhedra of isolated hypersurface singularities, Math. Ann. **281** (1988), 411—417.

[V] *A. N. Varchenko*, Asymptotic Hodge structure in the vanishing cohomology, Math. USSR Izvectija **18** (1982), 469—512.

[V-K] *A. N. Varchenko*, *A. G. Khovanskii*, Asymptotics of integrals over vanishing cycles and the Newton polyedron, Soviet Math. Dokl. **32** (1985), 122—127.

[Vi] *E. Viehweg*, Vanishing theorems, J. reine angew. Math. **335** (1982), 1—8.

Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, Unité de Recherche Associée au CNRS n° D 0169,
F-91128 Palaiseau Cedex

Eingegangen 12. Oktober 1989, in revidierter Fassung 23. Februar 1990