Topology Vol. 29, No. 2, pp. 163–173, 1990.
Printed in Great Britain.

0040-9383/90 \$3.00+.00

LE POLYNÔME D'ALEXANDER D'UNE COURBE PLANE PROJECTIVE

F. LOESER et M. VAQUIÉ

(*Received* 7 *November* 1988)

INTRODUCTION

SOIT C une courbe plane projective de degré d ayant r composantes irréductibles. On s'intéresse au groupe fondamental du complémentaire de C dans $\mathbf{P}^2$. Il est facile à calculer quand il est abélien, ce qui est le cas pour les courbes nodales d'après Zariski, Fulton et Deligne. L'exemple classique, dû à Zariski, des sextiques ayant six points cuspidaux montre qu'en général ce groupe fondamental n'est pas déterminé par le degré de C et ses singularités locales mais peut dépendre de la position des singularités: si les six points cuspidaux sont sur une conique le groupe fondamental est égal au produit libre $\mathbf{Z}/2 * \mathbf{Z}/3$, sinon il est abélien.

Au complémentaire de C et d'une droite générale est associé naturellement un revêtement cyclique infini. On appelle polynôme d'Alexander de C le polynôme d'Alexander Δ_C de ce revêtement cyclique. En général on ne sait pas calculer le groupe fondamental G, aussi est-il intéressant de connaitre Δ_C qui le détermine partiellement; dans l'exemple de Zariski Δ_C est égal à $t^2 - t + 1$ si les six points cuspidaux sont sur une conique et est égal à 1 sinon.

Dans cet article nous donnons une formule pour Δ_C: si α est un nombre rationnel, $-1 < \alpha < 0$, on considère le faisceau $\mathscr{A}_\alpha$ sur $\mathbf{P}^2$ constitué des fonctions holomorphes dont l'exposant de Hodge est strictement plus grand que α. Notre résultat principal est le suivant.

THÉORÈME. *On a*

$$\Delta_C(t) = (t-1)^{r-1} \prod_{\alpha \in A_C} (\Delta_\alpha(t))^{l_\alpha}$$

où A_C *est l'ensemble des rationnels* α *appartenant à* $]-1, 0[$ *tels que* $d\alpha$ *est entier et* α *appartient au spectre d'au moins une singularité locale,* Δ_α *est le polynôme*

$$(t - exp(2\pi i\alpha))(t - exp(-2\pi i\alpha)) \quad et \quad l_\alpha = dim\, H^1(\mathbf{P}^2, \mathscr{A}_\alpha(d(\alpha+1)-3)).$$

Ce résultat nous a été inspiré par la lecture d'un article de Libgober [7] où est énoncé un résultat similaire (avec une formulation différente et des hypothèses plus restrictives sur la courbe et ses singularités).

Pour démontrer ce résultat nous utilisons l'interprétation due à Randell de Δ_C comme le polynôme caractéristique de la monodromie agissant sur le premier groupe de cohomologie de la fibre de Milnor du cône affine sur C. Dans l'article [2] Esnault a étudié en détail la structure de Hodge de cette fibre de Milnor en fonction de certains faisceaux associés au revêtement cyclique de degré d de $\mathbf{P}^2$ ramifié le long de C. Un des principaux ingrédients de notre preuve consiste à utiliser des théorèmes d'annulation pour comparer ces faisceaux aux faisceaux $\mathscr{A}_\alpha$.

Pour conclure, rappelons que l'utilisation du polynôme d'Alexander et de la théorie de Hodge de revêtements cycliques dans l'étude du groupe fondamental du complémentaire des courbes planes remonte déjà aux travaux de Zariski [15, 16].

Notations. Dans tout le texte on considère une courbe plane projective C de degré d, réduite et ayant r composantes irréductibles. La courbe C est définie par une équation homogène $f(x, y, z) = 0$. On lui associe le cône X_0 de $\mathbf{C}^3$ défini par $f(x, y, z) = 0$ et de fibre de Milnor V définie par $f(x, y, z) = 1$.

Si x est un nombre réel on note $[x]$ la partie entière de x.

§I. LE POLYNÔME D'ALEXANDER

I.1. Soit $G = \pi_1(X)$ le groupe fondamental d'un CW complexe fini connexe X.

A tout morphisme surjectif φ: $G \to \mathbf{Z}$ est associé un revêtement cyclique infini $\tilde{X}_\varphi$ de X muni d'une action de $\mathbf{Z}$. Le groupe de cohomologie $H^1(\tilde{X}_\varphi, \mathbf{Q})$ est donc muni d'une structure naturelle de $\mathbf{Q}[t, t^{-1}]$ module.

Le sous module de torsion du $\mathbf{Q}[t, t^{-1}]$ module $H^1(\tilde{X}_\varphi, \mathbf{Q})$ est de la forme

$$\prod_{i=1}^{k} \mathbf{Q}[t, t^{-1}]/\Delta_i(t)\mathbf{Q}[t, t^{-1}]$$

où $\Delta_i(t)$ est un polynôme unitaire non nul.

Définition 1.1. Le polynôme d'Alexander associé à (G, φ) est

$$\Delta_{G,\varphi}(t) = \prod_{i=1}^{k} \Delta_i(t) \qquad [6].$$

I.2. Soit L une droite de $\mathbf{P}^2$ transverse à C, c'est à dire qui rencontre C en d points distincts.

On considère l'ouvert $X = \mathbf{P}^2 \backslash (C \cup L)$ de $\mathbf{P}^2$ et le morphisme φ de $G = \pi_1(X)$ dans $\mathbf{Z}$ égal à $\delta \circ i$ où

$$G = \pi_1(X) \xrightarrow{i} H_1(X) = \mathbf{Z}^r \xrightarrow{\delta} \mathbf{Z}$$

i est le morphisme de Hurewicz et δ le morphisme défini par

$$\delta(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{j=1}^{r} x_j.$$

Définition 1.2. Le polynôme d'Alexander de la courbe projective plane réduite C est

$$\Delta_C(t) = \Delta_{G,\varphi}(t).$$

I.3. Nous utiliserons le résultat suivant.

PROPOSITION 1.3. (Randell). *Le polynôme d'Alexander Δ_C est égal au polynôme caractéristique de la monodromie agissant sur $H^1(V, \mathbf{Q})$.*

Esquissons la démonstration donnée par Randell [10] de ce résultat.

Tout d'abord on remarque que le polynôme caractéristique de la monodromie agissant sur $H^1(V, \mathbf{Q})$ est égal (d'après [9] p. 94) à Δ_{G_0,φ_0} où

$$G_0 = \pi_1(S^5 \backslash S^5 \cap X_0)$$

et

$$\varphi_0 \colon G_0 \to H_1(S^5 \backslash S^5 \cap X_0) \simeq \mathbf{Z}^r \xrightarrow{\delta} \mathbf{Z}$$

S^5 désignant la sphère de centre l'origine et de rayon l'unité dans $\mathbf{C}^3$.

Pour conclure il reste à montrer que (G, φ) et (G_0, φ_0) sont isomorphes. Pour cela on considère le diagramme obtenu en restreignant la fibration de Hopf à $S^5 \backslash S^5 \cap X_0$:

$$1 \to \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^5 \backslash S^5 \cap X_0) \to \pi_1(\mathbf{P}^2 \backslash \mathbf{C}) \to 1$$

et on utilise la présentation explicite de $\pi_1(\mathbf{P}^2 \backslash (C \cup L))$ en fonction de celle de $\pi_1(\mathbf{P}^2 \backslash C)$ pour L transverse.

Remarques. (1) Il est facile de voir que la définition de Δ_C est indépendante de L, pourvu que L soit transverse à C. C'est également une conséquence de la Proposition 1.3.

(2) Dans le cas où $X = P^2 \backslash (C \cup L)$ avec L transverse à C, $H^1(\tilde{X}_\varphi, \mathbf{Q})$ est un $\mathbf{Q}[t, t^{-1}]$ module de torsion d'après la Proposition 1.3.

(3) Si $\pi_1(\mathbf{P}^2 \backslash C)$ est abélien alors $\Delta_C(t) = (t-1)^{r-1}$.

(4) On peut aussi démontrer la Proposition 1.3 en utilisant les théorèmes de Zariski du type Lefschetz [4].

§II. REVÊTEMENTS CYCLIQUES

II.1. Pour calculer le polynôme caractéristique de la monodromie sur $H^1(V, \mathbf{Q})$ nous allons utiliser un revêtement cyclique de $\mathbf{P}^2$ ramifié le long de C et considérer en particulier la situation suivante, introduite par Esnault [2].

Nous considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z & = & Z \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{h}} \\ \bar{Y} & \to & \bar{X} \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{g}} \\ Y & \to & \mathbf{P}^2 \end{array}$$

où $\sigma\colon Y \to \mathbf{P}^2$ est une résolution plongée des singularités de la courbe C dans $\mathbf{P}^2$; $\bar{g}\colon \bar{X} \to \mathbf{P}^2$ est le revêtement cyclique de $\mathbf{P}^2$ ramifié le long de C défini par

$$\bar{X} = \mathrm{Spec}_{\mathbf{P}^2}\left(\bigoplus_{p=0}^{d-1} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-p)\right),$$

la structure de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}$-algèbre de

$$\bigoplus_{p=0}^{d-1} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-p)$$

étant donnée par

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-d) \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2};$$

$\bar{Y}$ est la normalisée du produit fibré $Y \times_{\mathbf{P}^2} \bar{X}$;

$h\colon Z \to \bar{Y}$ est une résolution des singularités de $\bar{Y}$ telle que l'image inverse de C par $\bar{h} \circ \bar{g}$ est un diviseur à croisements normaux Δ.

Soit D le diviseur à croisements normaux $\sigma^{-1}(C)$;

$$D = \sum_{j=1}^{s} m_j E_j + \tilde{C}$$

où $\tilde{C}$ est la normalisée de C et

$$E = \bigcup_{j=1}^{s} E_j$$

le diviseur exceptionnel.

Nous posons $\mathscr{L} = \sigma^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1))$ et pour tout $p = 0, 1, \ldots, d-1$ nous définissons le faisceau inversible $\mathscr{L}^{(p)}$ sur Y par

$$\mathscr{L}^{(p)} = \mathscr{L}^{\otimes p} \otimes \mathcal{O}_Y\left(- \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{pm_j}{d} \right] E_j \right).$$

Proposition 2.1. ([2] Lemmes 1 et 2, p. 479).

(i) $$\bar{Y} = Spec_Y \left(\bigoplus_{p=0}^{d-1} \mathscr{L}^{(p)-1} \right)$$

(ii) *La surface $\bar{Y}$ n'a que des singularités rationnelles.*

Le groupe $\mathrm{Aut}_Y(\bar{Y}) = \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ agit sur le faisceau $g_*\mathcal{O}_{\bar{Y}}$; et un générateur du groupe, fixé dans toute la suite de l'article, définit un endomorphisme semi-simple de ce faisceau. Il existe alors une racine primitive d-ième de l'unité ω telle que le faisceau $\mathscr{L}^{(p)-1}$ soit égal au sous-espace propre de $g_*\mathcal{O}_{\bar{Y}}$ associé à la valeur propre ω^p, pour tout p.

L'image inverse du complémentaire U de C dans $\mathbf{P}^2$ par le morphisme $\bar{g}$ est un ouvert V de $\bar{X}$ et $\bar{h}$ induit un isomorphisme de $Z \setminus \Delta$ sur V. Par définition V est égal à

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 / f(x, y, z) = 1\},$$

c'est à dire s'identifie à la fibre de Milnor de X_0.

Remarque 2.2. L'action du générateur du groupe $\mathrm{Aut}_{\mathbf{P}^2}(\bar{X}) = \mathrm{Aut}_Y(\bar{Y})$ sur l'ouvert $V = \bar{g}^{-1}(U)$ est égale à l'action d'un représentant de la monodromie sur la fibre de Milnor. En effet l'application

$$(x, y, z) \mapsto (\omega x, \omega y, \omega z)$$

induit ces deux actions.

II.2. Le morphisme σ induit un isomorphisme de $Y \setminus D$ sur U et la restriction de $u = g \circ h$ à $Z \setminus \Delta$ est un revêtement cyclique non ramifié de $Y \setminus D$.

Si nous notons $\Omega_Y^i(\log D)$ et $\Omega_Z^i(\log \Delta)$ les faisceaux des i formes différentielles respectivement sur Y et sur Z à pôles logarithmiques le long de D et de Δ, nous avons les relations suivantes pour tout $i \geq 0$.

Proposition 2.3. ([2] Corollaire 4, p. 481).

(i) $u^*(\Omega_Y^i(\log D)) \simeq \Omega_Z^i(\log \Delta)$
(ii) $u_*(\Omega_Z^i(\log \Delta)) \simeq \Omega_Y^i(\log D) \otimes u_*\mathcal{O}_Z$
(iii) $R^q u_*(\Omega_Z^i(\log \Delta)) = 0$ *pour* $q > 0$.

Le groupe $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ agit aussi sur le faisceau $u_*(\Omega_Z^i(\log \Delta))$ et comme $u_*\mathcal{O}_Z$ est isomorphe à

$$g_*\mathcal{O}_{\bar{Y}} = \bigoplus_{p=0}^{d-1} \mathscr{L}^{(p)-1},$$

le sous-espace propre associé à la valeur propre ω^p est isomorphe à

$$\Omega^i_Y(\log D) \otimes \mathscr{L}^{(p)-1}.$$

Grâce à la théorie de Hodge mixte pour une variété régulière [1] on peut calculer les groupes de cohomologie $H^k(V, \mathbf{C})$ de la façon suivante:

$$H^k(V, \mathbf{C}) = \bigoplus_{i+q=k} H^q(Z, \Omega^i_Z(\log \Delta)).$$

Le générateur du groupe $\mathrm{Aut}_Y(\bar{Y})$ induit un endomorphisme e de l'espace $H^1(V, \mathbf{C})$ et nous déduisons de ce qui précède le résultat suivant.

Proposition 2.4. *Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme e de $H^1(V, \mathbf{C})$ est égal à*

$$\Delta(t) = \prod_{p=0}^{d-1} (t - \omega^p)^{h_p}$$

avec $h_p = \dim H^0(Y, \Omega^1_Y(\log D) \otimes \mathscr{L}^{(p)-1}) + \dim H^1(Y, \mathscr{L}^{(p)-1})$.

Démonstration. Les valeurs propres de e sont des racines d-ièmes de l'unité et par construction le sous-espace propre de $H^1(V, \mathbf{C})$ associé à la valeur propre ω^p est

$$H^0(Y, \Omega^1_Y(\log D) \otimes \mathscr{L}^{(p)-1}) \oplus H^1(Y, \mathscr{L}^{(p)-1}).$$

§III. EXPOSANTS

III.1. Nous rappelons ici certains résultats de Varchenko [12, 13].

Soit $f: (\mathbf{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction analytique à singularité isolée, de nombre de Milnor μ.

Si ω est un germe de $n+1$ forme holomorphe à l'origine, on définit le nombre rationnel $\alpha_f(\omega)$ comme le plus petit exposant de t apparaissant dans le développement asymptotique en zéro d'intégrales du type $\int_{\gamma(t)} \omega/df$ avec $\gamma(t)$ un germe de section horizontale multiforme du fibré de Milnor de l'homologie de dimension n.

Ces exposants $\alpha_f(\omega)$ sont liés à la filtration de Hodge dont Varchenko munit la cohomologie de la fibre de Milnor de la façon suivante. Soit H le n-ième groupe de cohomologie à coefficients complexes de la fibre de Milnor, et $H = \oplus H_\lambda$ la décomposition de H en sous-espaces propres généralisés pour l'action de la monodromie. Le spectre $Sp(f)$ de f est la famille de μ nombres rationnels définie ainsi: le nombre rationnel α appartient à $Sp(f)$ avec la multiplicité k si

$$n - p - 1 < \alpha \leq n - p,\ \exp(2i\pi\alpha) = \lambda,\ \dim F^p H_\lambda / F^{p+1} H_\lambda = k,\ 0 \leq p \leq n,$$

$F^{\cdot}$ étant la filtration de Hodge sur H_λ [13].

D'après [13] on a en particulier que l'ensemble des rationnels $\alpha_f(\omega)$ négatifs ou nuls coïncide avec l'ensemble des éléments de $Sp(f)$ négatifs ou nuls.

Soit π: $X \to (\mathbf{C}^{n+1}, 0)$ une modification telle que $\pi^{-1}(f^{-1}(0))$ soit un diviseur à croisements normaux; on écrit

$$\pi^{-1}(f^{-1}(0)) = \sum_{j \in J} m_j E_j$$

avec E_j irréductible.

Pour un germe ω de $n+1$ forme holomorphe on note $v_j(\omega)$ la valuation de $\pi^*(\omega)$ le long de E_j et

$$\beta_f(\omega) = \inf_{j\in J}\left(\frac{1+v_j(\omega)}{m_j} - 1\right).$$

On a le résultat suivant:

THÉORÈME 3.1. ([13] Theorem 4.2, p. 491). *Soit ω un germe de $n+1$ forme holomorphe. Les inégalités $\alpha_f(\omega) \leq 0$ et $\beta_f(\omega) \leq 0$ sont équivalentes, et si elles sont vérifiées alors on a l'égalité*:

$$\alpha_f(\omega) = \beta_f(\omega).$$

Définition. Si φ est un germe de fonction analytique à l'origine et ω_0 un germe de $n+1$ forme holomorphe qui ne s'annule pas à l'origine on pose

$$\lambda_f(\varphi) = \alpha_f(\varphi\omega_0) \text{ et } \mu_f(\varphi) = \inf(\lambda_f(\varphi), 0).$$

Remarques. (1) D'après le Théorème 3.1 $\mu_f(\varphi)$ ne dépend pas du choix de ω_0. (2) Comme $\mu_f(\varphi + \psi') \geq \inf(\mu_f(\varphi), \mu_f(\psi))$, l'ensemble $\mathscr{A}_\alpha$ des germes φ vérifiant $\mu_f(\varphi) > \alpha$ est un idéal pour $\alpha \leqslant 0$.

III.2. Nous allons maintenant expliquer le lien entre les nombres $\mu_f(\varphi)$ et les "exposants de quasi-adjonction" introduits par Libgober. Ceci permettra d'établir que la formule donnée par Libgober dans ([7] Theorem 5.1) est une conséquence du Théorème 4.1.

DÉFINITION-PROPOSITION 3.2 [7]. *Soit f: $(\mathbf{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction analytique à singularité isolée. Pour tout entier $p \geq 2$ on note*

$$f_p\colon (\mathbf{C}^{n+2}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$$

le germe défini par

$$f_p(z_0, z_1, \ldots, z_{n+1}) = f(z_0, \ldots, z_n) - z_{n+1}^p.$$

Soit φ un germe de fonction analytique à l'origine dans $\mathbf{C}^{n+1}$.

On note $\psi(\varphi, p)$ le plus petit entier k tel que le germe $z_{n+1}^k \varphi\ (z_0, \ldots, z_n)$ appartienne à l'idéal d'adjonction de f_p. Il existe un nombre rationnel $\kappa(\varphi)$ tel que, pout tout $p \geq 2$, $\psi(\varphi, p)$ soit égal à $[\kappa(\varphi)p]$.

PROPOSITION 3.3. *Pour tout germe de fonction analytique φ on a l'égalité*

$$\mu_f(\varphi) = -\kappa(\varphi).$$

Démonstration. On va utiliser la description suivante de l'idéal d'adjonction d'un germe de fonction à singularité isolée. Soit g un germe de fonction à singularité isolée à l'origine, (d'après [8], Théorème 2.1, p. 87; [11]) l'idéal d'adjonction de g, noté $\mathscr{C}_g$, est exactement constitué des germes de fonction γ tels que $\lambda_g(\gamma)$ est strictement positif.

On a donc

$$\psi(\varphi, p) = \inf\{k \in \mathbf{N} / \lambda_{f_p}(z_{n+1}^k \varphi) > 0\}.$$

Comme f_p est du "type Thom-Sébastiani" on a (d'après [13], Lemma 7.1, p. 499):

$$\begin{aligned}\lambda_{f_p}(z_{n+1}^k \varphi) &= \lambda_f(\varphi) + \lambda_{z^p}(z^k) + 1 \\ &= \lambda_f(\varphi) + \frac{k+1}{p}\end{aligned}$$

d'où

$$\psi(\varphi, p) = \sup(0, [-\lambda_f(\varphi)p]),$$

ce qui donne le résultat.

§IV. LE THÉORÈME

IV.1. Si (C, x) est un germe de courbe plane défini par la fonction holomorphe g: $(\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ nous notons $\beta_{C,x}$ et $\mu_{C,x}$ les invariants β_g et μ_g définis au paragraphe III (indépendants de l'équation g).

Remarquons, d'après le Théorème 3.1, que pour tout $\alpha \in]-1, 0[$ les inégalités $\beta_{C,x}(\varphi\omega_0) > \alpha$ et $\mu_{C,x}(\varphi) > \alpha$ sont équivalentes.

Pour tout α appartenant à $\mathbf{Q} \cap]-1, 0[$ on considère le sous-faisceau $\mathscr{A}_\alpha$ de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^2}$ constitué des fonctions φ vérifiant $\mu_{C,x}(\varphi) > \alpha$ en tout point singulier x de la courbe C. Les faisceaux $\mathscr{A}_\alpha$ ne dépendent que des singularités de la courbe et de leur position dans le plan.

THÉORÈME 4.1. *Soit C une courbe plane projective réduite de degré d ayant r composantes irréductibles. Le polynôme d'Alexander de C est égal à*

$$\Delta_C(t) = (t-1)^{r-1} \prod_{\alpha \in A_C} \Delta_\alpha^{l_\alpha}$$

où A_C est l'ensemble des rationnels α appartenant au spectre d'une singularité de C, vérifiant $-1 < \alpha < 0$ et tels que $d\alpha$ soit entier,

$$\begin{aligned}\Delta_\alpha &= (t - exp(2\pi i\alpha))(t - exp(-2\pi i\alpha)) \\ l_\alpha &= dim\, H^1(\mathbf{P}^2, \mathscr{A}_\alpha(d(\alpha+1)-3)).\end{aligned}$$

Remarques 4.2. (1) Nous retrouvons ainsi le théorème de Libgober ([7] Theorem 5.1) mais dans un cadre plus général car nous ne faisons aucune hypothèse sur les singularités de la courbe C et nous ne supposons pas qu'elle est irréductible. Nous faisons ainsi apparaître la valeur propre 1 avec la multiplicité $r - 1$.

(2) Kohno a donné dans [5] une formule de nature différente pour le polynôme d'Alexander d'une courbe plane irréductible.

Démonstration du théorème. Nous montrons d'abord que les seules racines du polynôme d'Alexander Δ_C sont les nombres $\exp(2\pi i\alpha)$ avec $\alpha = \frac{p}{d} - 1$, $p = 0, 1, \ldots, d-1$, et qu'elles ont la multiplicité voulue.

D'après la Proposition 1.3 et la Remarque 2.2 c'est une conséquence du résultat suivant.

(4.3) La dimension h_p du sous-espace propre de $H^1(V, \mathbf{C})$ associé à la valeur propre ω^p de l'endomorphisme e est égale à

$$h_p = \dim H^1(\mathbf{P}^2, \mathscr{A}_\alpha(p-3)) + \dim H^1(\mathbf{P}^2, \mathscr{A}_{-1-\alpha}(d-p-3))$$

$$\text{avec} \quad \alpha = \frac{p}{d} - 1, \quad \text{pour} \quad p = 1, \ldots, d-1,$$

$$h_0 = r - 1, \quad \text{pour} \quad p = 0.$$

Nous montrons ensuite que les seuls nombres $\alpha = \frac{p}{d} - 1$, $p = 1, \ldots, d-1$, qui apparaissent vraiment sont des exposants appartenant au spectre d'une singularité de C. Plus précisément nous avons:

(4.4) Si $\alpha = \frac{p}{d} - 1$ n'appartient à aucun des spectres des singularités de la courbe alors $H^1(\mathbf{P}^2, \mathscr{A}_\alpha(p-3)) = 0$.

IV.2. Pour montrer (4.3) nous relions les faisceaux $\mathscr{A}_\alpha$ aux faisceaux $\mathscr{L}^{(p)}$ associés au revêtement cyclique de Y, puis nous calculons les dimensions h_p des sous-espaces propres à partir de la construction du paragraphe II.

Proposition 4.5. *Pour $p = 1, \ldots, d-1$ et $\alpha = \frac{p}{d} - 1$ nous avons:*

$$\dim H^1(\mathbf{P}^2, \mathscr{A}_\alpha(p-3)) = \dim H^1(Y, \mathscr{L}^{(p)-1}).$$

Proposition 4.6. *La dimension h_p du sous-espace propre de $H^1(V, \mathbf{C})$ associé à la valeur propre ω^p de l'endomorphisme e est égale à:*

$$h_p = \dim H^1(Y, \mathscr{L}^{(p)-1}) + \dim H^1(Y, \mathscr{L}^{(d-p)-1})$$

$$\textit{pour} \quad p = 1, \ldots, d-1,$$

$$h_0 = r - 1 \quad \textit{pour} \quad p = 0.$$

Démonstration de la Proposition 4.5. Nous remarquons d'abord que par dualité de Serre les espaces vectoriels $H^1(Y, \mathscr{L}^{(p)-1})$ et $H^1(Y, \mathscr{L}^{(p)} \otimes \omega_Y)$ ont même dimension. Il suffit donc de montrer que les espaces $H^1(\mathbf{P}^2, \mathscr{A}_\alpha(p-3))$ et $H^1(Y, \mathscr{L}^{(p)} \otimes \omega_Y)$ sont isomorphes.

Nous commençons par une étude locale au voisinage d'un point singulier de la courbe C.

Soit $(C, x) \subset (X, x)$ un germe de courbe plane ayant une singularité isolée en x et soit $\sigma: Y \to X$ une résolution plongée de la singularité. Le diviseur exceptionnel $E = \sum_{j=1}^{r} E_j$ est un diviseur à croisements normaux et on note v_j la valuation discrète définie par le diviseur E_j. Nous avons alors

$$\sigma^{-1}(x) = \sum_{j=1}^{r} m_j E_j$$

avec $m_j = v_j(g)$ où g est un élément de $\mathcal{O}_{X,x}$ définissant C.

Le diviseur canonique K_Y sur Y associé au faisceau dualisant $\omega_Y = \Omega_Y^2$ est à support exceptionnel:

$$K_Y = \sum_{j=1}^{r} k_j E_j$$

avec $k_j = v_j(\omega_0)$ où ω_0 est un générateur du faisceau dualisant sur X.

Pour tout diviseur à support exceptionnel $D = \sum_{j=1}^{r} a_j E_j$, $a_j \in \mathbf{Z}$, le faisceau $\sigma_*(\mathcal{O}_Y(-D))$ est égal au sous-faisceau de $\mathcal{O}_X$ formé des fonctions φ vérifiant $v_j(\varphi) \geq a_j$. Remarquons que si $a_j \leq 0$ alors la condition $v_j(\varphi) \geq a_j$ est toujours vérifiée pour φ dans $\mathcal{O}_X$.

Soit $\alpha \in \mathbf{Q} \cap]-1, 0[$ et φ un germe de fonction holomorphe sur X au voisinage du point singulier x, alors l'inégalité $\mu_{C,x}(\varphi) > \alpha$ est équivalente aux inégalités

$$\forall j = 1, \ldots, r \quad v_j(\varphi) \geq [(\alpha + 1)m_j] - k_j.$$

Ainsi localement au voisinage d'un point singulier x de C nous avons l'isomorphisme

$$\mathscr{A}_\alpha = \{\varphi/\mu_{C,x}(\varphi) > \alpha\} \simeq \sigma_*\left(\mathcal{O}_Y\left(\sum_{j=1}^{r} (k_j - [(\alpha + 1)m_j])E_j\right)\right)$$

où $E_1 \cup \ldots \cup E_r$ est le diviseur exceptionnel au-dessus de x.

Cet isomorphisme se globalise et nous trouvons l'isomorphisme de faisceaux sur $\mathbf{P}^2$:

$$\mathscr{A}_\alpha \simeq \sigma_*\left(\mathcal{O}_Y\left(\sum_{j=1}^{s} (k_j - [(\alpha + 1)m_j])E_j\right)\right)$$

où $E_1 \cup \ldots \cup E_s$ est le diviseur exceptionnel de σ: $Y \to \mathbf{P}^2$.

Si $\alpha = \frac{p}{d} - 1$ avec $1 \leq p \leq d - 1$, le faisceau $\mathscr{L}^{(p)} \otimes \omega_Y$ est isomorphe à

$$\sigma^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(p)) \otimes \mathcal{O}_Y\left(-\sum_{j=1}^{s} [(\alpha + 1)m_j]E_j\right) \otimes \sigma^*(\omega_{\mathbf{P}^2}) \otimes \mathcal{O}_Y\left(\sum_{j=1}^{s} k_j E_j\right)$$

d'où l'isomorphisme

$$\mathscr{A}_\alpha(p - 3) \simeq \sigma_*(\mathscr{L}^{(p)} \otimes \omega_Y).$$

La proposition est alors une conséquence du résultat suivant.

LEMME 4.7. *$R^q\sigma_*(\mathscr{L}^{(p)} \otimes \omega_Y) = 0$ pour $p = 1, \ldots, d - 1$ et $q > 0$.*

C'est un cas particulier des théorèmes d'annulation de Viehweg ([14] Proposition 2.3).

Démonstration de la Proposition 4.6. Considérons la suite exacte de faisceaux sur Z

$$0 \to \Omega_Z^1 \to \Omega_Z^1(\log \Delta) \to \mathcal{O}_{\bar{\Delta}} \to 0$$

où $\bar{\Delta} \to \Delta$ est la normalisée du diviseur Δ.

Nous en déduisons l'inclusion

$$H^0(Z, \Omega_Z^1) \subset H^0(Z, \Omega_Z^1(\log \Delta))$$

et si nous notons $H^0(Z, \Omega_Z^1)_{\omega^p}$ et $H^0(Z, \Omega_Z^1(\log \Delta))_{\omega^p}$ les sous-espaces propres respectifs pour la valeur propre ω^p de l'endomorphisme défini par le générateur de $\mathrm{Aut}_Y(\bar{Y})$ nous avons les inclusions

$$H^0(Z, \Omega_Z^1)_{\omega^p} \subset H^0(Z, \Omega_Z^1(\log \Delta))_{\omega^p} \simeq H^0(Y, \Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathscr{L}^{(p)-1}).$$

Comme Z est une variété projective régulière nous avons une structure de Hodge pure sur $H^1(Z, \mathbf{C})$, en particulier nous avons $\overline{H^0(Z, \Omega_Z^1)} = H^1(Z, \mathcal{O}_Z)$ où $^-$ désigne la conjugaison complexe.

Si nous regardons la décomposition en sous-espaces propres nous avons:

$$\overline{H^0(Z, \Omega_Z^1)_{\omega^p}} = H^1(Z, \mathcal{O}_Z)_{\omega^{d-p}} \simeq H^1(Y, \mathcal{L}^{(d-p)-1}).$$

Nous en déduisons les inégalités

$$\dim H^1(Y, \mathcal{L}^{(d-p)-1}) \leq \dim H^0(Y, \Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(p)-1})$$

pour $p = 0, 1, \ldots, d-1$, où nous notons $\mathcal{L}^{(d)} = \mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{O}_Y$.

La proposition est alors une conséquence de la Proposition 2.4 et du résultat suivant.

LEMME 4.8. (i) *$\dim H^1(Y, \mathcal{L}^{(d-p)-1}) = \dim H^0(Y, \Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(p)-1})$ pour $p = 1, \ldots, d-1$.*

(ii) *$\dim H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ et $\dim H^0(Y, \Omega_Y^1(\log D)) = r-1$.*

Démonstration du Lemme 4.8. (i) C'est une conséquence des inégalités précédentes et de l'égalité

$$\sum_{p=1}^{d-1} \dim H^1(Y, \mathcal{L}^{(p)-1}) = \sum_{p=1}^{d-1} \dim H^0(Y, \Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{L}^{(p)-1})$$

([2], Lemme 7, p. 485).

(ii) Comme Y est birationnellement équivalent à $\mathbf{P}^2$, $H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$ est nul. L'égalité $\dim \mathrm{H}^0(Y, \Omega_Y^1(\log D)) = r-1$ est démontrée dans [2]: démonstration du Théorème 6, p. 483.

IV.3. Pour démontrer (4.4) nous allons utiliser une idée de Esnault et Viehweg ([3] Remark 1, p. 171).

Soit $\alpha = \dfrac{p}{d} - 1$ avec $p = 1, \ldots, d-1$.

Si α n'est pas un exposant, pour toute fonction φ et pour tout point singulier x de C nous avons $\mu_{C,x}(\varphi) \neq \alpha$. Par conséquent pour $\lambda > 0$ suffisamment petit les faisceaux $\mathcal{A}_\alpha$ et $\mathcal{A}_{\alpha-\lambda}$ sont égaux.

Nous choisissons un tel λ et nous définissons le faisceau

$$\mathcal{L}'^{(p)} = \mathcal{L}^{\otimes p} \otimes \mathcal{O}_Y\left(-\sum_{j=1}^{s}\left[\frac{m_j p}{d} - \lambda m_j\right] E_j\right).$$

D'après la démonstration de la Proposition 4.5 nous avons

$$\mathcal{A}_{\alpha-\lambda}(p-3) \simeq \sigma_*(\mathcal{L}'^{(p)} \otimes \omega_Y).$$

Remarquons que si λ est choisi suffisamment petit alors pour tout $j = 1, \ldots, s$ nous avons

$$\left[\frac{m_j p}{d} - \lambda m_j\right] + \left[-\frac{m_j p}{d}\right] = -1.$$

Le faisceau $\mathcal{L}'^{(p)} \otimes \mathcal{L}^{(d-p)}$ est donc égal au faisceau

$$\mathcal{L}^{\otimes d} \otimes \mathcal{O}_Y\left(\sum_{j=1}^{s} (1 - m_j) E_j\right),$$

c'est à dire est isomorphe à $\mathcal{O}_Y(D_{\mathrm{red}})$ où

$$D_{\mathrm{red}} = \tilde{C} + \sum_{j=1}^{s} E_j.$$

Le groupe $H^1(Y, \mathcal{L}'^{(p)} \otimes \omega_Y)$, égal d'après ce qui précède à

$$H^1(Y, \mathcal{L}^{(d-p)-1} \otimes \Omega_Y^2(\log D)),$$

est un facteur direct de $H^3(U, \mathbf{C})$ (d'après II.2). Mais comme U est un ouvert affine de dimension 2 le groupe $H^3(U, \mathbf{C})$ est nul.

De la suite spectrale de Leray nous déduisons une injection

$$H^1(\mathbf{P}^2, \mathcal{A}_\alpha(p-3)) \simeq H^1(\mathbf{P}^2, \sigma_*(\mathcal{L}'^{(p)} \otimes \omega_Y)) \to H^1(Y, \mathcal{L}'^{(p)} \otimes \omega_Y),$$

d'où

$$H^1(\mathbf{P}^2, \mathcal{A}_\alpha(p-3)) = 0.$$

RÉFÉRENCES

1. P. Deligne: Théorie de Hodge II. *Publ. Math. I.H.E.S.* **40** (1971), 5–58.
2. H. Esnault: Fibre de Milnor d'un cône sur une courbe plane singulière. *Invent. Math.* **68** (1982), 477–496.
3. H. Esnault et E. Viehweg: Logarithmic De Rham complexes and vanishing theorems. *Invent. Math.* **86** (1986), 161–194.
4. H. A. Hamm et D. T. Lê: Un théorème de Zariski du type Lefschetz. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* **4** (1973), 317–366.
5. T. Kohno: An algebraic computation of the Alexander polynomial of a plane algebraic curve. *Proc. Japan. Acad. Ser. A* **59** (1983), 94–97.
6. A. Libgober: Alexander polynomial of plane algebraic curves and cyclic multiple planes. *Duke Math. J.* **49** (1982), 833–851.
7. A. Libgober: Alexander invariants of plane algebraic curves. *Proc. Symp. Pure Math.* **40**, Part 2 (1983), 135–143.
8. F. Loeser: Quelques conséquences locales de la théorie de Hodge. *Ann. Inst. Fourier* **35** (1985), 75–92.
9. J. Milnor: Singular points of complex hypersurfaces. *Ann. Math. Studies* 61. Princeton Univ. Press (1968).
10. R. Randell: Milnor fibers and Alexander polynomials of plane curves. *Proc. Symp. Pure Math.* **40**, Part 2 (1983), 415–419.
11. D. van Straten et J. Steenbrink: Extendability of holomorphic differential forms near isolated hypersurface singularities. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **55** (1985), 97–110.
12. A. Varchenko: The asymptotics of holomorphic forms determine a mixed Hodge structure. *Soviet Math. Dokl.* **22** (1980), 772–775.
13. A. Varchenko: Asymptotic Hodge structure in the vanishing cohomology. *Math. U.S.S.R. Ivz.* **18** (1982), 469–512.
14. E. Viehweg: Vanishing theorems. *J. Reine Angew. Math.* **335** (1982), 1–8.
15. O. Zariski: On the linear connection index of the algebraic surfaces $z^n = f(x, y)$. *Proc. Natn. Acad. Sci.* **15** (1929), 494–501.
16. O. Zariski: On the irregularity of cyclic multiple planes. *Ann. Math.* **32** (1931), 485–511.

Centre de Mathématiques,
Ecole Polytechnique,
F 91128, Palaiseau, France

Département de Mathématiques et
Informatique, Ecole Normale Supérieure,
45 rue d'Ulm, F 75230 Paris Cédex 05,
France