

FONCTIONS D'IGUSA p -ADIQUES ET POLYNOMES DE BERNSTEIN

Par F. LOESER

Introduction. Soit K une extension finie de \mathbf{Q}_p , d'anneau des entiers R , d'idéal maximal P , de corps résiduel \mathbf{F}_q . Soit f un polynôme de n variables à coefficients dans K vérifiant $f(0) = 0$. La fonction zêta locale d'Igusa décrit les pôles de la série de Poincaré

$$P(T) = \sum_{i=0}^{\infty} N_i(q^{-n}T)^i,$$

N_i étant le nombre de solutions de l'équation $f = 0$ dans l'anneau R/P^iR . Plus précisément Igusa a utilisé l'égalité

$$I(S) = \int_{R^n} |f(x)|^S |dx| = P(q^{-S}) - q^S(P(q^{-S}) - 1)$$

valide pour $\operatorname{Re}(S) > 0$ pour montrer que P est une fonction rationnelle de T ([I1]).

Au début des années 1970 également, I. Bernstein a étudié le système différentiel associé à l'expression formelle f^S et a introduit à cette occasion le polynôme qui porte son nom ([B]). Ce polynôme b vérifie en particulier une équation du type

$$(*) \quad Qf^{S+1} = b(S)f^S$$

avec Q un opérateur différentiel polynomial à coefficients polynomiaux en S .

Le résultat principal du présent travail est le suivant (énoncé sous une forme légèrement affaiblie) :

Manuscript received 2 October 1986.
American Journal of Mathematics 109 (1987), 1-22.

THÉORÈME. *Si f est un polynôme à deux variables, alors les parties réelles des pôles de $I(S)$ sont des racines du polynôme de Bernstein de f . Si de plus f est réduit, ce résultat est vrai en tenant compte des multiplicités.*

L'analogie complexe de ce résultat est immédiat : en effet en utilisant (*), si f est un polynôme à coefficients complexes, il est facile de voir que les pôles du courant $|f|^{2S}$ sont des racines du polynôme de Bernstein de f (pour une réciproque, voir [L]). Dans le cas p -adique, comme la fonction $|f(x)|$ est localement constante en dehors de son lieu d'annulation, lui appliquer l'opérateur P est peu efficace.

Pour montrer le théorème, on utilise que les parties réelles des pôles de $I(S)$ sont égales à certains quotients $-n_i/N_i$ calculés sur des composantes D_i du diviseur exceptionnel de la résolution plongée canonique de $f = 0$.

L. Strauss ([Str]) a montré dans le cas localement irréductible que seuls les diviseurs D_i qui rencontrent au moins trois autres diviseurs (les diviseurs de rupture) et ceux de la transformée stricte contribuent aux pôles de I . Le cas général (non irréductible) étant similaire, le problème est essentiellement de montrer que si D_i est un diviseur de rupture, $-n_i/N_i$ est une racine de b . C'est ce que nous montrons dans la 3ème partie dans le cas complexe. Ce résultat est facile modulo un : en effet si D_i est une composante de rupture il est bien connu que $\exp(2i\pi(n_i/N_i))$ est une valeur propre de la monodromie locale ([A-C], [E-N], [St]), et d'après les travaux de Malgrange ([M 1-2-3]) ceci entraîne que $-n_i/N_i$ ou $-n_i/N_i - 1$ est une racine de b . D'autre part des exemples de Yano ([Y]) montrent que certaines racines de b , contrairement aux $-n_i/N_i$ peuvent varier dans une déformation à μ constant de f et donc ne dépendent pas uniquement de la combinatoire de la résolution de f . Signalons que en général les $-1 + n_i/N_i$ calculés aux diviseurs de rupture ne sont pas des exposants du système de Gauss-Manin, c'est-à-dire ne sont pas des exposants apparaissant au premier ordre dans ce système. En fait ils apparaissent tous dans le développement asymptotique associé à l'image d'une forme de jauge $dx_1 \wedge dx_2$ dans le système de Gauss-Manin.

Pour montrer que $-n_i/N_i$ associé à un diviseur de rupture est une racine de b , notre méthode est transcendante et s'appuie sur la construction de certains cycles évanescents. Pour cela il nous faut montrer que la classe de cohomologie d'une certaine forme différentielle multiforme est non nulle. Nous utilisons à cet effet un résultat de Deligne-Mostow que nous rappelons dans la première partie et qu'une étude combinatoire me-

née dans la seconde partie nous permet d'appliquer. Nous en déduisons les conséquences relatives au polynôme de Bernstein et aux fonctions d'Igusa p -adiques dans les deux dernières parties.

Nous avons bénéficié largement des travaux antérieurs sur les fonctions d'Igusa des courbes localement irréductibles ([I2], [Li1], [Li2], [Me], [Str]), dont nous généralisons certains des résultats, et en particulier de la présentation simplifiée donnée par Igusa dans [I2] des travaux de Lichtin et Meuser.

Pour conclure, signalons qu'en utilisant notre travail antérieur [L] nous obtenons également le résultat suivant (voir IV.2.2) : les parties réelles des pôles des fonctions d'Igusa p -adiques des polynômes à deux variables sont toujours des pôles des fonctions d'Igusa complexes vues comme courants.

I. Formes différentielles multiformes sur $\mathbf{P}^1 - \{x_1, \dots, x_r\}$. Nous rappelons ici des résultats du paragraphe 2 de [D-M].

I.1. Soient x_1, \dots, x_r r points distincts de $\mathbf{P}_\mathbb{C}^1$, $r \geq 1$, $S = \cup_{1 \leq i \leq r} \{x_i\}$, et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ r nombres complexes vérifiant $\prod_{1 \leq i \leq r} \alpha_i = 1$. On note $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\mathbb{C}^1$.

On sait qu'il existe alors un unique (à isomorphisme non canonique près) système local de rang un L sur $\mathbf{P} \setminus S$ dont la monodromie autour de x_i est la multiplication par α_i .

Soit z une coordonnée locale au voisinage de x_i de S , et μ_i un nombre complexe vérifiant $\alpha_i = \exp(2i\pi\mu_i)$. Toute section ω de $\Omega^1(L)$ (resp. $\mathcal{O}(L)$) sur un petit voisinage épointé de x_i s'écrit $\omega = z^{-\mu_i} s f dz$ (resp. $z^{-\mu_i} s f$) avec s une section de L et f une fonction holomorphe sur le voisinage épointé. Si f est méromorphe en x_i on dit que ω est méromorphe et on définit $v_{x_i}(\omega) = v_{x_i}(f) - \mu_i$. On note $j : \mathbf{P} \setminus S \rightarrow \mathbf{P}$ l'inclusion et $j_*^m \Omega^*(L)$ le complexe de faisceaux des formes différentielles méromorphes à coefficients dans L . On note $\Omega^k(\sum_{i=1}^r \mu_i x_i)(L)$ le sous-faisceau de $j_*^m \Omega^k(L)$ constitué des formes méromorphes ω satisfaisant $v_{x_i}(\omega) \geq -\mu_i$ pour $1 \leq i \leq r$.

I.2. Rappelons maintenant comment le complexe des sections globales de $j_*^m \Omega^*(L)$ permet de calculer la cohomologie de $\mathbf{P} \setminus S$ à coefficients dans L :

Tout d'abord comme $\mathbf{P} \setminus S$ est Stein, on a $H^q(\mathbf{P} \setminus S, \Omega^p(L)) = 0$ pour $q > 0$ et donc $H^*(\mathbf{P} \setminus S, L) \cong H^*\Gamma(\mathbf{P} \setminus S, \Omega^*(L))$.

D'autre part on a un quasi-isomorphisme classique

$$j_*^m \Omega^*(L) \simeq j_* \Omega^*(L),$$

et comme $H^q(\mathbf{P}, j_*^m \Omega^p(L)) = 0$ si $q > 0$ (car $j_*^m \Omega^p(L)$ est limite inductive de fibrés en droites dont le degré tend vers l'infini), on obtient :

$$H^*(\mathbf{P} \setminus S, L) \cong H^*(\Gamma(\mathbf{P}, j_*^m \Omega^*(L))).$$

I.3. Soit ω une section globale de $j_*^m \Omega^1(L)$. Soit S' le lieu des zéros de ω . Choisissons une coordonnée z sur \mathbf{P} telle que $\infty \notin S \cup S'$. On peut alors écrire :

$$\omega = \prod_{x_i \in S} (z - x_i)^{-\mu_i} \prod_{y_j \in S' \setminus S} (z - y_j)^{\gamma_j} e dz$$

avec $\exp(2i\pi\mu_i) = \alpha_i$, $\gamma_j \in \mathbf{N}$ et e une section globale multiforme inversible de L sur $\mathbf{P} \setminus S$. On a

$$\sum_{1 \leq i \leq r} \mu_i = 2 + \sum_{y_j \in S' \setminus S} \gamma_j$$

car ω n'a ni zéro ni pôle en ∞ , et donc

$$\sum_{1 \leq i \leq r} \mu_i \geq 2$$

avec égalité si et seulement si ω ne s'annule pas sur $\mathbf{P} \setminus S$. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat suivant dû à Deligne et Mostow :

PROPOSITION I.3. *Supposons que $r \geq 3$, $\alpha_i \neq 1$ pour $1 \leq i \leq r$ et $\sum_{i=1}^r \mu_i = 2$ avec $\exp(2i\pi\mu_i) = \alpha_i$.*

Toute section de $\Gamma(\mathbf{P}, \Omega^1(\sum_{i=1}^r \mu_i x_i)(L))$, définit une classe de cohomologie non nulle dans $H^1(\mathbf{P} \setminus S, L)$.

Démonstration. D'après I.2, il suffit de montrer que la relation $\omega = df$ avec $\omega \in \Gamma(\mathbf{P}, \Omega^1(\sum_{i=1}^r \mu_i x_i)(L))$ et $f \in \Gamma(\mathbf{P}, j_*^m \Theta(L))$ est impossible.

Pour cela on remarque que si une telle relation était vérifiée, on aurait pour tout x de \mathbf{P} $v_x(\omega) \geq v_x(f) - 1$, avec égalité à moins que $v_x(f) = 0$ ou $v_x(\omega) \in \mathbf{N}$. Quand $x \in S$, ceci est exclu car les α_i sont distincts de 1, et on a donc $v_{x_i}(f) = 1 - \mu_i$.

Mais alors f serait une section globale de $\Theta(-\sum_{1 \leq i \leq r} (1 - \mu_i)x_i)(L)$, ce qui est impossible pour des raisons de degré : en effet soit z une coor-

donnée sur \mathbf{P} telle que $\infty \notin S$. On aurait alors $f = \prod_{i=1}^r (x - x_i)^{-\mu_i+1} s$ avec s une section globale multiforme de L , et comme f n'a pas de pôle en ∞ , on aurait $\sum_{i=1}^r (\mu_i - 1) \geq 0$, ce qui contredit $\sum_{i=1}^r (\mu_i - 1) = 2 - r < 0$.

II. Courbes réductibles.

II.1. Soit $f : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction analytique. Le germe de courbe défini par $f = 0$ admet une résolution plongée canonique, $\pi : X \rightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$.

Rappelons que π est composé d'éclatements ponctuels et que $\pi^{-1}(|f^{-1}(0)|) = \cup_{1 \leq i \leq d} D_i$ est un diviseur à croisements normaux. Nous renvoyons à [M-W] pour une description agréable de cette résolution. A la résolution π est associé un arbre $A(\pi)$ de sommets $A_i, 1 \leq i \leq d$, deux sommets A_i et A_j étant connectés par un segment si $D_i \cap D_j \neq \emptyset$. On note $A'(\pi)$ le sous-arbre dont les sommets correspondent aux diviseurs qui ne sont pas des composantes irréductibles de la transformée stricte de $f = 0$. On note M_i le nombre minimal d'éclatements ponctuels nécessaires pour obtenir D_i . Remarquons que l'application $i \rightarrow M_i$ n'est pas injective en général. On note $S(i) \subset \{1, \dots, d\}$ l'ensemble des indices des sommets adjacents à $A_i : j \in S(i)$ si et seulement si $D_i \cap D_j \neq \emptyset$.

Définition II.1. On dit que A_i (resp. D_i) est un sommet (resp. composante) de rupture si $\#S(i) \geq 3$. On note $R \subset \{1, \dots, d\}$ l'ensemble des indices des points de rupture.

II.2. Soit $\varphi : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction analytique tel que $|\pi^{-1}(\varphi^{-1}(0))| \subset \cup_{1 \leq i \leq d} D_i$. On note $N_i(\varphi) = v_{D_i}(\pi^*\varphi), N_i = N_i(f), n_i = v_{D_i}(\pi^*dx dy) + 1, (x, y)$ étant les coordonnées standard sur \mathbf{C}^2 .

On a la généralisation suivante d'un lemme de J. Igusa :

LEMME II.2. Soit A_i un sommet de $A'(\pi)$ et A_{j_1}, \dots, A_{j_r} les sommets adjacents à A_i , les indices étant choisis de telle sorte que l'on ait :

$$M_{j_1} \leq M_{j_2} \leq \dots \leq M_{j_{k-r}} < M_i < M_{j_k} \leq \dots \leq M_{j_r}.$$

Soit $\rho = 1 + \sum_{\ell=k}^r (M_{j_\ell} - M_i)$, on a, sous les hypothèses précédentes :

- i) $\rho N_i(\varphi) = \sum_{1 \leq \ell \leq r} N_{j_\ell}(\varphi)$
- ii) $\rho n_i = \sum_{1 \leq \ell \leq r} n_{j_\ell} - (r - 2)$.

Démonstration. La démonstration est analogue à celle indiquée par J. Igusa dans le cas où f est irréductible dans [I2] (lemmes 1 et 2).

II.3. Soit A_i un sommet de $A(\pi)$. On pose

$$\lambda(i, j)(\varphi) = n_j - \frac{n_i}{N_i(\varphi)} N_j(\varphi)$$

et

$$\lambda(i, j) = \lambda(i, j)(f), \quad \text{pour } j \in S(i).$$

Remarquons que si A_i est un sommet de $A'(\pi)$, $\sum_{j \in S(i)} \lambda(i, j) = \#S(i) - 2$ d'après le lemme II.2. Nous aurons besoin du résultat suivant concernant $\lambda(i, j)$:

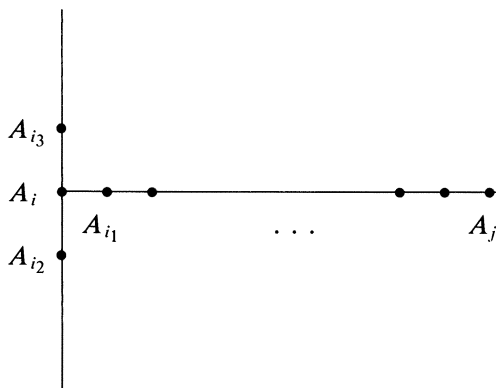
PROPOSITION II.3.1. *Soit A_i un sommet de $A'(\pi)$. Alors, sous les hypothèses précédentes, on a*

$$|\lambda(i, j)| < 1 \quad \text{pour } j \text{ dans } S(i), \quad \text{si } S(i) > 1.$$

Démonstration. On va commencer par supposer que f est irréductible et on va rappeler la démonstration de J. Igusa [I2] dans ce cas.

1er cas. A_i est un sommet de rupture.

On écrit $S(i) = \{i_1, i_2, i_3\}$ et on note A_j l'extrémité de l'arc partant de A_i et ne rencontrant aucun sommet de rupture, ni aucun sommet correspondant à la transformée stricte et au premier diviseur.



En appliquant le lemme II.2 on obtient :

$$\det \begin{pmatrix} n_{i_1} & n_i \\ N_{i_1} & N_i \end{pmatrix} = \cdots = \det \begin{pmatrix} 1 & n_j \\ 0 & N_j \end{pmatrix} = N_j$$

d'où $\lambda(i, i_1) = N_j/N < 1$. D'autre part, il est facile de vérifier que

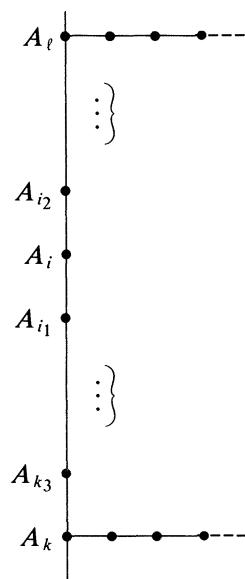
$$n_{i_1} + n_{i_2} = n_i \quad \text{et} \quad N_{i_1} + N_{i_2} + m_i = N_i$$

où m_i est la mutiplicité de la transformée stricte de $f = 0$ après $M_i - 1$ éclatements (cf. [I2], [M-W]). On a donc $\lambda(i, i_1) + \lambda(i, i_2) > 0$, or d'après le lemme II.2 $\lambda(i, i_1) + \lambda(i, i_2) = 1 - \lambda(i, i_3)$, d'où l'on déduit $|\lambda(i, i_3)| < 1$ et $|\lambda(i, i_2)| < 1$.

2ème cas. A_i n'est pas un sommet de rupture.

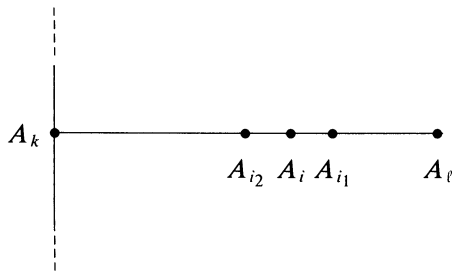
Deux cas se présentent :

i) A_i est sur un arc reliant deux sommets de rupture A_k et A_ℓ avec $M_k < M_\ell$:



On a $|\lambda(i, i_1)| = (N_k/N_i)|\lambda(k, k_3)|$ d'après le lemme II.2, d'où le résultat car $N_k < N_i$, $|\lambda(k, k_3)| < 1$ et $\lambda(i, i_1) + \lambda(i, i_2) = 0$.

ii) A_i n'est pas sur un arc reliant deux sommets de rupture :



On a $|\lambda(i, i_1)| = |\lambda(i, i_2)| = N_i/N_i$ d'après le lemme II.2, d'où le résultat car $N_i < N_i$. Maintenant examinons ce qui se passe :

a) si on éclate le point d'intersection de deux diviseurs D_i et D_j :



On obtient alors un nouveau diviseur D_k et

$$n_k = n_i + n_j, \quad N_k = N_i + N_j$$

d'où

$$\lambda(i, k) = n_i + n_j - \frac{n_i}{N_i} (N_i + N_j) = \lambda(i, j)$$

tandis que

$$\lambda(k, i) = n_i - \frac{n_i + n_j}{N_i + N_j} N_i.$$

On a donc

$$|\lambda(k, i)| \leq \sup \left(\left| n_i - \frac{n_i}{N_i} N_i \right|, \left| n_i - \frac{n_j}{N_j} N_i \right| \right) = |\lambda(j, i)| < 1,$$

si A_j est un sommet de $A'(\pi)$. Si A_j n'est pas un sommet de $A'(\pi)$,

$$|\lambda(k, i)| = \left| \frac{N_i - n_i}{N_i + 1} \right| < 1.$$

b) si on éclate un point de D_i qui n'est sur aucun $D_j, i \neq j$:



on obtient un nouveau diviseur D_k et $n_k = n_j + 1, N_k = N_j$ d'où $-\lambda(k, j) = \lambda(j, k) = 1$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition dans le cas général.

Soit $f = \prod_{1 \leq k \leq m} f_{j_k}^{m_k}$ la décomposition de f en produit de facteurs irréductibles, $\pi : X \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ la résolution plongée canonique de $f = 0, \pi_k : X_k \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ celle de $f_k = 0$. Si A_i est un sommet de $A(\pi)$ on note $N_i^k = N_i(f_k)$. Soit A_i et A_j deux sommets adjacents, A_i étant un sommet de $A'(\pi)$.

D'après a) et b), on a

$$\left| n_j - \frac{n_i}{N_i^k} N_j^k \right| \leq 1 \quad \text{pour } 1 \leq k \leq m.$$

Pour chaque k l'arbre $A(\pi)$ est obtenu à partir de l'arbre $A(\pi_k)$ en itérant des transformations de type a) ou b). Mais comme π est la résolution canonique, A_i et A_j deux sommets adjacents de $A(\pi)$ étant donnés, il existe au moins un k tel que A_i et A_j soient obtenus à partir de $A(\pi_k)$ sans aucune transformation de type b). Pour un tel k on a donc

$$\left| n_j - n_i \frac{N_j^k}{N_i^k} \right| < 1.$$

Pour conclure, il suffit maintenant d'appliquer le lemme évident suivant :

LEMME II.3.2. *Si on a les inégalités suivantes :*

$$\left| n_j - \frac{n_i}{N_i^k} N_j^k \right| \leq 1 \quad \text{pour } 1 \leq k \leq m,$$

et si on a pour au moins un k

$$\left| n_j - \frac{n_i}{N_i^k} N_j^k \right| < 1,$$

alors

$$\left| n_j - n_i \frac{\sum_{k=1}^m m_k N_j^k}{\sum_{k=1}^m m_k N_i^k} \right| < 1,$$

pour $m_k, 1 \leq k \leq m$ des entiers strictement positifs.

III. Polynôme de Bernstein local.

III.1. Soit $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ un germe de fonction analytique à l'origine, non nul et vérifiant $f(0) = 0$. Nous allons rappeler la définition du polynôme de Bernstein local de f . Pour cela on considère deux indéterminées S et T et le module libre de rang un sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}[f^{-1}, S]$ de générateur T . On fait agir l'anneau \mathcal{D} des germes en zéro d'opérateurs différentiels holomorphes sur ce module de la façon suivante :

- \mathcal{D} agit trivialement sur S ;
- $\frac{\partial}{\partial z_i} (gT) = \frac{\partial g}{\partial z_i} T + Sg f^{-1} \frac{\partial f}{\partial z_i} T$ pour $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}[f^{-1}, S]$.

On note $f^k T = f^{S+k} T$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et en faisant agir S par multiplication ce module est muni d'une structure de $\mathcal{D}[S]$ module. On a le résultat suivant démontré par Bernstein [B] si f est un polynôme et étendu au cas holomorphe par Björk :

THÉORÈME III.1. *Il existe $P \in \mathcal{D}[S]$ et $B \in \mathbb{C}[S]$, $B \neq 0$ tels que l'on ait :*

$$(*) \quad Pf^{S+1} = Bf^S.$$

Le générateur monique de l'idéal des $B \in \mathbf{C}[S]$ tels qu'il existe un P dans $\mathfrak{D}[S]$ vérifiant (*) est noté b et est appelé le polynôme de Bernstein local de f . Comme $b(-1) = 0$ (faire $S = -1$ dans (*)) on peut écrire $b = (S + 1)\tilde{b}$ avec \tilde{b} un polynôme, le polynôme de Bernstein local réduit.

III.2. Depuis les travaux de Malgrange ([M1-2-3]), on sait que S est une racine du polynôme de Bernstein réduit si et seulement si $\exp(2i\pi S)$ est une valeur propre de la monodromie locale. Ainsi chaque fois que l'on connaît les valeurs propre de la monodromie locale, on connaît les racines de b à un décalage entier près. Comme dans le cas des courbes on a une description classique de la monodromie ([A-C], [E-N], [M-W], [St]), b est connu dans ce cas à décalage entier près. D'autre part Yano ([Y]) a mis en évidence le phénomène suivant : les racines de b peuvent varier d'un entier dans une famille de courbes irréductibles sans que les invariants numériques habituels (paires de Puiseux, μ , τ , etc.) varient. Aussi ne peut-on espérer une formule explicite donnant les racines de b pour les courbes planes. Certaines de ces racines sont cependant connues, il s'agit de celles qui proviennent des exposants du système de Gauss-Manin : si $\alpha \in]-1, 0]$ est un exposant de Gauss-Manin, $-1 - \alpha$ est une racine de b .

Ainsi si $f : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$ définit un germe de courbe plane et si $\pi : X \rightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$ est la résolution canonique on a le résultat suivant, cas particulier d'un théorème de Varchenko ([V]) :

THÉORÈME III.2.1. *Si ω est un germe de 2-forme holomorphe en zéro et si*

$$\alpha(\omega) = \inf_{D_i} \left(\frac{1 + v_{D_i}(\pi^*\omega)}{v_{D_i}(\pi^*f)} \right) \leq 0,$$

alors $-1 - \alpha(\omega)$ est une racine de b .

Dans le prochain paragraphe, nous allons déterminer d'autres racines de b qui sont en général différentes de celles-ci.

III.3. Soit $f : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction analytique et $\pi : X \rightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$ la résolution plongée canonique de $f = 0$. Soit \bar{f} un représentant de f , $\bar{X} = \bar{f}^{-1}(D_\eta) \cap B_\epsilon$ avec $0 < \eta \ll \epsilon \ll 1$, D_η (resp. B_ϵ) le disque (resp. la boule) de rayon η (resp. ϵ) centré(e) en zéro. On commet les abus de notations suivants : on note f la restriction de \bar{f} à \bar{X} et on identifie X à celui de ses représentants qui est la résolution à croisements normaux canonique de \bar{X} . On reprend les notations de II.

En particulier, si $S(i) = \{j \mid 1 \leq j \leq d \text{ t. q. } D_i \cap D_j \neq \emptyset\}$ a un cardinal supérieur ou égal à 3, on dit que D_i est une composante de rupture, on note $N_i = \nu_{D_i}(\pi^*f)$, $n_i = \nu_{D_i}(\pi^*dxdy) + 1$ et $\lambda(i, j) = n_j - (N_j/N_i)n_i$. Soit $S'(i)$ l'ensemble des indices des composantes qui rencontrent D_i et ne sont pas des composantes de la transformée stricte de $f = 0$.

On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME III.3.1. *Soit $f : (\mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$ un germe de fonction analytique et D_i une composante de rupture de la résolution plongée canonique de $f = 0$ alors :*

- a) $-n_i/N_i$ est une racine du polynôme de Bernstein local réduit de f ;
- b) s'il existe j dans $S'(i)$ tel que $\lambda(i, j) = 0$, alors $-n_i/N_i$ est une racine de multiplicité deux de \tilde{b} .

Démonstration de a). Commençons par supposer que tous les $\lambda(i, j)$, $j \in S(i)$ sont non nuls. Nous allons appliquer les propositions I.3 et II.3.1. Notons $\mathbf{P} = D_i$, $\{x_j\} = D_i \cap D_j$ pour $j \in S(i)$ et $S = \cup_{j \in S(i)} \{x_j\}$. Soit L un système local de rang un sur $\mathbf{P} \setminus S$ de monodromie $\exp(2i\pi\lambda(i, j))$ en x_j . Un calcul direct en coordonnées locales montre que le résidu de la forme différentielle multiforme $f^{1-n_i/N_i}\pi^*(dx \wedge dy)$ le long de \mathbf{P} définit une section ψ de $\Gamma(\mathbf{P}, \Omega^1(\sum_{j \in S(i)} (1 - \lambda(i, j)x_j)(L^\vee)))$, L^\vee désignant le système local dual de L .

D'après les propositions I.3 et II.3.1 il existe un cycle C dans $H_1(\mathbf{P} \setminus S, L)$ tel que $\int_C \psi \neq 0$.

Soit $F \xrightarrow{\gamma} \mathbf{P} \setminus S$ le revêtement fini associé à L . Par définition de $H_1(\mathbf{P} \setminus S, L)$ C s'identifie à un élément de $H_1(F, \mathbf{C})$. Soit e un entier strictement positif tel que le e -ième itéré de la monodromie soit unipotent. Soit

$$\lambda : \begin{array}{ccc} D_{\eta^{1/e}} & \longrightarrow & D_\eta \\ \tilde{t} & \longrightarrow & t = \tilde{t}^e \end{array}$$

et \tilde{X} le normalisé du produit fibré $X \times_\lambda D_{\eta^{1/e}}$. On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\mu} & X \\ \tilde{f} \downarrow & & \downarrow f \circ \pi \\ D_{\eta^{1/e}} & \longrightarrow & D_\eta \end{array}$$

Il est bien connu que \tilde{X} est une V -variété et que l'image inverse de D_i par μ est une courbe lisse \tilde{D}_i ([St]). La restriction de μ à \tilde{D}_i est un revêtement de degré N_i de D_i ramifié au-dessus de S et de monodromie $\exp(2i\pi(N_j/N_i))$ en x_j . Comme la monodromie de F en x_j est

$$\exp(2i\pi\lambda(i, j)) = \exp\left(-2i\pi n_i \frac{N_j}{N_i}\right) = \exp\left(2i\pi \frac{N_j}{N_i}\right)^{-n_i},$$

la restriction $\tilde{\mu}$ de μ à $\tilde{D}_i \setminus \mu^{-1}(S)$ se factorise en :

$$\tilde{D}_i \setminus \mu^{-1}(S) \xrightarrow{\nu} F_0 \xrightarrow{\gamma|_{F_0}} D_i \setminus S$$

où F_0 est une composante connexe de F .

Comme ν est un revêtement fini, il existe un entier m non nul tel que mC se relève en un cycle γ de $H_1(\tilde{D}_i \setminus \mu^{-1}(S), \mathbf{C}) : \nu_*(\gamma) = mC$. Au voisinage de $\tilde{D}_i \setminus \mu^{-1}(S)$ \tilde{f} est une fibration, il existe donc une famille horizontale de cycles $\tilde{\gamma}(\tilde{t})$ dans $H_1(\tilde{X} \cap \tilde{f}^{-1}(\tilde{t}), \mathbf{C})$, $\tilde{t} \in D_{\eta^{1/e}} \setminus \{0\}$, qui se déforment sur γ . En choisissant un point de base dans $D_\eta \setminus \{0\}$ et en posant $\gamma(t^e) = \tilde{\gamma}(\tilde{t})$ pour $t \in D_\eta \setminus \{0\}$ on obtient une famille horizontale multiforme de cycles de $H_1(f^{-1}(t) \cap \tilde{X}, \mathbf{C})$ qui vérifie par construction :

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{1-n_i/N_i} \int_{\gamma(t)} \frac{dx \wedge dy}{df} = m \int_C \psi \neq 0.$$

On a donc démontré le résultat suivant dans le cas où $\lambda(i, j) \neq 0$ pour $j \in S(i)$:

PROPOSITION III.3.2. *Si D_i est une composante de rupture il existe une famille horizontale multiforme $\gamma(t)$ de cycles dans $H_1(f^{-1}(t) \cap X, \mathbf{C})$, $t \neq 0$, telle que*

$$\int_{\gamma(t)} \frac{dx \wedge dy}{df} = Ct^{-1+n_i/N_i} + o(t^{-1+n_i/N_i}) \quad \text{avec } C \neq 0.$$

Dans le cas où $\lambda(i, j) = 0$ pour au moins un j dans $S(i)$ la proposition III.3.2 se démontre de façon similaire, mais plus simple : soit $j_0 \in S(i)$ tel que $\lambda(i, j_0) = 0$ et soit ψ le résidu de $f^{1-n_i/N_i} \pi^*(dx \wedge dy)$ le long de D_i . ψ a une singularité logarithmique au point d'intersection x_{j_0} de D_i et D_{j_0} . Soit

C un petit cercle entourant x_{j_0} dans D_i . On a $\int_C \psi \neq 0$ et on termine la démonstration comme dans le cas précédent.

On déduit la partie a) du théorème III.3.1 de la proposition en utilisant la proposition 3.3 de l'article [M1] de Malgrange. (Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'argument de Malgrange reste valide pour les courbes à singularités non isolées.)

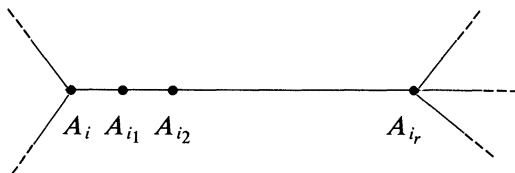
Démonstration de b). Soit A_i un sommet de rupture. Supposons que l'un des $\lambda(i, j)$ avec $j \in S'(i)$ est nul. En utilisant de façon répétée le lemme II.2 on obtient que $\lambda(k, \ell) = 0$ pour tous les sommets A_k et A_ℓ d'un arc reliant :

- i) ou bien A_i à un autre sommet de rupture ;
- ii) ou bien A_i à une extrémité de l'arbre $A'(\pi)$.

Montrons que ii) est impossible : soit A_{i_r} l'extrémité de l'arbre $A'(\pi)$ et $A_i, A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ la suite des segments sur l'arc. On aurait

$$0 = \det \begin{pmatrix} n_i & n_{i_1} \\ N_i & N_{i_1} \end{pmatrix} = \dots = \det \begin{pmatrix} n_{i_r} & 1 \\ N_{i_r} & 0 \end{pmatrix} = -N_{i_r} \neq 0$$

d'après le lemme II.2, ce qui est impossible. On est donc dans le cas i) : soit $A_i, A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ la suite des sommets sur l'arc, A_{i_r} étant un sommet de rupture :



On a alors $n_i/N_i = n_{i_1}/N_{i_1} = \dots = n_{i_r}/N_{i_r}$ et donc $\text{pgcd}(N_i, N_{i_1}, \dots, N_{i_r}) \neq 1$. Dans ce cas, d'après [St] et [E-N], la valeur propre de la monodromie $\alpha_i = \exp(2i\pi(n_i/N_i))$ possède au moins un $(2, 2)$ bloc de Jordan.

Soit H l'espace vectoriel des sections horizontales multiformes sur $D_\eta \setminus \{0\}$ du système local formé des $H^1(X \cap f^{-1}(t), \mathbf{C})$. Soit ω un représentant convenable d'un germe en zéro de 2-forme différentielle holomorphe. Son résidu induit dans $H^1(X \cap f^{-1}(t), \mathbf{C})$ pour $t \neq 0$ une classe de cohomologie

$$\sum_{\substack{\alpha \in F + \mathbf{N} \\ k \in \{0,1\}}} u_{\alpha,k}^\omega t^\alpha (\log t)^k \quad \text{avec } u_{\alpha,k}^\omega \in H,$$

F étant un ensemble fini de rationnels. Soit $\alpha(\omega) = \inf\{\alpha \mid u_{\alpha,0}^\omega \neq 0\}$, on munit H de la filtration F^\bullet avec $F^0 = H$, $F^1 = \text{Vect}\{u_{\alpha(\omega),0}^\omega \mid \alpha(\omega) \leq 0\}$ et $F^2 = \{0\}$, et de la filtration monodromique W_\bullet . ([V]). D'après [V], $(H, F^\bullet, W_\bullet)$ est une structure de Hodge mixte compatible avec la décomposition de H en sous-espaces propres généralisés pour l'action de la monodromie : $H = \bigoplus H_\lambda$, λ décrivant l'ensemble des valeurs propres de la monodromie et H_λ étant le sous-espace propre généralisé correspondant.

Comme la valeur propre α_i possède au moins un $(2, 2)$ bloc de Jordan, on a $gr_W^2 H_{\alpha_i} \neq 0$ par définition de W_\bullet . Soit N le logarithme de la partie unipotente de la monodromie. N induit un isomorphisme de type $(-1, -1)$ entre $gr_W^2 H_{\alpha_i}$ et $gr_W^0 H_{\alpha_i}$. Comme $gr_W^0 H_{\alpha_i}$ est de type $(0, 0)$ $gr_W^2 H_{\alpha_i}$ est de type $(1, 1)$ et donc $F^1 gr_W^2 H_{\alpha_i} \neq 0$. On peut donc trouver u dans $F^1 H_{\alpha_i}$ dont l'image dans $F^1 gr_W^2 H_{\alpha_i}$ est non nulle. Il existe alors ω telle que la classe de ω/df dans $H^1(X(t), \mathbf{C})$ est :

$$t^{-1+n_i/N_i} \log t \left(\frac{iN}{2\pi} \right) u + t^{-1+n_i/N_i} u + o(t^{-1+n_i/N_i})$$

et on déduit que $-n_i/N_i$ est racine de multiplicité deux de \tilde{b} d'après la proposition 3.3 de [M1]. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les arguments utilisés restent valides pour les courbes à singularités non isolées. Remarquons que dans le cas b), $-1 + n_i/N_i$ est toujours un exposant de Gauss-Manin.

Remarque III.3.3. Si D_i est une composante irréductible de la transformée stricte de $f = 0$ alors $-n_i/N_i = -1/N_i$ est une racine de b . Pour cela il suffit de remarquer que $-1/N_i$ est supérieur ou égal à -1 , et que c'est toujours un pôle du courant $\int_{\bar{X}} |f|^{2S}$. Ce dernier fait s'obtient en prenant comme forme test une forme qui s'annule à l'origine et dont le support non vide est contenu dans un petit voisinage de la composante irréductible locale de $f = 0$ associée à D_i .

Remarque III.3.4. Dans le cas particulier où f est irréductible, la partie a) du théorème III.3.1 a été obtenue précédemment par Lichtin [Li3].

Remarque III.3.5. On peut par la même méthode que celle utilisée dans la démonstration du théorème III.3.1 obtenir quelques racines sup-

plémentaires de \tilde{b} . On a ainsi le résultat suivant dont la démonstration est similaire à celle de III.3.1. Soit $\omega = \varphi dx \wedge dy$ un germe de 2-forme holomorphe en zéro. Soit $\pi = X \rightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$ la résolution canonique plongée de $f\varphi = 0$. On dit qu'une composante D_i de $\pi^{-1}(|f\varphi = 0|)$ est de rupture pour f si c'est la transformée stricte d'une composante de rupture de la résolution canonique plongée de $f = 0$. Dans ce cas, si D_i est de rupture pour f et si :

$$\text{i) } v_{D_j}(\pi^*\omega) + 1 - \frac{v_{D_j}(\pi^*f)}{v_{D_j}(\pi^*f)} (v_{D_i}(\pi^*\omega) + 1) \notin \mathbf{Z} \setminus \{0\}, \text{ pour } D_j$$

adjacent à D_i

$$\text{ii) } \beta_i = -\frac{v_{D_i}(\pi^*\omega) + 1}{v_{D_i}(\pi^*f)} \geq -1,$$

alors β_i est une racine de \tilde{b} .

Remarque III.3.6. D'après [L] dans le cas des courbes à singularité isolée toutes les racines de \tilde{b} sont des pôles du courant $\int_{\tilde{X}} |f|^{2S}$. C'est en particulier le cas des racines de \tilde{b} mises en évidence dans le théorème III.3.1. Il ne nous semble pas clair comment retrouver ce résultat directement.

IV. Fonctions d'Igusa p -adiques.

IV.1. Soit K une extension finie de \mathbf{Q}_p , d'anneau des entiers R , d'idéal maximal P et de corps résiduel $\mathbf{F}_q = R/P$. Si v est la valuation associée à P , la norme usuelle sur K est définie par $|x| = q^{-v(x)}$ pour $x \in K \setminus \{0\}$ et $|x| = 0$ pour $x = 0$. On note $|dx|$ la mesure de Haar sur K^n normalisée pour que la mesure de R^n soit 1.

Soit $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ tel que $f(0) = 0$ et $N_i = \#\{x \bmod (P^i) \mid x \in R^n \text{ et } f(x) = 0 \bmod (P^i)\}$ le nombre de solutions de l'équation $f = 0$ dans l'anneau R/P^iR . Pour étudier la série de Poincaré :

$$P(T) = \sum_{i=0}^{\infty} N_i(q^{-n}T)^i$$

J. Igusa ([I1]) a introduit l'intégrale

$$I(S) = \int_{R^n} |f(x)|^S |dx| = P(q^{-S}) - q^S(P(q^{-S}) - 1)$$

et a démontré que $I(S)$, a priori seulement définie pour $\text{Re}(S) > 0$, se prolonge analytiquement à \mathbf{C} en une fonction rationnelle de q^{-S} sur \mathbf{C} dont les pôles sont de multiplicité au plus n et que les parties réelles des pôles de $I(S)$ sont rationnelles.

IV.2. Au polynôme f on peut également associer un polynôme d'une variable b , introduit par Bernstein dans [B]. Sa définition est analogue à celle du polynôme de Bernstein local défini en III.1 : on remplace $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n,0}$ par $K[x_1, \dots, x_n]$ et \mathcal{D} par l'anneau des opérateurs différentiels algébriques sur K^n , et on définit de même le polynôme b appelé polynôme de Bernstein de f . Il n'est pas difficile de voir que si $f_{\mathbf{C}} \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ est le polynôme obtenu par extension des scalaires à \mathbf{C} , un plongement de K dans \mathbf{C} étant donné, le polynôme de Bernstein local de $f_{\mathbf{C}}$ en zéro divise b .

Nous nous proposons de montrer que pour les polynômes p -adiques de deux variables les parties réelles des pôles de $I(S)$ sont des racines de b . Plus précisément, on a le résultat suivant :

THÉORÈME IV.2.1. *Soit $f \in K[x_1, x_2]$ vérifiant $f(0) = 0$, $I(S) = \int_{R^2} |f(x)|^S dx$, b le polynôme de Bernstein de f , alors :*

- a) *si S est un pôle de $I(S)$, $\text{Re}(S)$ est une racine de b ;*
- b) *si f n'a comme singularités K -rationnelles que des singularités isolées (sur K), en particulier si $f = 0$ est réduit sur K , alors la partie réelle d'un pôle de multiplicité au moins k de $I(S)$ est une racine de multiplicité au moins k de b .*

D'autre part on a le résultat suivant reliant les pôles des fonctions d'Igusa p -adiques aux pôles des fonctions d'Igusa complexes :

THÉORÈME IV.2.2. *Soit $f \in K[x_1, x_2]$ vérifiant $f(0) = 0$. Etant donné une clôture algébrique \bar{K} de K et un isomorphisme $\sigma : \bar{K} \rightarrow \mathbf{C}$, on obtient par extension des scalaires un polynôme $f_{\mathbf{C}}$ de $\mathbf{C}[x_1, x_2]$. On note, comme en III.3, $\bar{X} = f_{\mathbf{C}}^{-1}(D_{\eta}) \cap B_{\epsilon}$ pour $0 < \eta \ll \epsilon \ll 1$. On a alors :*

- a) *si S est un pôle de $I(S)$, $\text{Re}(S)$ est un pôle du courant $\int_{\bar{X}} |f_{\mathbf{C}}|^{2S} \square$;*
- b) *si f n'a comme singularités K -rationnelles que des singularités isolées (sur K), en particulier si $f = 0$ est réduit sur K , alors si S est un pôle de multiplicité au moins k de $I(S)$, $\text{Re}(S)$ est un pôle de multiplicité au moins k du courant $\int_{\bar{X}} |f_{\mathbf{C}}|^{2S} \square$.*

Démonstration du théorème IV.2.1. Il est clair que l'on peut supposer que la courbe réduite sous-jacente à $f = 0$ a zéro pour unique singularité dans R^2 .

Soit $\pi^0 : X^0 \rightarrow R^2$ la résolution plongée canonique de $f = 0$ dans R^2 : on ne désingularise que les branches de $f = 0$ en zéro rationnelles sur K . On note $A(\pi^0)$ l'arbre dual associé, A_i^0 ses sommets, qui correspondent aux composantes D_i^0 de $\pi^{0-1}(f^{-1}(0))$, $N_i^0 = \nu_{D_i^0}(\pi^{0*}f)$, $n_i^0 = \nu_{D_i^0}(\pi^{0*}dx_1 \wedge dx_2) + 1$, $A'(\pi^0)$ le sous-arbre de $A(\pi^0)$ constitué des sommets de $A(\pi^0)$ qui ne sont pas associés à des composantes de la transformée stricte, et R^0 l'ensemble des sommets de rupture, i.e. l'ensemble des sommets de $A(\pi^0)$ qui sont adjacents à au moins trois sommets distincts de $A(\pi^0)$. D'après [I1] les pôles de $I(S)$ sont de la forme

$$-\frac{n_j}{N_j^0} + i \frac{2k\pi}{N_j^0 \log q},$$

j décrivant l'ensemble des indices des sommets de $A(\pi^0)$ et k décrivant les entiers.

Dans [La], Langlands donne une formule pour le développement de Laurent de $I(S)$ au voisinage de

$$\alpha = -\left(\frac{n_i^0}{N_i^0} + i \frac{2k\pi}{N_i^0 \log q}\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

On déduit immédiatement de cette formule les faits suivants :

1) pour que α soit un pôle double de $I(I)$ il est nécessaire qu'il existe deux sommets adjacents A_i^0 et A_j^0 tels que

$$\operatorname{Re}(\alpha) = -\frac{n_i^0}{N_i^0} = -\frac{n_j^0}{N_j^0};$$

2) si α n'est pas un pôle double et si $\operatorname{Re}(\alpha)$ n'est pas de la forme $-n_i^0/N_i^0$ avec A_i^0 un sommet de R^0 ou de $A(\pi^0 \setminus A'(\pi^0))$, alors le résidu de $I(S)$ au point α est de la forme :

$$\sum_{i \in S(\alpha)} m_i \left[\int_{|x| \leq 1} |x|^{\alpha^0(i, i_1) - 1} |dx| + \int_{|x| < 1} |x|^{\alpha^0(i, i_2) - 1} |dx| \right]$$

avec $S(\alpha) = \{i / -n_i^0/N_i^0 = \operatorname{Re}(\alpha)\}$, $\alpha^0(i, i_j) = n_{i_j}^0 + \alpha N_{i_j}^0$, $A_{i_1}^0$ et $A_{i_2}^0$ les deux sommets adjacents à A_i^0 (si $A_{i_1}^0$ est l'unique sommet adjacent à A_i^0 on pose $\alpha^0(i, i_2) = 1$) et m_i des constantes.

Remarquons que s'il existe deux sommets A_i^0 et A_j^0 adjacents de $A(\pi^0) \setminus A'(\pi^0)$ tels que $n_i^0/N_i^0 = n_j^0/N_j^0$, alors il existe deux sommets de rupture $A_{i_1}^0$ et $A_{i_r}^0$ tels que $\lambda^0(k, \ell) = n_\ell^0 - (n_k^0/N_k^0)N_\ell^0 = 0$ pour tous les A_k^0 et A_ℓ^0 situés sur l'arc reliant $A_{i_1}^0$ à $A_{i_r}^0$, et tels que A_i^0 et A_j^0 soient des sommets de ce segment : ceci se démontre par un argument déjà utilisé au cours de la démonstration de III.3.b).

Montrons maintenant que dans le cas 2) le résidu de $I(S)$ en α est nul : en effet, à une constante non nulle près chaque terme entre crochets est égal à

$$\frac{1 - q^{-(\alpha^0(i, i_1) + \alpha^0(i, i_2))}}{(1 - q^{-\alpha^0(i, i_1)})(1 - q^{-\alpha^0(i, i_2)})}$$

(cf. [I2]) et on a $\alpha^0(i, i_1) + \alpha^0(i, i_2) = 0$ d'après le lemme II.2 (ou plutôt son analogue dans la situation présente), tandis que $\alpha^0(i, i_1)$ et $\alpha^0(i, i_2)$ sont non nuls d'après la remarque précédente et l'hypothèse faite sur α .

Nous avons donc démontré le lemme suivant :

LEMME IV.2.3. a) *L'ensemble des parties réelles des pôles de $I(S)$ est contenu dans*

$$\left\{ -\frac{n_i^0}{N_i^0} \right\}_{A_i^0 \in R^0} \cup \left\{ -\frac{n_i^0}{N_i^0} \right\}_{A_i^0 \in A(\pi^0) \setminus A'(\pi^0)} ;$$

b) *si α est un pôle double de $I(S)$ alors l'une des deux conditions suivantes est réalisée :*

- i) $\text{Re } \alpha = -n_i^0/N_i^0$ pour tout A_i^0 appartenant à un arc reliant deux sommets de rupture ;
- ii) $\text{Re } \alpha = -n_i^0/N_i^0$ pour tout A_i^0 appartenant à un arc reliant un sommet de rupture à un sommet de $A(\pi^0) \setminus A'(\pi^0)$.

Considérons maintenant une clôture algébrique \bar{K} de K et σ un isomorphisme de \bar{K} avec \mathbf{C} . On en déduit un polynôme $f_{\mathbf{C}}$ de $\mathbf{C}[x_1, x_2]$ dont le polynôme de Bernstein local à l'origine est noté $b_{\mathbf{C}, 0}$. Soit $\pi : X \rightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$ la résolution plongée canonique de $f_{\mathbf{C}} = 0$ en zéro. On reprend les notations de II et on note $\pi(\bar{K}) : X_{\bar{K}} \rightarrow \bar{K}^2$ le morphisme associé à π par σ . A tout sommet de rupture A_i^0 de $A(\pi^0)$ est associé un sommet de rupture A_i de $A(\pi)$ et on a $n_i^0 = n_i$, $N_i^0 = N_i$. D'autre part si A_i^0 est un sommet de $A(\pi^0)$ associé à une composante irréductible de la transformée stricte et A_i le sommet qui lui est associé dans $A(\pi)$ on a $N_i^0 = N_i$ et $n_i^0 = n_i = 1$. La

partie a) du théorème IV.2.1 est donc démontrée d'après III.3.1, III.3.3 et IV.2.3.a).

Démontrons maintenant la partie b) du théorème. L'hypothèse faite sur f assure que si A_i^0 est un sommet associé à une composante irréductible de la transformée stricte de $f = 0$, $n_i^0/N_i^0 = 1$. Comme il est facile de se convaincre que $n_j^0/N_j^0 < 1$ si A_j n'est pas un sommet de $A(\pi^0) \setminus A'(\pi^0)$, le cas ii) du lemme IV.2.3 est exclu dès qu'il n'y a pas deux sommets de $A(\pi^0) \setminus A'(\pi^0)$ qui sont adjacents, ce qui ne se produit que si $f = 0$ est composée de deux composantes lisses transverses, cas que nous laissons au lecteur.

On est donc dans la situation suivante : si α est un pôle double de $I(S)$ alors $\text{Re } \alpha = -n_k^0/N_k^0$ pour tout A_k^0 appartenant à un arc L^0 reliant deux sommets de rupture A_i^0 et A_j^0 . Soit A_i et A_j les sommets de rupture correspondants de $A(\pi)$. Sur l'arc L reliant A_i et A_j il y a peut-être de nouveaux sommets mais comme n_k^0/N_k^0 est constant sur L^0 , n_k/N_k est constant sur L (en effet si A' est obtenu en éclatant le point d'intersection de D_a^0 et D_b^0 , $n(A') = n_a^0 + n_b^0$, $N(A') = N_a^0 + N_b^0$ et donc $n_a^0/N_a^0 = n_b^0/N_b^0 = n(A')/N(A')$ et on déduit que n_k/N_k est constant sur L par récurrence). D'après III.3.1.b), $-n_i/N_i$ est alors une racine de multiplicité deux de b , ce qui termine la démonstration du théorème IV.2.1.

Démonstration du théorème IV.2.2. Une conséquence de la démonstration de IV.2.1 est que si s est un pôle de $I(S)$ alors $\text{Re}(s)$ est une racine de $b_{C,0}$. Dans [L] (théorème 1.9) il est démontré que les racines de $b_{C,0}$ sont des pôles du courant $\int_{\bar{X}} |f_C|^{2S} \square$, ce qui donne a). (En fait le résultat de [L] n'est énoncé que pour les germes de courbes planes réduites, mais la démonstration de la partie du résultat dont on a besoin ici s'adapte facilement au cas non réduit.)

En ce qui concerne b), d'après la démonstration de IV.2.1 et en conservant ses notations, il suffit de montrer que si $-n_k/N_k$ est constant sur un arc reliant deux sommets de rupture de $A(\pi)$, $-n_k/N_k$ est un pôle de multiplicité deux de $\int_{\bar{X}} |f|^{2S} \square$. Mais dans ce cas on a vu au cours de la démonstration de III.3.1.b) qu'il existe une 2-forme holomorphe ω telle que la classe de ω/df_C dans $H^1(\bar{X} \cap f_C^{-1}(t), \mathbf{C})$ est $t^{-1+n_i/N_i} \log t(iN/2\pi)u + t^{-1+n_i/N_i}u + o(t^{-1+n_i/N_i})$ avec $u \neq 0$. (Les notations sont celles de III en remplaçant f par f_C .) On peut alors utiliser le théorème 1.1 de [L] pour en déduire que $-n_i/N_i$ est un pôle de multiplicité deux de $\int_{\bar{X}} |f|^{2S} \square$.

REFERENCES

- [A-C] N. A'Campo, La fonction zêta d'une monodromie, *Comm. Math. Helv.*, **50** (1975), 233–248.
- [Be] I. Bernstein, The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, *Funct. Analiz i Ego Pril.*, **6**, **4** (1972), 26–40.
- [D-M] P. Deligne, G. D. Mostow, Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **63** (1986), 5–90.
- [E-N] D. Eisenbud, W. Neumann, Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities, *Annals of Math. Study*, n° 110, Princeton Univ. Press.
- [I1] J. Igusa, Complex powers and asymptotic expansions I, II. *J. Reine angew. Math.* **268/269** (1974), 110–130 et **278/279** (1975), 307–321.
- [I2] ———, Complex powers of irreducible algebroid curves, in Geometry today, Giornate di Geometria, Roma 1984, *Progress in Mathematics*, **68**, Birkhäuser (1985), 207–230.
- [La] R. P. Langlands, Orbital integrals on forms of $SL(3)$ I, *Amer. J. Math.*, **105** (1983), 465–506.
- [Li1] B. Lichtin, Some algebro-geometric formulae for poles of $|f(x, y)|^s$, *Amer. J. Math.*, **107** (1985), 139–161.
- [Li2] ———, Poles of $|f|^{2s}$, roots of the B -function, and an application to/from knot theory, Preprint 1984.
- [Li3] ———, Poles of $|f|^{2s}$ and roots of the B -function, preprint 1986.
- [L] F. Loeser, Quelques conséquences locales de la théorie de Hodge, *Ann. Inst. Fourier* **35**, **1** (1985), 75–92.
- [M1] B. Malgrange, Sur le polynôme de I. N. Bernstein, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1973–1974, exposé XX (10 pp.), Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique.
- [M2] ———, Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée, *Springer Lect. Notes*, **459** (1975), 98–115.
- [M3] ———, B. Malgrange, Polynômes de Bernstein-Sato et cohomologie évanescence, *Astérisque* **101-102** (1983), 243–267.
- [Me] D. Meuser, On the poles of a local zeta function for curves, *Inv. Math.*, **73** (1983), 445–465.
- [M-W] F. Michel, C. Weber, Topologie des germes de courbes planes à plusieurs branches, livre à paraître.
- [St] J. Steenbrink, Mixed Hodge structure and vanishing cohomology, in *Real and Complex Singularities*, Oslo (1976), (1977), 525–563, Sijthoff & Noordhoff.
- [Str] L. Strauss, Poles of a two variable p -adic complex power, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **278**, **2** (1983), 481–493.
- [V] A. Varchenko, Asymptotic mixed Hodge structure on vanishing cohomology, *Izv. Akad. Nauk* **45**, **3** (1981), 540–591.
- [Y] T. Yano, On the theory of b functions, *Publ. Res. Ins. Math. Sc.*, **14** (1978), 111–202.