Math. Ann. 306, 125–157 (1996)

Mathematische Annalen

Principe de Boyarsky et $\mathscr{D}$-modules

François Loeser

URA 169 du CNRS, Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, F-91128 Palaiseau, France
UMR 9994 du CNRS, Institut de Mathématiques, Université P. et M. Curie, Case 247,
4 place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France

Reçu le 13 juin 1995 / Version révisée reçue le 11 Septembre 1995

A Bernard Dwork,
en témoignage d'admiration et d'amitié

Sommaire

1 Introduction 125
2 La fonction gamma-p-adique de Dwork 128
3 Opérateurs aux différences p-adiques 128
4 Action du Frobenius 136
5 F-Δ_T-Modules holonomes 141
6 Variantes rationnelles 150
7 Transformation de Laplace 154
8 Images directes par des morphismes non monomiaux 156
Références 157

Mathematics Subject Classification (1991): 14F30, 14G20, 35S, 39A10

1. Introduction

Le but essentiel de cet article est de proposer un cadre général pour le principe de Boyarsky de Dwork ([Bo], [D2]).

Avant de formuler ce principe, nous allons commencer par rappeler l'énoncé de la formule de Gross-Koblitz. Fixons un nombre premier p, un entier strictement positif f, et posons $q = p^f$. On se donne une clôture algébrique K de $\mathbf{Q}_p$ et on note Teich le caractère de Teichmuller $\mathbf{F}_q \to K$. On choisit un élément π de K vérifiant $\pi^{p-1} = -p$. Comme la série formelle $\Theta_f := \exp\pi(x - x^q)$ converge sur un disque centré en l'origine de rayon strictement supérieur à 1, on peut noter

$\Theta_f(x)$ sa valeur en x, pour x dans K avec $|x| \leq 1$. La fonction $x \mapsto \Theta_f(\mathrm{Teich}(x))$ est un caractère additif non trivial de $\mathbf{F}_q$. Pour tout diviseur d de $q-1$, et tout entier j tel que $0 \leq j < d$, on considère la somme de Gauss

$$g_f\left(\frac{j}{d}(q-1)\right) := -\sum_{\{x \in K;\, x^q = x\}} x^{-\frac{j}{d}(q-1)} \Theta_f(x).$$

Rappelons maintenant la définition de la fonction gamma p-adique de Morita. Pour tout entier strictement positif n on pose

$$\Gamma_p(n) = (-1)^n \prod_{\substack{i=1 \\ (i,p)=1}}^{n-1} i.$$

Cette fonction admet un unique prolongement en une fonction localement analytique $\Gamma_p : \mathbf{Z}_p \longrightarrow \mathbf{Z}_p$ vérifiant l'équation fonctionnelle $\Gamma_p(x+1) = -x\Gamma_p(x)$ si $x \notin p\mathbf{Z}_p$, $\Gamma_p(x+1) = -\Gamma_p(x)$ si $x \in p\mathbf{Z}_p$.

On écrit

$$\frac{j}{d}(q-1) = c_0 + c_1 p + \cdots + c_{f-1} p^{f-1}$$

avec $0 \leq c_i < p$, et pour tout rationnel y on note $< y >$ l'unique rationnel de $[0,1[$ congru à y modulo $\mathbf{Z}$. Le théorème de Gross-Koblitz est l'égalité suivante

$$g_f\left(\frac{j}{d}(q-1)\right) = \pi^{c_0+c_1+\cdots+c_{f-1}} \prod_{i=0}^{f-1} \Gamma_p\left(< p^i \frac{j}{d} >\right).$$

D'après Dwork, ce résultat est l'illustration du principe général suivant, le principe de Boyarsky : "If cohomology is parametrized rationally by a character then the Frobenius operation will vary continuously [locally analytically] with the character" ([Bo], [D2]). Le livre [D1] et l'article [D2] sont consacrés à la vérification de ce principe pour la fonction hypergéométrique ${}_2F_1$ et constituent déjà un véritable tour de force technique. Dans son livre [D3] B. Dwork établit le principe de Boyarsky pour les fonctions hypergéométriques satisfaisant une hypothèse de régularité.

Dans le présent travail nous proposons un cadre général permettant d'énoncer un principe de Boyarsky pour les $\mathscr{D}$-modules sur les tores et nous ramenons sa démonstration dans certains cas à une conjecture concernant les images inverses par des morphismes monomiaux.

Plus précisément, soit K un corps normé complet contenant $\mathbf{Q}_p$ et soit T un K-tore déployé. On introduit dans ce travail une K-algèbre $\Delta_T^\vee$ d'opérateurs aux différences p-adiques analytiques. Cette algèbre est la réunion croissante de sous-algèbres $\Delta_T^{(r)}$ pour r entier, dont les éléments peuvent être appelés opérateurs aux différences p-adiques de niveau r. Par transformation de Mellin ces algèbres peuvent être vues comme des algèbres d'opérateurs différentiels d'ordre infini. Ces algèbres possèdent des propriétés souvent analogues à celle des algèbres d'opérateurs différentiels définies dans un cadre général par P. Berthelot [Be1]

[Be2]. Elles sont cependant très différentes car elles sont en particulier beaucoup plus "petites" et de plus exclusivement "toriques". La section 3 est consacrée à l'étude de ces algèbres et au formalisme des opérations qui leur est associé. Pour tout morphisme monomial entre tores on a des opérations d'image inverse et directe, etc... Elles ont un comportement tout à fait remarquable vis à vis de la transformation de Frobenius que nous étudions dans la section 4. Dans la section 5 nous introduisons le concept de F-Δ-module holonome. D'après nous ce concept (et ses variantes localisées introduites dans la section 6) donne une formalisation adéquate du principe de Boyarsky : nous dirons que le transformé de Mellin d'un $\mathscr{D}$-module algébrique holonome sur un tore satisfait au principe de Boyarsky s'il peut être muni d'une structure de F-Δ-module holonome (quitte éventuellement à localiser). Nous donnons également des exemples fondamentaux (distribution de Dirac, exponentielle de Dwork). On définit un foncteur d'image directe par un morphisme monomial. Le cas de l'image inverse est plus problématique. Nous ne pouvons définir les foncteurs d'image inverse que pour les morphismes monomiaux surjectifs dont les fibres ont un nombre premier à p de composantes géométriquement connexes. En général, l'image inverse par un morphisme de tores d'un module sous-jacent à un F-Δ-module holonome n'est pas sous-jacent à un F-Δ-module holonome (exemple 5.3.2). Lorsque l'image inverse analytique coïncide avec l'analytisé de l'image inverse algébrique, il est possible de construire un morphisme d'image inverse. On peut penser que c'est le cas, sous certaines hypothèses, pour les modules qui sont produit externes de modules exponentiels de Dwork, pour presque tout p (conjecture 5.3.3). Il paraît d'ailleurs intéressant d'étudier en général la différence entre fibre analytique et algébrique d'un $\mathscr{D}$-module holonome sur un tore. Comme le montre l'exemple 5.3.4 cette question est étroitement reliée à la théorie, encore à développer, des théorèmes d'indice et des théorèmes de comparaison pour les équations aux différences p-adiques.

Dans la théorie des modules aux différences il est souvent utile de localiser par rapport à la variable s. Dans la section 6 nous présentons les variantes rationnelles de la théorie précédente. La proposition 6.2.1 donne en particulier une description tout à fait élémentaire en terme de matrices de ce qu'on pourrait appeler un système linéaire rationnel aux différences p-adiques avec action de Frobenius. Les matrices de Frobenius construites par Dwork dans [D3] entrent naturellement dans ce cadre, ou plus précisément dans une variante relative de ce cadre (5.4 et 6.3).

La section 8 est consacrée au problème suivant : est-ce que les objets de cohomologie de l'image directe par un morphisme non nécessairement monomial d'un module M satisfaisant le principe de Boyarsky satisfont encore le principe de Boyarsky ? On démontre (théorème 8.1) que ce problème est lié à l'existence d'une structure de F-Δ-module holonome sur l'image inverse par un morphisme monomial d'un module sous-jacent à un F-Δ-module holonome et à la stabilité des F-Δ-modules holonomes par produit tensoriel. On démontre en particulier que la réponse est essentiellement positive lorsque M est le module trivial, modulo la conjecture 5.3.3, pour presque tout p, et après une localisation inoffensive.

Pour obtenir cet énoncé qui sort du contexte monomial où notre théorie est a priori confinée, nous utilisons la transformation de Laplace (section 7). Remarquons que la transformation de Laplace jouait déjà un rôle essentiel dans l'approche de Dwork [D3].

Je tiens à remercier B. Dwork et F. Baldassarri dont les remarques ont permis d'améliorer le présent texte.

2. La fonction gamma p-adique de Dwork

On utilisera la variante suivante, dûe à Dwork, de la fonction Γ_p.

Pour tout entier $k \in \mathbf{Z}$, on note $(s)_k$ la fraction rationnelle $\frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)}$ (où Γ est la fonction gamma usuelle).

Soit (c_i) la suite d'éléments de K définie par

$$\exp\pi(x - x^p) = \sum_{i \geq 0} c_i x^i .$$

Soient s et s' des éléments de $\mathbf{Z}_p - \mathbf{N}^\times$ tels que $ps' - s = i \in \mathbf{Z}$. On pose

$$\gamma_p(s, s') = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{pk+i} \frac{(s')_k}{(-\pi)^k}.$$

Pour $p = 2$ il peut être préférable de prendre un autre π (cf. [A-D]).

Rappelons quelques propriétés de γ_p démontrées dans [D3], [A-D].

Propriétés *(1) Pour i fixé, $\gamma_p(s, s')$ est une fonction localement méromorphe de la variable s' sur $\mathbf{Z}_p$.*

(2) On a $\gamma_p(s, s') = 0$ si et seulement si $s \in \mathbf{N}^\times$ et $-s' \in \mathbf{N}$.

(3) On a $\gamma_p(s, s')^{-1} = 0$ si et seulement si $-s \in \mathbf{N}$ et $s' \in \mathbf{N}^\times$.

(4) Pour $(m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ on a l'équation fonctionnelle

$$\gamma_p(s + n, s' + m) = \frac{(s)_n}{(-\pi)^n} \frac{(-\pi)^m}{(s')_m} \gamma_p(s, s').$$

(5) On a

$$\Gamma_p(s) = \pi^{-\mathrm{Rep}(-s)} \gamma_p(s, \frac{s + \mathrm{Rep}(-s)}{p}),$$

en notant $\mathrm{Rep}(-s)$ *l'unique entier dans* $\{0, \cdots, p-1\}$ *tel que* $|s + \mathrm{Rep}(-s)| < 1$.

3. Opérateurs aux différences p-adiques

3.1. Rappels sur la transformation de Mellin algébrique[La][L-S]

Soit K un corps de caractéristique nulle et soit T un K-tore déployé de dimension n, c'est à dire un K-schéma en groupes abéliens isomorphe à $\mathbf{G}^n_{m,K}$. On note

$X_T = \mathrm{Hom}_{K\mathrm{gr}}(T, \mathbf{G}_{m,K})$ le groupe des caractères algébriques de T et Ω_T le K-espace vectoriel des 1-formes différentielles invariantes sur T. On a une action algébrique libre de X_T sur Ω_T donnée par

$$(\chi, \omega) \mapsto \omega + \chi^*(\frac{dx}{x}),$$

en notant x la coordonnée canonique sur $\mathbf{G}_{m,K}$.

Notons Δ_T l'anneau non commutatif formé des sommes finies $\sum_{\chi \in X_T} f_\chi \cdot \chi$ avec f_χ dans $H^0(\Omega_T, \mathcal{O}_{\Omega_T})$, les f_χ étant nuls pour tout χ hors d'une partie finie de X_T, avec la relation de commutation

$$\chi \cdot f_\chi = \chi(f_\chi) \cdot \chi,$$

l'action de X_T sur $H^0(\Omega_T, \mathcal{O}_{\Omega_T})$ provenant de l'action sur Ω_T.

Soit $D_T := H^0(T, \mathscr{D}_T)$ la K-algèbre des opérateurs différentiels algébriques sur T. Rappelons que D_T est la K-algèbre non commutative engendrée par $H^0(T, \mathcal{O}_T) \simeq K[X_T]$ et par l'algèbre symétrique $\mathrm{Sym}_K \Omega_T^\vee$ avec la relation de commutation

$$[D, \chi] = \langle \chi^*(\frac{dx}{x}), D \rangle \cdot \chi$$

en notant $\langle\, , \rangle$ l'accouplement canonique. On a un isomorphisme canonique $D_T \simeq \Delta_T$ donné par l'identité sur $K[X_T]$ et par $-$ l'identité sur $H^0(\Omega_T, \mathcal{O}_{\Omega_T}) \simeq \mathrm{Sym}_K \Omega_T^\vee$ qui induit une équivalence de catégorie $\mathfrak{M}$, la transformation de Mellin, entre les catégories de complexes de modules à cohomologie bornée $D^b(D_T)$ et $D^b(\Delta_T)$. On dit qu'un Δ_T-module est holonome si le D_T-module correspondant l'est. On note $D^b_{\mathrm{hol}}(\Delta_T)$ la sous-catégorie de $D^b(\Delta_T)$ formée des objets à cohomologie holonome. Bien sûr $\mathfrak{M}$ induit une équivalence de catégories entre $D^b_{\mathrm{hol}}(D_T)$ et $D^b_{\mathrm{hol}}(\Delta_T)$.

Etant donné un isomorphisme $T \simeq \mathbf{G}^n_{m,K}$, on a des isomorphismes de K-algèbres non commutatives

$$H^0(T, \mathscr{D}_T) \simeq K[x_1, x_1^{-1}, \cdots, x_n, x_n^{-1}, \partial_{x_1}, \cdots \partial_{x_n}]$$

et

$$\Delta_T \simeq K[\tau_1, \tau_1^{-1}, \cdots, \tau_n, \tau_n^{-1}, s_1, \cdots s_n]$$

$K[\tau_1, \tau_1^{-1}, \cdots, \tau_n, \tau_n^{-1}, s_1, \cdots s_n]$ étant l'algèbre des opérateurs aux différences avec les relations $\tau_i s_i = (s_i + 1)\tau_i$, $[\tau_i, s_j] = 0$ pour $i \neq j$, $[\tau_i, \tau_j] = [s_i, s_j] = 0$. L'isomorphisme $H^0(T, \mathscr{D}_T) \simeq \Delta_T$ est alors donné par $x_i \mapsto \tau_i$ et $x_i \partial_{x_i} \mapsto -s_i$.

Rappelons brièvement, bien que ce soit inutile pour la suite, que l'équivalence de catégories $\mathfrak{M}$ est donnée géométriquement par un noyau (cf. [La][L-S]). On munit $\mathcal{O}_{T \times \Omega_T}$ d'une connexion intégrable relativement à Ω_T donnée par $d + \tilde{\omega}$: $\mathcal{O}_{T \times \Omega_T} \to \Omega^1_{T \times \Omega_T / \Omega_T}$, où $\tilde{\omega}$ est la 1-forme différentielle universelle, et de l'action diagonale de X_T, définie par $\chi(f \otimes g) = (\chi f) \otimes (\chi g)$. Ces deux actions commutent. Soit $\mathscr{K}$ l'objet ainsi défini. Le foncteur $\mathfrak{M}$ est canoniquement isomorphe au foncteur

$$M \mapsto \mathrm{DR}_{T \times \Omega_T / \Omega_T}(p^* M \otimes_{\mathcal{O}_{T \times \Omega_T}} \mathscr{K}).$$

En coordonnées $\mathcal{K}$ est engendré par x^s avec l'action naturelle des opérateurs différentiels et des translations, et, pour tout objet M de $D^b(D_T)$, $\mathfrak{M}(M)$ s'identifie à

$$\mathrm{DR}_{T\otimes_K K[s]/K[s]}(M \otimes_K x^s),$$

$M \otimes_K x^s$ étant naturellement vu comme objet de $D^b(D_{T\otimes_K K[s]})$.

3.2. *Fonctions localement analytiques sur l'espace des caractères*

Soit p un nombre premier. Soit K un corps normé complet contenant $\mathbf{Q}_p$, la norme prolongeant celle de $\mathbf{Q}_p$. Soit T un K-tore déployé de dimension n. Le choix de la forme différentielle invariante $\frac{dx}{x}$ sur $\mathbf{G}_{m,K}$ permet d'identifier Ω_T au K-espace vectoriel $K\otimes_{\mathbf{Z}} X_T$, l'inclusion $X_T \hookrightarrow \Omega_T$ étant donnée par $\chi \mapsto \chi^*(\frac{dx}{x})$. L'image de $\mathbf{Z}_p \otimes_{\mathbf{Z}} X_T$ dans Ω_T est un $\mathbf{Z}_p$ module libre de rang n que l'on note Ω_T^0. L'espace vectoriel Ω_T est canoniquement muni d'une structure de K-espace vectoriel normé, correspondant pour tout isomorphisme $\Omega_T \simeq K^n$ associé à un isomorphisme $T \simeq \mathbf{G}_{m,K}^n$ à la norme $\|(x_1,\cdots,x_n)\| = \sup|x_i|$. Pour cette norme Ω_T^0 est exactement la boule unité.

On note $\mathcal{A}(\Omega_T^0)$ la K-algèbre des fonctions localement analytiques (i.e. coïncidant localement avec leur série de Taylor) sur Ω_T^0 à valeurs dans K. Pour tout entier positif ou nul r, on note $\mathcal{A}^{(r)}(\Omega_T^0)$ la K-algèbre des fonctions analytiques (i.e. coïncidant avec leur série de Taylor) sur toutes les boules fermées de rayon $|p|^r$ contenues dans Ω_T^0 à valeurs dans K. Pour tout entier strictement négatif r, on note $\mathcal{A}^{(r)}(\Omega_T^0)$ la K-algèbre des fonctions analytiques sur la boule fermée de centre l'origine et de rayon $|p|^r$ de Ω_T à valeurs dans K. L'algèbre $\mathcal{A}(\Omega_T^0)$ s'identifie à la limite inductive $\varinjlim \mathcal{A}^{(r)}(\Omega_T^0)$. On notera χ_0 la fonction caractéristique de $p\Omega_T^0$ (i.e. de la boule fermée de rayon $|p|$ et de centre l'origine). Cette fonction appartient à $\mathcal{A}^{(1)}(\Omega_T^0)$.

Donnons une description explicite des algèbres $\mathcal{A}^{(r)}(\Omega_T^0)$ et $\mathcal{A}(\Omega_T^0)$. Pour cela on fixe un isomorphisme $T \simeq \mathbf{G}_{m,K}^n$, ce qui permet d'identifier Ω_T^0 à $\mathbf{Z}_p^n$. Si $s = (s_1,\cdots,s_n) \in \mathbf{Z}_p^n$ et $i = (i_1,\cdots,i_n) \in \mathbf{N}^n$, on note $\binom{s}{i} = \prod_{j=1}^n \binom{s_j}{i_j}$, $i! = \prod_{j=1}^n (i_j!)$ et $\|i\| = \sum_{j=1}^n i_j$. D'après un résultat de Mahler une fonction $f : \mathbf{Z}_p^n \to K$ est continue si et seulement si elle s'écrit

$$f(s) = \sum_{i\in\mathbf{N}^n} a_i \binom{s}{i}$$

avec $|a_i| \to 0$ quand $\|i\| \to \infty$. Le résultat suivant est dû à Y. Amice [Am].

Théorème 3.2.1. *Soit $f = \sum_{i\in\mathbf{N}^n} a_i \binom{s}{i}$ une fonction continue $\mathbf{Z}_p^n \to K$. La fonctions f appartient à $\mathcal{A}(\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}^n})$ si et seulement si il existe des constantes réelles strictement positives A et B, avec $B < 1$, telles que, pour tout $i \in \mathbf{N}^n$,*

$$|a_i| \leq AB^{\|i\|}.$$

Si r est un entier positif ou nul, la fonction f appartient à $\mathcal{H}^{(r)}(\Omega^0_{\mathbf{G}^n_{m,K}})$ si et seulement si on a

$$\lim_{\|i\|\to\infty}\left|\frac{a_i}{\prod_{j=1}^n\left[\frac{i_j}{p^r}\right]!}\right| = 0.$$

Si r est un entier strictement négatif, la fonction f est la restriction d'un élément de $\mathcal{H}^{(r)}(\Omega^0_{\mathbf{G}^n_{m,K}})$ si et seulement si on a

$$\lim_{\|i\|\to\infty}\left|\frac{a_i p^{\|i\|r}}{i!}\right| = 0.$$

Corollaire 3.2.2. *Pour λ dans K, on pose $f_\lambda(s) = \sum_{i\in\mathbf{N}}(\lambda-1)^i\binom{s}{i} = (1+(\lambda-1))^s$. La fonction f_λ appartient à $\mathcal{H}(\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}})$ si et seulement si $|1-\lambda| < 1$. Pour $r \geq 0$, la fonction f_λ appartient à $\mathcal{H}^{(r)}(\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}})$ si et seulement si $|1-\lambda| < p^{-\frac{1}{(p-1)p^r}}$.* □

3.3. Opérateurs aux différences et opérateurs différentiels

Soit A l'une des K-algèbres $\mathcal{H}^{(r)}(\Omega^0_T)$ ou $\mathcal{H}(\Omega^0_T)$. L' action du $\mathbf{Z}$-module X_T sur $H^0(\Omega_T, \mathcal{O}_{\Omega_T})$ se prolonge en une action par translation sur A

$$\chi(f)(s) = f(s+\chi),$$

(on voit ici X_T comme plongé dans Ω_T).

On définit $\Delta^{(r)}_T$ (resp. $\Delta^\vee_T$) comme l'anneau non commutatif formé des sommes finies $\sum_{\chi\in X} f_\chi\cdot\chi$, avec f_χ dans A, avec la relation de commutation $\chi\cdot f_\chi = \chi(f_\chi)\cdot\chi$. On a des isomorphismes canoniques $\Delta^{(r)}_T \simeq \Delta_T \otimes_{H^0(\Omega_T,\mathcal{O}_{\Omega_T})} \mathcal{H}^{(r)}(\Omega^0_T)$ et $\Delta^\vee_T \simeq \Delta_T \otimes_{H^0(\Omega_T,\mathcal{O}_{\Omega_T})} \mathcal{H}(\Omega^0_T)$.

Compte tenu de l'isomorphisme canonique $\Delta_T \simeq D_T$ les algèbres $\Delta^{(r)}_T$ et $\Delta^\vee_T$ peuvent être vues comme des algèbres d'opérateurs différentiels d'ordre infini. Plus précisément on a l'énoncé suivant.

Proposition 3.3.1. *Notons $\partial^i = \prod_{j=1}^n \partial_{x_j}^{i_j}$ pour $i \in \mathbf{N}^n$. Etant donné un isomorphisme $T \simeq \mathbf{G}^n_{m,K}$, l'algèbre $\Delta^\vee_T$ est canoniquement isomorphe à la K-algèbre des opérateurs différentiels de la forme $\sum_{\substack{k\in\mathbf{Z}^n\\ i\in\mathbf{N}^n}} a_{k,i}x^{k+i}\frac{\partial^i}{i!}$ avec $a_{k,i}\in K$ tels que pour presque tout $k \in \mathbf{Z}^n$, $a_{k,i}$ est nul pour tout $i \in \mathbf{N}^n$, et tels que il existe des constantes réelles strictement positives A et B, avec $B < 1$, telles que, pour tout $i \in \mathbf{N}^n$, $|a_{k,i}| \leq AB^{\|i\|}$. De façon similaire, si r est un entier positif ou nul (resp. strictement négatif) $\Delta^{(r)}_T$ est canoniquement isomorphe à la K-algèbre des opérateurs différentiels de la forme $\sum_{\substack{k\in\mathbf{Z}^n\\ i\in\mathbf{N}^n}} a_{k,i}x^{k+i}\frac{\partial^i}{i!}$ avec $a_{k,i}\in K$ tels que pour presque tout $k \in \mathbf{Z}^n$, $a_{k,i}$ est nul pour tout $i \in \mathbf{N}^n$, et tels que*

$$\lim_{\|i\|\to\infty}\left|\frac{a_{k,i}}{\prod_{j=1}^n\left[\frac{i_j}{p^r}\right]!}\right|=0$$

et

$$\lim_{\|i\|\to\infty}\left|\frac{a_{k,i}p^{\|i\|r}}{i!}\right|=0$$

respectivement.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème 3.2.1 et de la relation $t^i\partial_t^i = i!\binom{t\partial_t}{i}$. □

Remarque. La proposition précédente permet de voir $\Delta_T^\vee$ comme une sous-algèbre d'une algèbre de sections globales d'un faisceau d'opérateurs différentiels de niveau fini à singularités surconvergentes au sens de Berthelot [Be1]. Plus précisément, soit $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0,p)$, de corps résiduel k et de corps des fractions K. On pose $\mathcal{S} = \operatorname{Spf}\mathcal{V}$. Soit $\mathcal{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse de réduction X sur k et soit $Z \subset X$ un diviseur dans X. P. Berthelot a défini dans [Be1] 4.2.5 le faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z)$ des opérateurs différentiels de niveau fini à singularités surconvergentes le long de Z. On pose $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbf{Q}} = \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z)\otimes\mathbf{Q}$. On prend $\mathcal{X} = \hat{\mathbf{P}}^n_{\mathcal{S}}$ muni des coordonnées homogènes $[X_0,\cdots,X_n]$. On note Z_i le diviseur d'équation $X_i = 0$ dans X, Z la réunion des Z_i et $\mathcal{U}_i$ le complémentaire de $X_i = 0$ dans $\mathcal{X}$. On pose $x_i = \frac{X_i}{X_0}$ pour $i \geq 1$ sur $\mathcal{U}_0$. Notons $A_n(K)^\dagger$ (resp. $B_n(K)^\dagger$) la K-algèbre des opérateurs différentiels de la forme $\sum_{\substack{l\in\mathbf{N}^n\\k\in\mathbf{N}^n}} a_{l,k}x^l\frac{\partial^k}{k!}$ (resp. $\sum_{\substack{l\in\mathbf{Z}^n\\k\in\mathbf{N}^n}} a_{l,k}x^l\frac{\partial^k}{k!}$) avec $a_{l,k}\in K$ tels qu'il existe des constantes réelles strictement positives A et B, avec $B<1$, telles que, pour tout $l\in\mathbf{N}^n$ (resp. $\mathbf{Z}^n$) et tout $k\in\mathbf{N}^n$ on ait $|a_{l,k}|\leq AB^{\|l\|+\|k\|}$ (en posant $\|l\| = \sum_i |l_i|_a$ avec $|\ |_a$ la norme archimédienne). D'après un résultat de C. Huyghe ([H] Théorème 3.2.3) le morphisme de restriction $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z_0)_{\mathbf{Q}}) \to \Gamma(\mathcal{U}_0,\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z_0)_{\mathbf{Q}})$ induit un isomorphisme canonique d'algèbres $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z_0)_{\mathbf{Q}}) \simeq A_n(K)^\dagger$. En reprenant sa démonstration on obtient que le morphisme de restriction $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbf{Q}}) \to \Gamma(\mathcal{U}_0,\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbf{Q}})$ induit un isomorphisme canonique d'algèbres $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbf{Q}}) \simeq B_n(K)^\dagger$. D'après la proposition précédente $\Delta^\vee_{\mathbf{G}^n_{m,K}}$ est donc canoniquement isomorphe à une sous-algèbre (stricte dès que $n>0$) de $B_n(K)^\dagger$.

Proposition 3.3.2. *(1) Les K-algèbres $\Delta_T^{(r)}$ sont noethériennes.*

(2) Les anneaux $\Delta_T^{(r')}$ et $\Delta_T^\vee$ sont plats sur $\Delta_T^{(r)}$ pour $r'\geq r$.

(3) La K-algèbre $\Delta_T^\vee$ est cohérente.

Démonstration. Comme les K-algèbres $\mathcal{A}^{(r)}(\Omega_T^0)$ sont noethériennes, l'énoncé (1) est une conséquence du théorème de Hilbert pour les extensions de Ore d'anneaux noethériens (cf. [M-R] 1.2.9 (iv)). Le point (2) résulte directement de la platitude des anneaux $\mathcal{A}^{(r')}(\Omega_T^0)$ et $\mathcal{A}(\Omega_T^0)$ sur $\mathcal{A}^{(r)}(\Omega_T^0)$ pour $r'\geq r$. Le point (3) est alors conséquence directe de (1) et (2). □

Si A est un anneau on note Mod$A$ la catégorie des A-modules à gauche, $D^-(A)$ la catégorie dérivée des complexes de A-modules à gauche à cohomologie bornée supérieurement et $D^b(A)$ la catégorie dérivée des complexes de A-modules à gauche à cohomologie bornée.

3.4. Opérations

Soient T_1 et T_2 des K-tores déployés. On dit qu'un morphisme $T_1 \to T_2$ est monomial s'il peut être obtenu en composant un morphisme de tores $T_1 \to T_2$ avec des translations multiplicatives sur T_1 et T_2. Tout morphisme monomial $\varpi : T_1 \to T_2$ induit des morphismes $\varpi^* : K[X_{T_2}] \to K[X_{T_1}]$, $\varpi_* : H^0(\Omega_{T_1}, \mathcal{O}_{\Omega_{T_1}}) \to H^0(\Omega_{T_2}, \mathcal{O}_{\Omega_{T_2}})$, $\varpi_* : \cdot\,\mathscr{H}(\Omega^0_{T_1}) \to \cdot\,\mathscr{H}(\Omega^0_{T_2})$ et $\varpi_* : \cdot\,\mathscr{H}^{(r)}(\Omega^0_{T_1}) \to \cdot\,\mathscr{H}^{(r)}(\Omega^0_{T_2})$, pour $r \geq 0$.

On considère

$$\Delta_{T_1 \to T_2} := K[X_{T_1}] \otimes_{K[X_{T_2}]} \Delta_{T_2}.$$

C'est de façon naturelle un $(\Delta_{T_1}, \Delta_{T_2})$-bimodule; la structure de Δ_{T_2}-module à droite est la structure évidente et la structure de Δ_{T_1}-module à gauche est l'unique structure compatible avec la structure de $K[X_{T_1}]$-module à gauche vérifiant $\varphi(1 \otimes m) = 1 \otimes \varpi_*(\varphi)m$ pour φ dans $H^0(\Omega_{T_1}, \mathcal{O}_{\Omega_{T_1}})$ et m dans Δ_{T_2}. On définit de même le $(\Delta^\vee_{T_1}, \Delta^\vee_{T_2})$-bimodule

$$\Delta^\vee_{T_1 \to T_2} := K[X_{T_1}] \otimes_{K[X_{T_2}]} \Delta^\vee_{T_2}$$

et le $(\Delta^{(r)}_{T_1}, \Delta^{(r)}_{T_2})$-bimodule

$$\Delta^{(r)}_{T_1 \to T_2} := K[X_{T_1}] \otimes_{K[X_{T_2}]} \Delta^{(r)}_{T_2}.$$

On définit de façon similaire le $(\Delta_{T_2}, \Delta_{T_1})$-bimodule

$$\Delta_{T_2 \leftarrow T_1} := H^0(\Omega_{T_2}, \mathcal{O}_{\Omega_{T_2}}) \otimes_{H^0(\Omega_{T_1}, \mathcal{O}_{\Omega_{T_1}})} \Delta_{T_1},$$

le $(\Delta^\vee_{T_2}, \Delta^\vee_{T_1})$-bimodule

$$\Delta^\vee_{T_2 \leftarrow T_1} := \cdot\,\mathscr{H}(\Omega^0_{T_2}) \otimes_{\cdot\,\mathscr{H}(\Omega^0_{T_1})} \Delta^\vee_{T_1}$$

et le $(\Delta^{(r)}_{T_2}, \Delta^{(r)}_{T_1})$-bimodule

$$\Delta^{(r)}_{T_2 \leftarrow T_1} := \cdot\,\mathscr{H}^{(r)}(\Omega^0_{T_2}) \otimes_{\cdot\,\mathscr{H}^{(r)}(\Omega^0_{T_1})} \Delta^{(r)}_{T_1}.$$

Définissons par exemple la structure de bimodule sur $\Delta^{(r)}_{T_2 \leftarrow T_1}$. La structure de $\Delta^{(r)}_{T_1}$-module à droite est la structure évidente, et la structure de $\Delta^{(r)}_{T_2}$-module à gauche est l'unique structure compatible avec la structure de $\cdot\,\mathscr{H}^{(r)}(\Omega^0_{T_2})$-module à gauche telle que $m(1 \otimes \varphi) = 1 \otimes \varpi^*(m)\varphi$ pour m dans $K[X_{T_2}]$ et φ dans $\Delta^{(r)}_{T_1}$.

Ceci permet de définir, pour $? \in \{\ , \vee, (r)\}$, des foncteurs $\varpi^{!?} : D^-(\Delta^?_{T_2}) \to D^-(\Delta^?_{T_1})$ et $\varpi^?_+ : D^-(\Delta^?_{T_1}) \to D^-(\Delta^?_{T_2})$ par les formules

$$\varpi^{!?}M := \Delta^?_{T_1\to T_2} \otimes^L_{\Delta^?_{T_2}} M[d]$$

et

$$\varpi^?_+M := \Delta^?_{T_2\leftarrow T_1} \otimes^L_{\Delta^?_{T_1}} M,$$

avec $d = \dim T_1 - \dim T_2$.

Pour les anneaux Δ_T ces foncteurs correspondent aux foncteurs d'image inverse et d'image directe usuels des $\mathscr{D}$-modules définis dans [B].

Si $\varpi : T_1 \to T_2$ et $\varpi' : T_2 \to T_3$ sont des morphismes monomiaux on a des isomorphismes de foncteurs $(\varpi' \circ \varpi)^{!?} \simeq \varpi^{!?} \circ \varpi'^{!?}$ et $(\varpi' \circ \varpi)^!_+ \simeq \varpi'^!_+ \circ \varpi^!_+$. La démonstration est similaire à celle de [B].

Soient T_1 et T_2 des K-tores déployés. Soit M_1 (resp. M_2) un objet de $D^-(\Delta^?_{T_1})$ (resp. $D^-(\Delta^?_{T_2})$) pour $? = \ , \vee, (r)$. Le produit tensoriel externe de complexes de K-espaces vectoriels $M_1 \boxtimes M_2$ est naturellement un objet de $D^-(\Delta^?_{T_2} \otimes_K \Delta^?_{T_2})$. On pose

$$M_1 \boxtimes^? M_2 := \Delta^?_{T_1\times T_2} \otimes^L_{\Delta^?_{T_2}\otimes_K \Delta^?_{T_2}} M_1 \boxtimes M_2.$$

C'est un objet de $D^-(\Delta^?_{T_1\times T_2})$.

Si M_1 et M_2 sont des objets de $D^-(\Delta^?_T)$ on définit leur produit de convolution par $M_1 *^? M_2 := M_1 \otimes^L_A M_2$, le produit tensoriel étant pris sur $A = H^0(\Omega_T, \mathcal{O}_{\Omega_T})$, $\mathscr{H}(\Omega^0_T)$ ou $\mathscr{H}^{(r)}(\Omega^0_T)$ suivant que $? = \ , \vee, (r)$. On a un isomorphisme canonique dans $D^-(A)$

$$M_1 *^? M_2 \simeq \varpi^?_+(M_1 \boxtimes^? M_2),$$

en notant $\varpi : T \times T \to T$ le morphisme produit, ce qui permet de voir $M_1 *^? M_2$ comme un objet $D^-(\Delta^?_T)$.

3.5. Compatibilités faciles

Proposition 3.5. *Soit $\varpi : T_1 \to T_2$ un morphisme monomial de K-tores déployés.*

(1) On a un isomorphisme canonique de $(\Delta^\vee_{T_2}, \Delta_{T_1})$-bimodules

$$\Delta^\vee_{T_2} \otimes^L_{\Delta_{T_2}} \Delta_{T_2\leftarrow T_1} \simeq \Delta^\vee_{T_2\leftarrow T_1}.$$

(2) On a un morphisme canonique de $(\Delta^\vee_{T_1}, \Delta_{T_2})$-bimodules

$$\Delta^\vee_{T_1} \otimes^L_{\Delta_{T_1}} \Delta_{T_1\to T_2} \longrightarrow \Delta^\vee_{T_1\to T_2}.$$

Si ϖ est surjectif et si le nombre de composantes géométriquement connexes des fibres de ϖ est premier à p, alors ce morphisme est un isomorphisme.

Démonstration. Démontrons (1). On a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}\Delta^\vee_{T_2} \otimes^L_{\Delta_{T_2}} \Delta_{T_2\leftarrow T_1} &\simeq \Delta^\vee_{T_2} \otimes_{\Delta_{T_2}} \Delta_{T_2\leftarrow T_1}\\ &\simeq \mathscr{H}(\Omega^0_{T_2}) \otimes_{H^0(\Omega_{T_2}, \mathcal{O}_{\Omega_{T_2}})} \Delta_{T_2\leftarrow T_1}\\ &\simeq \mathscr{H}(\Omega^0_{T_2}) \otimes_{H^0(\Omega_{T_1}, \mathcal{O}_{\Omega_{T_1}})} \Delta_{T_1},\end{aligned}$$

le premier isomorphisme résultant de la platitude de $\Delta_{T_2}^\vee$ sur Δ_{T_2}.

De même, on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}\Delta_{T_2\leftarrow T_1}^\vee &\simeq \Delta_{T_2\leftarrow T_1}^\vee \otimes_{\Delta_{T_1}} \Delta_{T_1}\\ &\simeq \mathscr{A}(\Omega_{T_2}^0)\otimes_{\mathscr{A}(\Omega_{T_1}^0)} \Delta_{T_1}^\vee \otimes_{\Delta_{T_1}} \Delta_{T_1}\\ &\simeq \mathscr{A}(\Omega_{T_2}^0)\otimes_{\mathscr{A}(\Omega_{T_1}^0)} \mathscr{A}(\Omega_{T_1}^0)\otimes_{H^0(\Omega_{T_1},\mathscr{O}_{\Omega_{T_1}})} \Delta_{T_1}\\ &\simeq \mathscr{A}(\Omega_{T_2}^0)\otimes_{H^0(\Omega_{T_1},\mathscr{O}_{\Omega_{T_1}})} \Delta_{T_1}.\end{aligned}$$

Démontrons (2). On a de même des isomorphismes canoniques

$$\Delta_{T_1}^\vee \otimes_{\Delta_{T_1}}^L \Delta_{T_1\to T_2} \simeq \Delta_{T_1}^\vee \otimes_{\Delta_{T_1}} K[X_{T_1}]\otimes_{K[X_{T_2}]} \Delta_{T_2}$$

et

$$\Delta_{T_1\to T_2}^\vee \simeq K[X_{T_1}]\otimes_{K[X_{T_2}]} \Delta_{T_2}^\vee.$$

On définit $\Phi : \Delta_{T_1}^\vee \otimes_{\Delta_{T_1}} K[X_{T_1}]\otimes_{K[X_{T_2}]} \Delta_{T_2} \to K[X_{T_1}]\otimes_{K[X_{T_2}]} \Delta_{T_2}^\vee$ comme l'unique morphisme de $(\Delta_{T_1}^\vee, \Delta_{T_2})$-bimodules tel que $\Phi(f\otimes b\otimes m) = b\otimes \varpi_*(b^{-1}f)m$ pour f dans $\mathscr{A}(\Omega_{T_1}^0)$, b dans X_{T_1}, et m dans Δ_{T_2}. Il reste à vérifier que si ϖ est surjectif et si le nombre de composantes géométriquement connexes de $\operatorname{Ker}\varpi$ est premier à p, alors Φ est un isomorphisme.

Commençons par traiter le cas où

$$T_1 = \operatorname{Spec} K[t_1, t_1^{-1}, \cdots, t_n, t_n^{-1}], \qquad T_2 = \operatorname{Spec} K[t_1, t_1^{-1}, \cdots, t_m, t_m^{-1}],$$

avec $m \le n$ et ϖ est donné par $(t_1, \cdots, t_n)\mapsto (t_1, \cdots, t_m)$. Dans ce cas le Δ_{T_1}-module à gauche $K[X_{T_1}]\otimes_{K[X_{T_2}]} \Delta_{T_2}$ a pour résolution le complexe de Koszul $K.(\Delta_{T_1}, (s_{m+1}, \cdots, s_n))$. Par platitude de $\Delta_{T_1}^\vee$ sur Δ_{T_1} on en tire que le $\Delta_{T_1}^\vee$-module à gauche $\Delta_{T_1}^\vee \otimes_{\Delta_{T_1}} K[X_{T_1}]\otimes_{K[X_{T_2}]} \Delta_{T_2}$ a pour résolution le complexe de Koszul $K.(\Delta_{T_1}^\vee, (s_{m+1}, \cdots, s_n))$. Comme $K[X_{T_1}]\otimes_{K[X_{T_2}]} \Delta_{T_2}^\vee$ a pour résolution le même complexe, on en tire un isomorphisme entre les deux $\Delta_{T_1}^\vee$-modules dont on vérifie qu'il est égal à Φ.

Considérons maintenant le cas où

$$T_1 = \operatorname{Spec} K[t_1, t_1^{-1}, \cdots, t_n, t_n^{-1}], \qquad T_2 = \operatorname{Spec} K[t_1', t_1'^{-1}, \cdots, t_n', t_n'^{-1}],$$

et ϖ est un morphisme monomial de la forme $t_i' = \lambda_i \prod_{1\le j\le n} t_j^{a_{ij}}$ avec a_{ij} dans $\mathbf{Z}$, tel que le déterminant de la matrice $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ soit premier à p. Remarquons que le morphisme $\varpi_* : \mathscr{A}(\Omega_{T_1}^0) \to \mathscr{A}(\Omega_{T_2}^0)$ est alors donné par $f(s_1, \cdots, s_n)\mapsto f(\sum_i a_{i1}s_i', \cdots, \sum_i a_{in}s_i')$. La condition que le déterminant de A soit premier à p assure que ϖ_* est un isomorphisme, d'où l'on tire directement que Φ est un isomorphisme.

Dans le cas général ϖ est obtenu par composition à partir de morphismes du type précédent, d'où le résultat. □

Remarque. On peut vérifier que la condition sur ϖ imposée dans (2) pour avoir un isomorphisme est nécessaire.

3.6. Immersions monomiales

Soit T' un K-tore déployé et soit $T = T' \times \mathbf{G}_{m,K}$. Pour a dans $K^\times$ on note $i_a : T' \to T$ l'immersion monomiale donnée par $t' \mapsto (t', a)$.

Proposition 3.6.1. *Soit r un entier ≥ 0. Soient a et b dans $K^\times$ vérifiant $|1 - \frac{a}{b}| < p^{-\frac{1}{(p-1)p^r}}$. On a des isomorphismes canoniques*

$$\Delta^{(r)}_{T' \xrightarrow{i_a} T} \simeq \Delta^{(r)}_{T' \xrightarrow{i_b} T} \quad et \quad \Delta^{(r)}_{T \xleftarrow{i_a} T'} \simeq \Delta^{(r)}_{T \xleftarrow{i_b} T'}.$$

Si $|1 - \frac{a}{b}| < 1$ on a des isomorphismes canoniques

$$\Delta^{\vee}_{T' \xrightarrow{i_a} T} \simeq \Delta^{\vee}_{T' \xrightarrow{i_b} T} \quad et \quad \Delta^{\vee}_{T \xleftarrow{i_a} T'} \simeq \Delta^{\vee}_{T \xleftarrow{i_b} T'}.$$

Démonstration. On note τ et s les éléments de $\Delta^{(r)}_T$ provenant des éléments correspondants de $\Delta^{(r)}_{\mathbf{G}_{m,K}}$. Pour tout λ dans $K^\times$ on a $\Delta^{(r)}_{T' \xrightarrow{i_\lambda} T} \simeq \Delta^{(r)}_T/(\tau - \lambda)\Delta^{(r)}_T$. Avec les notations de 3.2.2 on a la relation $f_{\frac{b}{a}}(\tau - a) = (\tau - b)f_{\frac{b}{a}}(\frac{a}{b})$. On en tire que le morphisme de multiplication à gauche $\Delta^{(r)}_T \xrightarrow{f_{\frac{b}{a}}\cdot} \Delta^{(r)}_T$ induit un isomorphisme $\Delta^{(r)}_{T' \xrightarrow{i_a} T} \simeq \Delta^{(r)}_{T' \xrightarrow{i_b} T}$. De même le morphisme de multiplication à droite $\Delta^{(r)}_T \xrightarrow{\cdot f_{\frac{a}{b}}} \Delta^{(r)}_T$ induit un isomorphisme $\Delta^{(r)}_{T \xleftarrow{i_a} T'} \simeq \Delta^{(r)}_{T \xleftarrow{i_b} T'}$. On a de même les autres énoncés. □

Proposition 3.6.2. *Soit r un entier ≥ 0. Soient a et b dans $K^\times$ vérifiant $|1 - \frac{a}{b}| < p^{-\frac{1}{(p-1)p^r}}$ (resp. $|1 - \frac{a}{b}| < 1$). Soit M un objet de $D^-(\Delta^{(r)}_T)$ (resp. $D^-(\Delta^{\vee}_T)$). On a alors un isomorphisme canonique $i_a^{!(r)}M \simeq i_b^{!(r)}M$ (resp. $i_a^{!\vee}M \simeq i_b^{!\vee}M$). Si M est un objet de $D^-(\Delta^{(r)}_{T'})$ (resp. $D^-(\Delta^{\vee}_{T'})$) on a un isomorphisme canonique $i^{(r)}_{a+}M \simeq i^{(r)}_{b+}M$ (resp. $i^{\vee}_{a+}M \simeq i^{\vee}_{b+}M$).*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition précédente. □

4. Action du Frobenius

Soit T un K-tore déployé. On note $F : T \to T$ le morphisme de Frobenius $t \mapsto t^p$. On notera parfois T' le tore image de façon à écrire $F : T \to T'$.

Le morphisme

$$F_* : \mathscr{A}^{(r+1)}(\Omega^0_T) \to \mathscr{A}^{(r+1)}(\Omega^0_{T'})$$

se factorise en un morphisme $\mathscr{A}^{(r+1)}(\Omega^0_T) \to \mathscr{A}^{(r)}(\Omega^0_{T'})$ (donné en coordonnées par $f(s) \mapsto f(ps')$). On en déduit que $\Delta^{(r)}_{T \to T'}$ est muni d'une structure naturelle de $(\Delta^{(r+1)}_T, \Delta^{(r)}_{T'})$-bimodule induisant sa structure de $(\Delta^{(r)}_T, \Delta^{(r)}_{T'})$-bimodule. On note $\Delta_{T\to T'}^{(r+1,r)}$ le $(\Delta_T^{(r+1)}, \Delta_{T'}^{(r)})$-bimodule ainsi défini. De même on a une structure naturelle de $(\Delta_{T'}^{(r)}, \Delta_T^{(r+1)})$-bimodule sur $\Delta_{T'\leftarrow T}^{(r,r+1)} := .\mathscr{C}^{(r)}(\Omega_{T'}^0) \otimes_{.\mathscr{C}^{(r+1)}(\Omega_T^0)} \Delta_T^{(r+1)}$.

Remarquons que $\Delta_{T'}^{(r)} \otimes_{K[X_{T'}]} K[X_T]$ possède une structure naturelle de $\Delta_T^{(r+1)}$-module à droite. C'est l'unique structure de $\Delta_T^{(r+1)}$-module à droite telle que l'action de $K[X_T]$ soit l'action évidente et telle que l'action d'un élément $f(s)$ de $.\mathscr{C}^{(r+1)}(\Omega_T^0)$ sur un élément de la forme $m \otimes 1$ avec m dans $\Delta_{T'}^{(r)}$ soit donnée par $(m \otimes 1)f(s) = mf(ps') \otimes 1$, en notant $f(ps')$ l'image de $f(s)$ dans $.\mathscr{C}^{(r)}(\Omega_{T'}^0)$.

Proposition 4.1. *Soit r un entier positif ou nul.*

(1) On a un isomorphisme canonique de $(\Delta_T^{(r+1)}, \Delta_T^{(r+1)})$-bimodules

$$\Delta_{T\to T'}^{(r+1,r)} \otimes_{K[X_{T'}]} K[X_T] \simeq \Delta_T^{(r+1)},$$

l'action à droite sur le premier module provenant de celle sur $\Delta_{T'}^{(r)} \otimes_{K[X_{T'}]} K[X_T]$.

(2) On a un isomorphisme canonique de $(\Delta_{T'}^{(r)}, \Delta_T^{(r+1)})$-bimodules

$$\Delta_{T'\leftarrow T}^{(r,r+1)} \simeq \Delta_{T'}^{(r)} \otimes_{K[X_{T'}]} K[X_T].$$

(3) On a un isomorphisme canonique de $(\Delta_T^{(r+1)}, \Delta_T^{(r+1)})$-bimodules

$$\Delta_{T\to T'}^{(r+1,r)} \otimes_{\Delta_{T'}^{(r)}} \Delta_{T'\leftarrow T}^{(r,r+1)} \simeq \Delta_T^{(r+1)}.$$

(4) On a un isomorphisme canonique de $(\Delta_{T'}^{(r)}, \Delta_{T'}^{(r)})$-bimodules

$$\Delta_{T'\leftarrow T}^{(r,r+1)} \otimes_{\Delta_T^{(r+1)}} \Delta_{T\to T'}^{(r+1,r)} \simeq \Delta_{T'}^{(r)}.$$

(5) On a un isomorphisme canonique de $(\Delta_T^\vee, \Delta_T^\vee)$-bimodules

$$\Delta_{T\to T'}^\vee \otimes_{\Delta_{T'}^\vee} \Delta_{T'\leftarrow T}^\vee \simeq \Delta_T^\vee.$$

(6) On a un isomorphisme canonique de $(\Delta_{T'}^\vee, \Delta_{T'}^\vee)$-bimodules

$$\Delta_{T'\leftarrow T}^\vee \otimes_{\Delta_T^\vee} \Delta_{T\to T'}^\vee \simeq \Delta_{T'}^\vee.$$

Démonstration. Démontrons (1). On a un morphisme de K-algèbres $F^!$: $.\mathscr{C}^{(r)}(\Omega_{T'}^0) \to .\mathscr{C}^{(r+1)}(\Omega_T^0)$ qui à un élément $f(s')$ de $.\mathscr{C}^{(r)}(\Omega_{T'}^0)$ associe la fonction $f(\frac{s}{p})\chi_0$ de $.\mathscr{C}^{(r+1)}(\Omega_T^0)$. (Rappelons que χ_0 est la fonction caractéristique de la boule fermée de rayon $|p|$ de centre l'origine dans Ω_T^0.) Il existe un unique morphisme de K-algèbres $\varphi : \Delta_{T'}^{(r)} \to \Delta_T^{(r+1)}$ tel que $\varphi(x \cdot y) = F^*(x) \cdot F^!(y)$ pour x dans $K[X_{T'}]$ et y dans $.\mathscr{C}^{(r)}(\Omega_{T'}^0)$. Ce morphisme est injectif et son image est le K-espace vectoriel engendré par les produits mf avec m dans $F^*K[X_{T'}]$ et f dans $.\mathscr{C}^{(r+1)}(\Omega_T^0)$ nulle en dehors de la boule fermée de rayon $|p|$ centrée à l'origine dans Ω_T^0. On définit

$$\Phi : \Delta_{T\to T'}^{(r+1,r)} \otimes_{K[X_{T'}]} K[X_T] = K[X_T] \otimes_{K[X_{T'}]} \Delta_{T'}^{(r)} \otimes_{K[X_{T'}]} K[X_T] \to \Delta_T^{(r+1)}$$

par $\Phi(a \otimes b \otimes c) = a\varphi(b)c$. On vérifie directement que c'est un morphisme de $(\Delta_T^{(r+1)}, \Delta_T^{(r+1)})$-bimodules. Il résulte de la description de l'image de φ que c'est un isomorphisme.

Démontrons (2). Comme le morphisme $\mathcal{H}^{(r+1)}(\Omega_T^0) \to \mathcal{H}^{(r)}(\Omega_{T'}^0)$ est surjectif, de noyau les fonctions nulles en dehors de la boule fermée de rayon $|p|$ centrée à l'origine dans Ω_T^0, le K-espace vectoriel $\Delta_{T'\leftarrow T}^{(r,r+1)}$ est canoniquement isomorphe au K-espace vectoriel $\mathcal{H}^{(r)}(\Omega_{T'}^0) \otimes_K K[X_T]$. D'autre part $\Delta_{T'}^{(r)} \otimes_{K[X_{T'}]} K[X_T]$ est également canoniquement isomorphe comme K-espace vectoriel à $\mathcal{H}^{(r)}(\Omega_{T'}^0) \otimes_K K[X_T]$. On vérifie qu'on obtient en composant ces isomorphismes un isomorphisme canonique de $(\Delta_{T'}^{(r)}, \Delta_T^{(r+1)})$-bimodules $\Delta_{T'\leftarrow T}^{(r,r+1)} \simeq \Delta_{T'}^{(r)} \otimes_{K[X_{T'}]} K[X_T]$.

L'énoncé (3) est conséquence directe de (1) et (2) car on a des isomorphismes canoniques de $(\Delta_T^{(r+1)}, \Delta_T^{(r+1)})$-bimodules

$$\begin{aligned}\Delta_{T\to T'}^{(r+1,r)} \otimes_{\Delta_{T'}^{(r)}} \Delta_{T'\leftarrow T}^{(r,r+1)} &\simeq \Delta_{T\to T'}^{(r+1,r)} \otimes_{\Delta_{T'}^{(r)}} \Delta_{T'}^{(r)} \otimes_{K[X_{T'}]} K[X_T] \\ &\simeq \Delta_{T\to T'}^{(r+1,r)} \otimes_{K[X_{T'}]} K[X_T] \\ &\simeq \Delta_T^{(r+1)}.\end{aligned}$$

Démontrons (4). On a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}\Delta_{T'\leftarrow T}^{(r,r+1)} \otimes_{\Delta_T^{(r+1)}} \Delta_{T\to T'}^{(r+1,r)} &\simeq \mathcal{H}^{(r)}(\Omega_{T'}^0) \otimes_{\mathcal{H}^{(r+1)}(\Omega_T^0)} \Delta_T^{(r+1)} \otimes_{\Delta_T^{(r+1)}} K[X_T] \otimes_{K[X_{T'}]} \Delta_{T'}^{(r)} \\ &\simeq \mathcal{H}^{(r)}(\Omega_{T'}^0) \otimes_{\mathcal{H}^{(r+1)}(\Omega_T^0)} K[X_T] \otimes_{K[X_{T'}]} \Delta_{T'}^{(r)}.\end{aligned}$$

On note $r : K[X_T] \to K[X_{T'}]$ la rétraction canonique de $F^* : K[X_{T'}] \to K[X_T]$ qui envoie $b \in X_T$ sur b' si $b = F^*b'$ et sur 0 sinon.

Soit $f \otimes b \otimes g$ un élément de $\mathcal{H}^{(r)}(\Omega_{T'}^0) \otimes_{\mathcal{H}^{(r+1)}(\Omega_T^0)} K[X_T] \otimes_{K[X_{T'}]} \Delta_{T'}^{(r)}$. On va démontrer que $f \otimes b \otimes g = 1 \otimes 1 \otimes fr(b)g$. Pour cela, on peut supposer par linéarité que b appartient à X_T. Si b est de la forme $b = F^*b'$ on a $r(b) = b'$ et le résultat est clair. Dans le cas contraire, notons $\tilde{f}$ l'élément $\tilde{f} = f(\frac{s}{p})\chi_0$ $(= F^! f)$ de $\mathcal{H}^{(r+1)}(\Omega_T^0)$. On a $(b^{-1}\tilde{f})(ps') = 0$ dans $\mathcal{H}^{(r)}(\Omega_{T'}^0)$ car $(b^{-1}\chi_0)(ps') = 0$ dans $\mathcal{H}^{(r)}(\Omega_{T'}^0)$. On a donc bien

$$\begin{aligned}f \otimes b \otimes g &= 1 \otimes \tilde{f}(b \otimes g) \\ &= 1 \otimes b \otimes (b^{-1}\tilde{f})(ps')g = 0.\end{aligned}$$

On tire de cela qu'on a un isomorphisme de K-espaces vectoriels

$$\mathcal{H}^{(r)}(\Omega_{T'}^0) \otimes_{\mathcal{H}^{(r+1)}(\Omega_T^0)} K[X_T] \otimes_{K[X_{T'}]} \Delta_{T'}^{(r)} \to \Delta_{T'}^{(r)}$$

qui à $f \otimes b \otimes g$ associe $fr(b)g$. On vérifie directement que c'est un isomorphisme de $(\Delta_{T'}^{(r)}, \Delta_{T'}^{(r)})$-bimodules.

La démonstration de (5) et (6) est toute pareille à celle de (3) et (4). □

On déduit de ce qui précède le résultat suivant.

Théorème 4.2. *Soit r un entier positif ou nul.*

(1) *Pour tout $\Delta_T^{(r)}$-module M, $F^{!(r)}M$ est naturellement muni d'une structure de $\Delta_T^{(r+1)}$-module à gauche et le foncteur $F^{!(r)}$ induit une équivalence de catégorie entre la catégorie des $\Delta_T^{(r)}$-modules (resp. modules cohérents) et celle des $\Delta_T^{(r+1)}$-modules (resp. modules cohérents).*
(2) *Le foncteur $F^{!\vee}$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des $\Delta_T^{\vee}$-modules (resp. modules cohérents) et elle-même de quasi-inverse le foncteur $F_+^{\vee}$.*

Démonstration. Démontrons (1). Soit Φ le foncteur $\operatorname{Mod}\Delta_{T'}^{(r)} \to \operatorname{Mod}\Delta_T^{(r+1)}$ défini par $M \mapsto \Delta_{T\to T'}^{(r+1,r)} \otimes_{\Delta_{T'}^{(r)}} M$ et soit Ψ le foncteur $\operatorname{Mod}\Delta_T^{(r+1)} \to \operatorname{Mod}\Delta_{T'}^{(r)}$ défini par $N \mapsto \Delta_{T'\leftarrow T}^{(r,r+1)} \otimes_{\Delta_T^{(r+1)}} N$. D'après 4.1 (3) et (4) on a des isomorphismes de foncteurs $\Psi \circ \Phi \simeq \mathrm{id}$ et $\Phi \circ \Psi \simeq \mathrm{id}$. De plus il est clair que Φ et Ψ préservent la cohérence.

Pour tout $\Delta_{T'}^{(r)}$-module M on a des isomorphismes

$$F^{!(r)}M = \Delta_{T\to T'}^{(r)} \otimes^L_{\Delta_{T'}^{(r)}} M \simeq \Delta_{T\to T'}^{(r)} \otimes_{\Delta_{T'}^{(r)}} M$$

car $\Delta_{T\to T'}^{(r)}$ est un $\Delta_{T'}^{(r)}$-module à droite libre. On en déduit le résultat car $F^{!(r)}M$ n'est autre que $\Phi(M)$ vu comme $\Delta_T^{(r)}$-module.

La démonstration de (2) est similaire en utilisant 4.1 (5) et (6) au lieu de 4.1 (3) et (4). □

Proposition 4.3. *Soient r et r' des entiers positifs ou nuls avec $r' \geq r$, k un entier strictement positif. Pour tout $\Delta_T^{(r)}$-module cohérent M on a des isomorphismes naturels*

$$\Delta_T^{(r'+k)} \otimes_{\Delta_T^{(r+k)}} F^{k!(r)}M \simeq F^{k!(r')}(\Delta_T^{(r')} \otimes_{\Delta_T^{(r)}} M)$$

et

$$\Delta_T^{\vee} \otimes_{\Delta_T^{(r+k)}} F^{k!(r)}M \simeq F^{k!\vee}(\Delta_T^{\vee} \otimes_{\Delta_T^{(r)}} M).$$

Démonstration. Il suffit de traiter le cas $k = 1$, qui est une conséquence directe du lemme suivant. □

Lemme 4.4. *Soient r et r' des entiers positifs ou nuls avec $r' \geq r$. On a un isomorphisme canonique de $(\Delta_T^{(r'+1)}, \Delta_{T'}^{(r)})$-bimodules*

$$\Delta_T^{(r'+1)} \otimes_{\Delta_T^{(r+1)}} \Delta_{T\to T'}^{(r+1,r)} \simeq \Delta_{T\to T'}^{(r'+1,r')} \otimes_{\Delta_{T'}^{(r)}} \Delta_{T'}^{(r)}$$

et de $(\Delta_T^{\vee}, \Delta_{T'}^{(r)})$-bimodules

$$\Delta_T^{\vee} \otimes_{\Delta_T^{(r+1)}} \Delta_{T\to T'}^{(r+1,r)} \simeq \Delta_{T\to T'}^{\vee} \otimes_{\Delta_{T'}^{(r)}} \Delta_{T'}^{(r)}.$$

Démonstration. On a un unique morphisme de $(\Delta_T^{(r'+1)}, \Delta_{T'}^{(r)})$-bimodules

$$\Phi : \Delta_T^{(r'+1)} \otimes_{\Delta_T^{(r+1)}} K[X_T] \otimes_{K[X_{T'}]} \Delta_{T'}^{(r)} \to K[X_T] \otimes_{K[X_{T'}]} \Delta_{T'}^{(r')} \otimes_{\Delta_{T'}^{(r')}} \Delta_{T'}^{(r)}$$

tel que $\Phi(f(s) \otimes b \otimes m) = b \otimes (b^{-1}f)(ps') \otimes m$ pour $f(s)$ dans $\mathcal{E}^{(r'+1)}(\Omega_T^0)$, b dans X_T et m dans $\Delta_{T'}^{(r)}$. Soit

$$\Psi : K[X_T] \otimes_{K[X_{T'}]} \Delta_{T'}^{(r')} \otimes_{\Delta_{T'}^{(r)}} \Delta_{T'}^{(r)} \to \Delta_T^{(r'+1)} \otimes_{\Delta_T^{(r+1)}} K[X_T] \otimes_{K[X_{T'}]} \Delta_{T'}^{(r)}$$

l'unique morphisme de $(\Delta_T^{(r'+1)}, \Delta_{T'}^{(r)})$-bimodules tel que

$$\Psi(b \otimes g(s') \otimes m) = b(\chi_0 g(\frac{s}{p})) \otimes b \otimes m$$

pour b dans X_T, $g(s')$ dans $\mathcal{E}^{(r')}(\Omega_{T'}^0)$, et m dans $\Delta_{T'}^{(r)}$. On vérifie directement que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}$. Remarquons que si b' est un élément de X_T qui a une classe différente de celle de b dans le quotient $K[X_T]/F^*K[X_{T'}]$, alors $(b'\chi_0)(s) \otimes b \otimes m = 0$ dans $\Delta_T^{(r'+1)} \otimes_{\Delta_T^{(r+1)}} K[X_T] \otimes_{K[X_{T'}]} \Delta_{T'}^{(r)}$. D'autre part on a $1 = \sum (b'\chi_0)(s)$ pour b' dans X_T décrivant un ensemble de représentants du quotient $K[X_T]/F^*K[X_{T'}]$. On en tire que

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi(f(s) \otimes b \otimes m) &= b(\chi_0(s))f(s) \otimes b \otimes m \\ &= f(s) \otimes b \otimes m. \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du premier énoncé. Celle du second est tout à fait similaire. □

Définition 4.5. *Un F-$\Delta_T^\vee$-module est un couple (M, Φ) avec M un $\Delta_T^\vee$-module et $\Phi : M \simeq F^{!\vee}M$ un isomorphisme de $\Delta_T^\vee$-modules. On dit que (M, Φ) est cohérent si M l'est.*

On déduit de ce qui précède l'énoncé suivant.

Théorème 4.6. *La catégorie des F-$\Delta_T^\vee$-modules cohérents est équivalente à la catégorie formée des $\Delta_T^{(0)}$-modules cohérents M munis d'un isomorphisme de $\Delta_T^{(1)}$-modules $\Delta_T^{(1)} \otimes_{\Delta_T^{(0)}} M \simeq F^{!(0)}M$. Le foncteur $F^{!\vee}$ induit une équivalence de catégories de la catégorie des F-$\Delta_T^\vee$-modules cohérents avec elle-même, de quasi-inverse induit par le foncteur $F_+^\vee$.*

Démonstration. Soit (M, Φ) un F-$\Delta_T^\vee$-module cohérent. Par cohérence, il existe un entier $r \geq 0$, un $\Delta_T^{(r)}$-module cohérent $M^{(r)}$ et un isomorphisme de $\Delta_T^{(r+1)}$-modules à gauche $\Phi^{(r)} : \Delta_T^{(r+1)} \otimes_{\Delta_T^{(r)}} M^{(r)} \simeq F^{!(r)}M^{(r)}$ tels que (M, Φ) se déduise de $(M^{(r)}, \Phi^{(r)})$ par extension des scalaires. D'après le théorème 4.2 et la proposition 4.3, on peut supposer que $r = 0$, et de plus le couple $(M^{(0)}, \Phi^{(0)})$ est unique à isomorphisme près. On a alors un foncteur bien défini $(M, \Phi) \mapsto (M^{(0)}, \Phi^{(0)})$ de quasi-inverse donné par l'extension des scalaires. Le reste de l'énoncé résulte du théorème 4.2 (2). En effet soit (M, Φ) un F-$\Delta_T^\vee$-module cohérent. On associe à (M, Φ) le module $F^{!\vee}M$ et l'isomorphisme $F^{!\vee}M \simeq F^{!\vee}F^{!\vee}M$ obtenu à partir de Φ par fonctorialité. De même on obtient à partir de Φ et du théorème 4.2 (2) des isomorphismes

$$F_+^\vee M \simeq F_+^\vee F^{!\vee} M \simeq M \simeq F^{!\vee} F_+^\vee M$$

qui permettent de munir $F_+^\vee M$ d'une structure de F-$\Delta_T^\vee$-module cohérent. Les deux foncteurs ainsi définis sont quasi-inverses l'un de l'autre. □

5. F-Δ_T-Modules holonomes

Définition 5.1.

(1) *Un F-Δ_T-module holonome est un couple (M, Φ) avec M un Δ_T-module holonome (i.e. le D_T-module associé à M est holonome) et Φ un isomorphisme de $\Delta_T^\vee$-modules*

$$\Phi : \Delta_T^\vee \otimes_{\Delta_T} M \longrightarrow F^{!\vee}(\Delta_T^\vee \otimes_{\Delta_T} M).$$

(2) *On note $D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_T)$ la catégorie formée des couples (K, Φ) avec K un objet de $D^b_{\mathrm{hol}}(\Delta_T)$ et Φ un isomorphisme dans $D^b(\Delta_T^\vee)$*

$$\Phi : \Delta_T^\vee \otimes^L_{\Delta_T} K \longrightarrow F^{!\vee}(\Delta_T^\vee \otimes^L_{\Delta_T} K).$$

Pour tout entier $r \geq 1$ on définit de même les F^r-Δ_T-modules holonomes et la catégorie $D^b_{\mathrm{hol}}(F^r\text{-}\Delta_T)$ en remplaçant F par F^r.

Dans la suite de ce travail, pour tout objet K de $D^-(\Delta_T)$, on posera $K^\vee := \Delta_T^\vee \otimes^L_{\Delta_T} K$.

5.2. *Exemples de F-Δ_T-modules holonomes*

5.2.1. Le module trivial. Pour $T = \mathbf{G}^n_{m,K}$, $M = \Delta_T/\Delta_T(s_1, \cdots, s_n)$, on a $M^\vee \simeq \Delta_T^\vee/\Delta_T^\vee(s_1, \cdots, s_n)$ et le morphisme $\Phi : M^\vee \to F^{!\vee}M^\vee$ défini par $\Phi(1) = 1 \otimes 1$ est un isomorphisme.

5.2.2 Le module de Dirac. Pour $T = \mathbf{G}_{m,K}$, et $a \in K^\times$ on pose $M_a = \Delta_T/\Delta_T(\tau - a)$. C'est le module associé à la distribution de Dirac en a. On a $M_a^\vee \simeq \Delta_T^\vee/\Delta_T^\vee(\tau - a)$.

Proposition 5.2.2.1. *Les $\Delta_T^\vee$-modules $M_a^\vee$ et $F^{!\vee}M_{a^p}^\vee$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration. Soit $\Phi : M_a^\vee \to F^{!\vee}M_{a^p}^\vee$ le morphisme défini par $\Phi(1) = \sum_{i=0}^{p-1} \tau^i \otimes a^{-i}$. Ce morphisme est bien défini car on a

$$\begin{aligned}\Phi(\tau - a) &= \sum_{i=0}^{p-1}(\tau^{i+1} \otimes a^{-i} - \tau^i \otimes a^{-(i-1)}) = \tau^p \otimes a^{-(p-1)} - 1 \otimes a \\ &= 1 \otimes \tau a^{-(p-1)} - 1 \otimes a = 0.\end{aligned}$$

On définit un morphisme $\Psi : F^{!\vee}M_{a^p}^{\vee} \to M_a^{\vee}$ par $\Psi(1 \otimes 1) = \chi_0$. (Rappelons que χ_0 est la fonction caractéristique du disque fermé de centre 0 et de rayon $|p|$.) Ce morphisme est bien défini car on a

$$\begin{aligned}\Psi(1 \otimes (\tau - a^p)) &= \Psi((\tau^p - a^p) \otimes 1) = (\tau^p - a^p)\chi_0\\ &= \chi_0(\tau^p - a^p) = 0,\end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de la relation $\tau^p - a^p = 0$ dans $M_a^{\vee}$.

Les morphismes Φ et Ψ sont inverses l'un de l'autre. En effet on a

$$\begin{aligned}\Phi \circ \Psi(1 \otimes 1) &= \Phi(\chi_0) = \chi_0 \sum_{i=0}^{p-1} \tau^i \otimes a^{-i}\\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \tau^i \chi_0(s-i)(1 \otimes a^{-i}) = \sum_{i=0}^{p-1} \tau^i \otimes \chi_0(ps-i)a^{-i}\\ &= 1 \otimes 1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Psi \circ \Phi(1) &= \Psi(\sum_{i=0}^{p-1} \tau^i \otimes a^{-i}) = \sum_{i=0}^{p-1} \tau^i \chi_0(s) a^{-i}\\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \chi_0(s+i)\tau^i a^{-i} = \sum_{i=0}^{p-1} \chi_0(s+i) = 1. \square\end{aligned}$$

Corollaire 5.2.2.2. *Si a vérifie $|a| = 1$, le module M_a est naturellement muni d'une structure de F-Δ_T-module holonome.*

Démonstration. En effet, d'après 3.6.2, on a un isomorphisme canonique $M_a \simeq M_{a^p}$. $\square$

5.2.3 Le module de Dwork. On suppose que K contient π vérifiant $\pi^{p-1} = -p$. Pour $T = \mathbf{G}_{m,K}$, on pose $M = \Delta_T/\Delta_T(\tau + \frac{s}{\pi})$. C'est le module associé à l'exponentielle de Dwork. On a $M^{\vee} \simeq \Delta_T^{\vee}/\Delta_T^{\vee}(\tau + \frac{s}{\pi})$.

On définit ici $\Phi : M^{\vee} \to F^{!\vee}M^{\vee}$ par $\Phi(1) = \sum_{i=0}^{p-1} \tau^i \otimes \gamma_p(ps - i, s)$. C'est un morphisme bien défini car on a

$$\begin{aligned}\Phi(\tau + \frac{s}{\pi}) &= (\tau + \frac{s}{\pi})\sum_{i=0}^{p-1} \tau^i \otimes \gamma_p(ps-i,s)\\ &= \sum_{i=0}^{p-1}(\tau^{i+1} \otimes \gamma_p(ps-i,s) + \tau^i \frac{(s-i)}{\pi}(1 \otimes \gamma_p(ps-i,s)))\\ &= \sum_{i=0}^{p-1}(\tau^{i+1} \otimes \gamma_p(ps-i,s) + \tau^i \otimes \frac{(ps-i)}{\pi}\gamma_p(ps-i,s))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{p-1}(\tau^{i+1} \otimes \gamma_p(ps - i, s) - \tau^i \otimes \gamma_p(ps - (i-1), s)) \\
&= \tau^p \otimes \gamma_p(ps - (p-1), s) - 1 \otimes \gamma_p(ps+1, s) \\
&= 1 \otimes \tau\gamma_p(ps - (p-1), s) - 1 \otimes \gamma_p(ps+1, s) \\
&= 1 \otimes \gamma_p(p(s+1) - (p-1), s+1)(-\frac{s}{\pi}) - 1 \otimes \gamma_p(ps+1, s) \\
&= 1 \otimes \gamma_p(ps+1, s+1)(-\frac{s}{\pi}) - 1 \otimes \gamma_p(ps+1, s) = 0.
\end{aligned}$$

L'isomorphisme inverse est Ψ défini par $\Psi(1 \otimes 1) = \chi_0\gamma_p(s, \frac{s}{p})^{-1}$. Il est bien défini car on a

$$\Psi(1 \otimes (\tau + \frac{s}{\pi})) = \Psi((\tau^p + \frac{s}{p\pi})(1 \otimes 1)) = (\tau^p + \frac{s}{p\pi})\chi_0\gamma_p(s, \frac{s}{p})^{-1}$$

et

$$\begin{aligned}
\tau^p\chi_0\gamma_p(s, \frac{s}{p})^{-1} &= \chi_0\gamma_p(s+p, \frac{s}{p}+1)^{-1}\tau^p = \chi_0\gamma_p(s+p, \frac{s}{p}+1)^{-1}\frac{(s)_p}{(-\pi)^p} \\
&= \chi_0\gamma_p(s, \frac{s}{p}+1)^{-1} = \chi_0(-\frac{s}{p\pi})\gamma_p(s, \frac{s}{p})^{-1}.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\Phi \circ \Psi(1 \otimes 1) &= \chi_0\gamma_p(s, \frac{s}{p})^{-1}\sum_{i=0}^{p-1}\tau^i \otimes \gamma_p(ps - i, s) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1}\tau^i\chi_0(s-i)\gamma_p(s-i, \frac{s-i}{p})^{-1}(1 \otimes \gamma_p(ps-i, s)) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1}\tau^i \otimes \chi_0(ps - i) = 1 \otimes 1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Psi \circ \Phi(1) &= \Psi(\sum_{i=0}^{p-1}\tau^i \otimes \gamma_p(ps - i, s)) \\
&= \Psi(\sum_{i=0}^{p-1}\tau^i\chi_0(s)\gamma_p(s-i, \frac{s}{p})(1 \otimes 1)) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1}\tau^i\chi_0(s)\gamma_p(s-i, \frac{s}{p})\Psi(1 \otimes 1) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1}\tau^i\chi_0(s)\gamma_p(s-i, \frac{s}{p})\gamma_p(s, \frac{s}{p})^{-1} \\
&= \sum_{i=0}^{p-1}\chi_0(s+i)\gamma_p(s, \frac{s+i}{p})\gamma_p(s+i, \frac{s+i}{p})^{-1}\tau^i
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1} \chi_0(s+i) \left(\frac{(s)_i}{(-\pi)^i}\right)^{-1} \left(\frac{(s)_i}{(-\pi)^i}\right) = 1.$$

De même, si on pose $M' = \Delta_T/\Delta_T(\tau - \frac{s}{\pi})$, on obtient un F-Δ_T-module holonome en remplaçant partout dans les formules γ_p par γ'_p définie par

$$\gamma'_p(s, s') = \gamma_p(1-s, 1-s')^{-1}.$$

5.3. Stabilité par les opérations

Proposition 5.3.1. *Soit $\varpi : T_1 \longrightarrow T_2$ un morphisme monomial.*

(1) Pour tout objet M de $D^b(\Delta_{T_1})$ on a un isomorphisme canonique

$$(\varpi_+ M)^\vee \simeq \varpi_+^\vee (M^\vee).$$

(2) Pour tout objet M de $D^b(\Delta_{T_2})$ on a un morphisme canonique

$$(\varpi^! M)^\vee \longrightarrow \varpi^{!\vee}(M^\vee).$$

Ce morphisme est un isomorphisme si ϖ est surjectif et si le nombre de composantes géométriquement connexes des fibres de ϖ est premier à p.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 3.5. □

Soit $\varpi : T_1 \longrightarrow T_2$ un morphisme monomial. On note F_1 et F_2 les morphismes de Frobenius relatifs à T_1 et T_2 respectivement. On suppose que $\varpi \circ F_1 = F_2 \circ \varpi$.

Nous allons construire un foncteur d'image directe

$$\varpi_+ : D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T_1}) \longrightarrow D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T_2}).$$

Soit (M, Φ) un objet de $D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T_1})$. Par la théorie des $\mathscr{D}$-modules holonomes algébriques [B], $\varpi_+ M$ est un objet de $D^b_{\mathrm{hol}}(\Delta_{T_2})$. En appliquant le foncteur $F_2^{!\vee} \varpi_+^\vee F_{1+}^\vee$ à l'isomorphisme $\Phi : M^\vee \simeq F_1^{!\vee}(M^\vee)$ on obtient un isomorphisme $(\varpi_+ M)^\vee \simeq F_2^{!\vee}(\varpi_+ M)^\vee$ car on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} F_2^{!\vee} \varpi_+^\vee F_{1+}^\vee (M^\vee) &\simeq F_2^{!\vee} F_{2+}^\vee \varpi_+^\vee (M^\vee) \\ &\simeq \varpi_+^\vee (M^\vee) \\ &\simeq (\varpi_+ M)^\vee \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_2^{!\vee} \varpi_+^\vee F_{1+}^\vee F_1^{!\vee} (M^\vee) &\simeq F_2^{!\vee} \varpi_+^\vee (M^\vee) \\ &\simeq F_2^{!\vee} (\varpi_+ M)^\vee \end{aligned}$$

d'après 4.2 (2) et 5.3.1.

Quand ϖ est surjectif et que le nombre de composantes géométriquement connexes des fibres de ϖ est premier à p, on peut de même construire un foncteur d'image inverse

$$\varpi^! : D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T_2}) \longrightarrow D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T_1}).$$

En effet, si (M, Φ) est un objet de $D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T_2})$, par la théorie des $\mathcal{D}$-modules holonomes algébriques [B], $\varpi^! M$ est un objet de $D^b_{\mathrm{hol}}(\Delta_{T_1})$, et de l'isomorphisme $\Phi : M^\vee \simeq F_2^{!\vee}(M^\vee)$, on déduit un isomorphisme $(\varpi^! M)^\vee \simeq F_1^{!\vee}(\varpi^! M)^\vee$ en appliquant le foncteur $\varpi^{!\vee}$ car on a des isomorphismes

$$\varpi^{!\vee}(M^\vee) \simeq (\varpi^! M)^\vee$$

et

$$\begin{aligned} \varpi^{!\vee} F_2^{!\vee}(M^\vee) &\simeq F_1^{!\vee} \varpi^{!\vee}(M^\vee) \\ &\simeq F_1^{!\vee}(\varpi^! M)^\vee \end{aligned}$$

d'après 4.2 (2) et 5.3.1.

Remarques. 1) Soit $\varpi : T_1 \to T_2$ un morphisme monomial tel que $\varpi \circ F_1 = F_2 \circ \varpi$. Si (M, Φ) est un objet de $D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T_2})$ tel que le morphisme canonique $(\varpi^! M)^\vee \to \varpi^{!\vee} M^\vee$ est un isomorphisme, alors on peut définir $\varpi^!(M, \Phi)$ dans $D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T_1})$ comme précédemment.
2) Tout ce qui précède s'étend sans changement aux catégories $D^b_{\mathrm{hol}}(F^r\text{-}\Delta_T)$.

Dans le cas général, même si $\varpi : T_1 \to T_2$ est un morphismes de tores, le foncteur $\varpi^! : D^b_{\mathrm{hol}}(\Delta_{T_2}) \to D^b_{\mathrm{hol}}(\Delta_{T_1})$ ne se relève pas en un foncteur $D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T_2}) \longrightarrow D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T_1})$. En effet, on a l'exemple suivant.

Example 5.3.2. *Pour k un entier, on note ϖ_k le morphisme $\mathbf{G}_{m,K} \to \mathbf{G}_{m,K}$ donné par $x \mapsto x^k$. Soit $M = \Delta_{\mathbf{G}_{m,K}}/\Delta_{\mathbf{G}_{m,K}}(\tau + \frac{s}{\pi})$. Pour k non nul divisible par p le module holonome $\varpi_k^! M$ n'est pas sous-jacent à un F-$\Delta_{\mathbf{G}_{m,K}}$-module holonome. En particulier le morphisme canonique $(\varpi_k^! M)^\vee \to \varpi_k^{!\vee} M^\vee$ n'est pas un isomorphisme.*

Démonstration. On a un isomorphisme $\varpi_k^! M \simeq \Delta_{\mathbf{G}_{m,K}}/\Delta_{\mathbf{G}_{m,K}}(\tau^k + \frac{s}{k\pi})$. Posons $E = \varpi_k^! M \otimes_{K[s]} K(s)$. Les images de $1, \tau, \cdots, \tau^{k-1}$ dans E forment une base de E comme $K(s)$-espace vectoriel. Dans cette base la matrice de l'opérateur de multiplication par τ est la matrice compagnon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & -\frac{s}{k\pi} \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\varpi_k^! M$ était sous-jacent à un F-$\Delta_{\mathbf{G}_{m,K}}$-module holonome, il existerait par 6.2.1 une matrice $B(s, s')$ localement méromorphe en s' sur $\mathbf{Z}_p$, pour $ps' - s$ dans $\mathbf{Z}$ fixé, telle que

$$B(s+1, s') = A\,B(s, s') \quad \text{et} \quad B(s, s'+1)A = B(s, s').$$

Posons
$$d(s,s') = (\det B(s,s'))/\gamma_p(s,s').$$
Comme le déterminant de A est égal à $(-1)^k \frac{s}{k\pi}$, on aurait
$$d(s+1,s') = \frac{(-1)^{k-1}}{k} d(s,s') \quad \text{et} \quad d(s,s'+1) = (-1)^{k-1} k d(s,s')$$
et on ne pourrait avoir
$$\left| \frac{d(s+p^{r+1}, s'+p^r)}{d(s,s')} \right| \to 1 \quad \text{quand} \quad r \to \infty. \quad \square$$

Remarque. A partir de l'exemple précédent on peut construire un exemple avec ϖ une immersion de tores. En effet, soit $\varpi : \mathbf{G}_{m,K} \to \mathbf{G}^2_{m,K}$ donné par $x \mapsto (x,1)$. Soit M le transformé de Mellin du D-module engendré par $\exp(\pi x_1^k x_2)$. Comme l'isomorphisme $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_1'^{-k} x_2'$ transforme $\exp(\pi x_1^k x_2)$ en $\exp(\pi x_2')$, M est sous-jacent à un F-$\Delta_{\mathbf{G}^2_{m,K}}$-module holonome. Par contre, si p divise k et si k n'est pas nul, le module $\varpi^! M[1] \simeq \Delta_{\mathbf{G}_{m,K}} / \Delta_{\mathbf{G}_{m,K}}(\tau^k + \frac{s}{k\pi})$ n'est pas sous-jacent à un F-$\Delta_{\mathbf{G}_{m,K}}$-module holonome.

Au vu des exemples précédents, la nature des hypothèses garantissant que, pour $\varpi : T_1 \to T_2$ un morphisme monomial commutant au Frobenius et pour (M, Φ) un objet de $D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T_2})$, l'image inverse $\varpi^! M$ est sous-jacente à un objet de $D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T_2})$ n'est pas très claire.

Nous proposons la conjecture suivante, pour les modules exponentiels.

Conjecture 5.3.3. *Soit A une matrice dans $M_{m,N}(\mathbf{Z})$.*
Pour $a = (a_1, \cdots, a_N)$ dans K^N on note $\varpi_{A,a}$ le morphisme monomial
$$\varpi_{A,a} : \begin{cases} \mathbf{G}^m_{m,K} & \to & \mathbf{G}^N_{m,K} \\ (x_i) & \mapsto & (y_j = a_j \prod x_i^{A_{ij}}) \end{cases}$$
Soit M le transformé de Mellin du D-module sur $\mathbf{G}^N_{m,K}$ engendré par $\exp(\sum_j \pi y_j)$. Il existe un ensemble fini de nombres premiers $F(A)$ tel que si p n'appartient pas à $F(A)$, et si les a_i sont des éléments de K vérifiant $|a_i| = 1$, le morphisme canonique $(\varpi^!_{A,a} M)^\vee \to \varpi^{!\vee}_{A,a} M^\vee$ est un isomorphisme. En particulier, si les a_i vérifient $a_i = a_i^p$, $\varpi^!_{A,a} M$ est sous-jacent à un objet de $D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{\mathbf{G}^m_{m,K}})$.

Le cas $m = 0$ et $N = 1$ de la conjecture est conséquence de la proposition suivante.

Proposition 5.3.4. *Soit $T = \mathbf{G}_{m,K}$. Pour λ dans $K^\times$ on note i_λ l'inclusion $\{\lambda\} \to T$. Soit π dans K vérifiant $|\pi^{p-1}| = |p|$. On pose $M = \Delta_T / \Delta_T(\tau + \frac{s}{\pi})$.*

(1) Si $|\lambda| \le 1$ on a $i_\lambda^{!\vee}(M^\vee) \simeq K[-1]$ et le morphisme canonique $(i_\lambda^!(M))^\vee \to i_\lambda^{!\vee}(M^\vee)$ est un isomorphisme.
(2) Si $|\lambda| > 1$ on a $i_\lambda^{!\vee}(M^\vee) = 0$ et le morphisme canonique $(i_\lambda^!(M))^\vee \to i_\lambda^{!\vee}(M^\vee)$ n'est pas un isomorphisme.

Démonstration. On va commencer par établir le lemme suivant qui laisse présager l'existence d'une théorie générale de théorèmes d'indice et de théorèmes de comparaison pour les équations aux différences p-adiques.

Lemme 5.3.5. *Soit* $L : {}^{\dagger}\mathcal{A}(\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}}) \to {}^{\dagger}\mathcal{A}(\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}})$ *l'opérateur donné par*

$$L(\varphi)(s) = -(\frac{s}{\pi})\varphi(s+1) - \lambda\varphi(s).$$

et $\bar{L} : H^0(\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}}, \mathcal{O}_{\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}}}) \to H^0(\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}}, \mathcal{O}_{\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}}})$ *l'opérateur défini par restriction. On a* $\mathrm{Ker} L = 0$ *et* $\dim_K \mathrm{Coker}\bar{L} = 1$. *Si* $|\lambda| \leq 1$ *on a* $\dim_K \mathrm{Coker} L = 1$ *et le morphisme canonique* $\mathrm{Coker}\bar{L} \to \mathrm{Coker} L$ *est un isomorphisme. Si* $|\lambda| > 1$ *on a* $\mathrm{Coker} L = 0$.

Démonstration. On pose, pour tout entier $n \geq 0$, $\left\{ {s \atop n} \right\} = \prod_{i=0}^{n-1}(\frac{-s-i}{\pi})$. On a $\left\{ {s \atop n} \right\} = (-\pi)^{-n} n! \binom{s}{n}$. Compte tenu du fait que la valuation p-adique de $\frac{\pi^n}{n!}$ vérifie, pour $n \geq 2$,

$$0 \leq v_p(\frac{\pi^n}{n!}) \leq C \log n$$

avec $C > 0$, une fonction $f : \mathbf{Z}_p \to K$ définit un élément de ${}^{\dagger}\mathcal{A}(\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}})$ si et seulement si elle est de la forme $f(s) = \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n \left\{ {s \atop n} \right\}$ les a_n étant dans K et vérifiant une inégalité $|a_n| < AB^n$ avec $A > 0$ et $1 > B > 0$.

Soit $f(s) = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n \left\{ {s \atop n} \right\}$ un élément de ${}^{\dagger}\mathcal{A}(\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}})$. On a $L(f)(s) = \sum_{n\in\mathbf{N}}(a_{n-1} - \lambda a_n)\left\{ {s \atop n} \right\}$ avec la convention $a_{-1} = 0$. On en tire la nullité de $\mathrm{Ker} L$. Comme $\bar{L}$ augmente le degré en s de 1, $\mathrm{Coker}\bar{L}$ est de rang 1 engendré par la classe de 1.

Supposons que l'on ait $|\lambda| \leq 1$. Si a_n est une suite d'éléments de K, convergeant vers 0, on pose, pour tout $n \geq 0$, $b_n = \lambda^{-n-1}(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \lambda^i)$. Si les $|a_n|$ vérifient l'inégalité $|a_n| < AB^n$ avec $A > 0$ et $1 > B > 0$, la suite $|b_n|$ vérifie l'inégalité $|b_n| < AB^{n+1}$. Par conséquent, si $f(s) = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n \left\{ {s \atop n} \right\}$ appartient à ${}^{\dagger}\mathcal{A}(\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}})$, il en est de même de la fonction $\varphi(s) = \sum_{n\in\mathbf{N}} b_n \left\{ {s \atop n} \right\}$. Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$\left\{ {s \atop n} \right\} = -\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{n-1-i} \left\{ {s+1 \atop i} \right\}\Big)\frac{s}{\pi} - \lambda\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{n-1-i}\left\{ {s \atop i} \right\}\Big) + \lambda^n.$$

On en déduit la relation $f(s) = L(\varphi)(s) + \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n \lambda^n$. On a donc démontré que le K-espace vectoriel $\mathrm{Coker} L$ est engendré par la classe de 1. Il reste à vérifier que cette classe n'est pas nulle. Mais si on avait $1 = L(\varphi)(s)$ avec $\varphi(s) = \sum_{n\in\mathbf{N}} b_n \left\{ {s \atop n} \right\}$, on aurait $b_n = -\lambda^{-n-1}$, ce qui est absurde.

Supposons que l'on ait $|\lambda| > 1$. Si a_n est une suite d'éléments de K, on pose, pour tout $n \geq 0$, $b_n = -\lambda^{-n-1}(\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i)$. Si les $|a_n|$ vérifient l' inégalité $|a_n| < AB^n$ avec $A > 0$ et $1 > B > 0$, la suite $|b_n|$ vérifie une inégalité du même type. En effet, si $B|\lambda| \leq 1$, on a $|a_i\lambda^i| < A$ et donc $|b_n| < A|\lambda|^{-n-1}$, et si $B|\lambda| > 1$, on a $|a_i\lambda^i| < AB^i|\lambda|^i$ et donc $|b_n| < AB^n|\lambda|^{-1}$. On en déduit que si $f(s) = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n \left\{ {s \atop n} \right\}$ appartient à $\mathcal{A}(\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}})$, il en est de même de la fonction $\varphi(s) = \sum_{n\in\mathbf{N}} b_n \left\{ {s \atop n} \right\}$. Par construction, pour tout $n \geq 0$, on a $a_n = b_{n-1} - \lambda b_n$, et par conséquent $L(\varphi) = f$. □

Remarquons que les morphismes canoniques

$$H^0(\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}}, \mathcal{O}_{\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}}}) \longrightarrow M$$

et

$$\mathcal{A}(\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}}) \longrightarrow M^\vee \simeq \Delta_T^\vee / \Delta_T^\vee(\tau + \frac{s}{\pi})$$

sont des isomorphismes de K-espaces vectoriels. Par conséquent, si f appartient à $\mathcal{A}(\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}})$ (resp. à $H^0(\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}}, \mathcal{O}_{\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}}})$) la relation $\tau - \lambda f = 0$ dans $M^\vee$ (resp. M) est équivalente à $L(f) = 0$. On déduit alors du lemme que $H^0 i^!_\lambda M = 0$ et $H^0 i^{!\vee}_\lambda M^\vee = 0$.

D'autre part, remarquons que si $f = L(\varphi)$ on a la relation

$$f(s) = -\varphi(s+1)(\tau + \frac{s}{\pi}) + (\tau - \lambda)\varphi(s).$$

Par conséquent, si $|\lambda| > 1$, on a $H^1 i^{!\vee}_\lambda M^\vee = 0$. De même $H^1 i^!_\lambda M$ est engendré comme K-espace vectoriel par la classe de 1, ainsi que, si $|\lambda| \leq 1$, $H^1 i^{!\vee}_\lambda M^\vee$. Pour conclure il rest à vérifier que dans ces deux cas la classe de 1 n'est pas nulle. Si elle était nulle, on aurait une relation de la forme

$$1 = -(\sum_{-k}^{k} \tau^i \psi_i(s))(\tau + \frac{s}{\pi}) + (\tau - \lambda)(\sum_{-k'}^{k'} \tau^i \varphi_i(s))$$

avec, suivant le cas, les ψ_i et les φ_i dans $H^0(\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}}, \mathcal{O}_{\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}}})$ ou $\mathcal{A}(\Omega^0_{\mathbf{G}_{m,K}})$. Quitte à augmenter k', on peut supposer que $k = 0$. En développant, on constate alors que nécessairement $k' = 0$, et le lemme permet de conclure. □

5.3.6 Produit tensoriel externe et produit de convolution. Soient T_1 et T_2 des K-tores déployés. Soit (M_1, Φ_1) (resp. (M_2, Φ_2)) un objet de $D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T_1})$ (resp. $D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T_2})$). On définit un isomorphisme

$$\Phi : (M_1 \boxtimes M_2)^\vee \simeq F^{!\vee}(M_1 \boxtimes M_2)^\vee$$

en composant les isomorphismes

$$\begin{aligned}(M_1 \boxtimes M_2)^\vee &\simeq M_1^\vee \boxtimes^\vee M_2^\vee \\ &\simeq (F^{!\vee} M_1^\vee) \boxtimes^\vee (F^{!\vee} M_2^\vee) \\ &\simeq F^{!\vee}(M_1^\vee \boxtimes^\vee M_2^\vee) \\ &\simeq F^{!\vee}((M_1 \boxtimes M_2)^\vee).\end{aligned}$$

On définit ainsi un bifoncteur $\boxtimes : D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T_1}) \times D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T_2}) \rightarrow D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T_1 \times T_2})$.

Lorsque $T_1 = T_2 = T$, on en déduit en composant avec le foncteur

$$\varpi_+ : D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T\times T}) \to D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_T),$$

pour $\varpi : T \times T \to T$ le morphisme produit, un bifoncteur $* : D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_T) \times D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_T) \to D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_T)$, qui relève le produit de convolution sur $D^b_{\mathrm{hol}}(\Delta_T)$.

Si M_1 et M_2 sont des objets de $D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_T)$, on a un isomorphisme canonique

$$M_1 \otimes^L_{K[X_T]} M_2 \simeq \delta^!(M_1 \boxtimes M_2)[n]$$

(cf. [B] p. 346), avec $\delta : T \to T \times T$ l'inclusion diagonale et n la dimension de T.

Nous ne savons pas s'il est raisonnable de penser que, bien que le foncteur $\delta^!$ n'admette pas de relèvement aux catégories $D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta)$ (cf. la remarque suivant 5.3.2), le bifoncteur $(M_1, M_2) \mapsto M_1 \otimes^L_{K[X_T]} M_2$ se relève à la catégorie $D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_T)$.

5.4. *Variantes relatives*

Dans ses travaux ([D1], [D2], [D3]), Dwork étudie des situations "avec paramètres". Nous indiquons ici comment la définition 5.1 des F-Δ-modules holonomes peut être généralisée de façon à englober les situations relatives étudiées par Dwork.

Pour r un entier positif, on note $K(\lambda) = K(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ le corps des fractions rationnelles en r variables sur K et on note $\overline{K(\lambda)}$ le complété de $K(\lambda)$ pour la norme de Gauss. On note φ le morphisme $K(\lambda) \to K(\lambda)$ donné par $P(\lambda) \mapsto P(\lambda^p)$. Soit T un $K(\lambda)$-tore déployé. Si M est un Δ_T-module, on note M^φ le Δ_T-module $M^\varphi := M \otimes_\varphi K(\lambda)$. Si M est un objet de $D^b(\Delta_T)$ on pose $M^\varphi := M \otimes^L_\varphi K(\lambda)$. C'est un objet de $D^b(\Delta_T)$.

Définition 5.4.1. *Soit T un $K(\lambda)$-tore déployé. On pose $\overline{T} := T \times_{K(\lambda)} \overline{K(\lambda)}$.*

(1) Un F_φ-Δ_T-module holonome est un couple (M, Φ) avec M un Δ_T-module holonome et Φ un isomorphisme de $\Delta^\vee_{\overline{T}}$-modules

$$\Phi : \Delta^\vee_{\overline{T}} \otimes_{\Delta_T} M \longrightarrow F^{!\vee}(\Delta^\vee_{\overline{T}} \otimes_{\Delta_T} M^\varphi).$$

(2) On note $D^b_{\mathrm{hol}}(F_\varphi\text{-}\Delta_T)$ la catégorie formée des couples (K, Φ) avec K un objet de $D^b_{\mathrm{hol}}(\Delta_T)$ et Φ un isomorphisme dans $D^b(\Delta^\vee_{\overline{T}})$

$$\Phi : \Delta^\vee_{\overline{T}} \otimes^L_{\Delta_T} K \longrightarrow F^{!\vee}(\Delta^\vee_{\overline{T}} \otimes^L_{\Delta_T} K^\varphi).$$

Pour tout entier $r \geq 1$ on définit de même les F^r_φ-Δ_T-modules holonomes et la catégorie $D^b_{\mathrm{hol}}(F^r_\varphi\text{-}\Delta_T)$ en remplaçant F par F^r.

Nous proposons l'analogue suivant de la conjecture 5.3.3.

Soit A une matrice dans $M_{m,N}(\mathbf{Z})$. On note ϖ_A le morphisme monomial

$$\varpi_A : \begin{cases} \mathbf{G}^N_{m,K} \times \mathbf{G}^m_{m,K} & \to & \mathbf{G}^N_{m,K} \\ ((\lambda_j), (x_i)) & \mapsto & (y_j = \lambda_j \prod x_i^{A_{ij}}) \end{cases}$$

On identifie ici le tore $\mathbf{G}_{m,K}^N$ de gauche à $\operatorname{Spec} K[\lambda_i, \lambda_i^{-1}]$. Posons $T = \mathbf{G}_{m,K}^m \otimes_K K(\lambda)$. Pour tout objet L de $D_{\mathrm{hol}}^b(\Delta_{\mathbf{G}_{m,K}^N \times \mathbf{G}_{m,K}^m})$, le complexe $L \otimes_{K[\lambda_i, \lambda_i^{-1}]}^L K(\lambda)$ est un objet de $D_{\mathrm{hol}}^b(\Delta_T)$. En effet si on note $\mathcal{N}$ et $\mathcal{L}$ les D-modules correspondant à N et L par la transformation de Mellin, $\mathcal{L}$ est isomorphe, à décalage près, à l'image inverse de $\mathcal{N}$ par le morphisme $T \to \mathbf{G}_{m,K}^N \times \mathbf{G}_{m,K}^m$.

Conjecture 5.4.2. *Soit M le transformé de Mellin du D-module engendré par $\exp(\sum_j \pi y_j)$ sur le tore $\mathbf{G}_{m,K}^N$. Il existe un ensemble fini de nombres premiers $F(A)$ tel que si p n'appartient pas à $F(A)$, l'objet $(\varpi_A^! M) \otimes_{K[\lambda_i, \lambda_i^{-1}]}^L K(\lambda)$ est sous-jacent à un objet de $D_{\mathrm{hol}}^b(F_\varphi\text{-}\Delta_T)$.*

6. Variantes rationnelles

6.1. Pour toute partie multiplicative $\mathcal{B}$ de $H^0(\Omega_T, \mathcal{O}_{\Omega_T})^\times$, stable sous l'action de X_T par translation, on note $H^0(\Omega_T, \mathcal{O}_{\Omega_T})_{\mathcal{B}}$ l'algèbre obtenue par localisation, et on pose

$$\Delta_{T,\mathcal{B}} = \Delta_T \otimes_{H^0(\Omega_T, \mathcal{O}_{\Omega_T})} H^0(\Omega_T, \mathcal{O}_{\Omega_T})_{\mathcal{B}}.$$

Comme $\mathcal{B}$ est stable par translation, $\Delta_{T,\mathcal{B}}$ est munie de façon naturelle d'une structure de K-algèbre prolongeant celle de Δ_T. On définit de même des K-algèbres $\Delta_{T,\mathcal{B}}^\vee$ et $\Delta_{T,\mathcal{B}}^{(r)}$.

Soit $\varpi : T_1 \to T_2$ un morphisme monomial et soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des parties multiplicatives de $H^0(\Omega_{T_1}, \mathcal{O}_{\Omega_{T_1}})^\times$ et $H^0(\Omega_{T_2}, \mathcal{O}_{\Omega_{T_2}})^\times$ respectivement, stables par translation. On suppose que $\varpi_* \mathcal{B}_1$ est contenu dans $\mathcal{B}_2$.

Pour $? \in \{\,, (r), \vee\}$, on pose

$$\Delta_{T_1,\mathcal{B}_1 \to T_2,\mathcal{B}_2}^? := K[X_{T_1}] \otimes_{K[X_{T_2}]} \Delta_{T_2,\mathcal{B}_2}^?.$$

C'est de façon naturelle un $(\Delta_{T_1,\mathcal{B}_1}^?, \Delta_{T_2,\mathcal{B}_2}^?)$-bimodule. De même, on pose

$$\Delta_{T_2,\mathcal{B}_2 \leftarrow T_1,\mathcal{B}_1}^? := A_{T_2,\mathcal{B}_2} \otimes_{A_{T_1,\mathcal{B}_1}} \Delta_{T_1,\mathcal{B}_1}^?$$

avec, suivant le cas, $A_{T_i} = H^0(\Omega_{T_i}, \mathcal{O}_{\Omega_{T_i}})$, $\mathcal{B}^{(r)}(\Omega_{T_i}^0)$ ou $\mathcal{B}^\vee(\Omega_{T_i}^0)$. C'est de façon naturelle un $(\Delta_{T_2,\mathcal{B}_2}^?, \Delta_{T_1,\mathcal{B}_1}^?)$-bimodule.

A l'aide de ces bimodules on définit, de façon similaire à ce qui a été fait dans la section 3, des foncteurs

$$\varpi^! : D^-(\Delta_{T_2,\mathcal{B}_2}^?) \to D^-(\Delta_{T_1,\mathcal{B}_1}^?).$$

et

$$\varpi_+ : D^-(\Delta_{T_1,\mathcal{B}_1}^?) \to D^-(\Delta_{T_2,\mathcal{B}_2}^?).$$

On dira qu'un $\Delta_{T,\mathcal{B}}$-module M est holonome s'il est de la forme $M = \Delta_{T,\mathcal{B}} \otimes_{\Delta_T} N$ avec N un Δ_T-module holonome. On note $[F_*\mathcal{B}]$ la partie multiplicative de $H^0(\Omega_T, \mathcal{O}_{\Omega_T})^\times$, stable sous l'action de X_T par translation, engendrée par $F_*.\mathscr{B}$. Quand $.\mathscr{B}$ est égal à $[F_*.\mathscr{B}]$ on définit la catégorie des F-$\Delta_{T,.\mathscr{B}}$-modules holonomes comme la catégorie formée des couples (M,Φ) avec M un $\Delta_{T,.\mathscr{B}}$-module holonome et Φ un isomorphisme de $\Delta^{\vee}_{T,.\mathscr{B}}$-modules

$$\Phi : \Delta^{\vee}_{T,.\mathscr{B}} \otimes_{\Delta_{T,.\mathscr{B}}} M \longrightarrow F^{!\vee}(\Delta^{\vee}_{T,[F_*.\mathscr{B}]} \otimes_{\Delta_{T,.\mathscr{B}}} M).$$

De façon similaire on définit la catégorie $D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T,.\mathscr{B}})$ dont les objets sont les couples (M,Φ) avec M un objet de $D^b(\Delta_{T,.\mathscr{B}})$ provenant par extension des scalaires d'un objet de $D^b_{\mathrm{hol}}(\Delta_T)$ et Φ un isomorphisme

$$\Phi : \Delta^{\vee}_{T,.\mathscr{B}} \otimes^L_{\Delta_{T,.\mathscr{B}}} M \longrightarrow F^{!\vee}(\Delta^{\vee}_{T,[F_*.\mathscr{B}]} \otimes^L_{\Delta_{T,.\mathscr{B}}} M).$$

6.2. On suppose dans ce numéro que $.\mathscr{B} = H^0(\Omega_T, \mathcal{O}_{\Omega_T})^{\times}$. On écrit alors $\Delta_{T,\mathrm{rat}}$ au lieu de $\Delta_{T,.\mathscr{B}}$, etc...

Notons $K(\Omega_T)$ le corps des fractions de l'anneau $H^0(\Omega_T, \mathcal{O}_{\Omega_T})$. D'après le théorème 1.2.1 de [L-S] un $\Delta_{T,\mathrm{rat}}$-module est holonome si et seulement si il est de dimension finie comme $K(\Omega_T)$-espace vectoriel.

Soit M un $\Delta_{T,\mathrm{rat}}$-module holonome. On pose $M^{\vee} = \Delta^{\vee}_{T,\mathrm{rat}} \otimes_{\Delta_{T,\mathrm{rat}}} M$. On fixe un isomorphisme $T \simeq (\mathbf{G}_{m,K})^n$ et on reprend les notations de 3.1. On fixe une base e du $K(s_1, \cdots, s_n)$-espace vectoriel M. On note $A_i(s)$ la matrice de τ_i dans cette base, pour $1 \leq i \leq n$.

Proposition 6.2.1. *Le module M est sous-jacent à un F-$\Delta_{T,\mathrm{rat}}$-module holonome si et seulement si il existe une matrice carrée d'ordre n $B(s,s')$, dont les coefficients, pour $ps' - s \in \mathbf{Z}^n$ fixé, sont des fonctions (localement) méromorphes de s' sur $\mathbf{Z}_p^n$, qui vérifie les relations*

$$B(s + 1_i, s') = A_i(s)B(s,s') \tag{6.2.1.1}$$

et

$$B(s, s' + 1_i)A_i(s') = B(s,s') \tag{6.2.1.2}$$

pour $1 \leq i \leq n$, et qui soit inversible pour s' dans un ouvert dense de $\mathbf{Z}_p^n$ pour $ps' - s \in \mathbf{Z}^n$ fixé. A une telle matrice B correspond un isomorphisme $\Phi : M^{\vee} \to F^{!\vee}M^{\vee}$ déterminé par

$$\Phi(e) = \sum \tau^i \otimes B(ps - i, s)e, \tag{6.2.1.3}$$

pour i décrivant $\{0, \cdots, p-1\}^n$, d'inverse Ψ déterminé par

$$\Psi(1 \otimes e) = \chi_0 B(s, \frac{s}{p})^{-1}e \tag{6.2.1.4}$$

et réciproquement tout isomorphisme $\Phi : M^{\vee} \to F^{!\vee}M^{\vee}$ est de cette forme.

Démonstration. Soit $B(s,s')$ une matrice carrée d'ordre n dont les coefficients, pour $ps' - s \in \mathbf{Z}^n$ fixé, sont des fonctions (localement) méromorphes de s' sur $\mathbf{Z}_p^n$, qui vérifie les relations (6.2.1.1) et (6.2.1.2) pour $1 \leq i \leq n$, et qui soit inversible pour s' dans un ouvert dense de $\mathbf{Z}_p^n$ pour $ps' - s \in \mathbf{Z}^n$ fixé. Le fait que à une telle matrice B soit associé un isomorphisme $\Phi : M^\vee \to F^{!\vee}M^\vee$ donné par (6.2.1.3) d'inverse Ψ donné par (6.2.1.4) se vérifie par exactement les mêmes calculs que ceux effectués en 5.2.3. Pour la réciproque on va supposer pour simplifier les notations que $n = 1$, la démonstration dans le cas général étant essentiellement la même. Pour tout entier i dans $\mathbf{Z}$ on note $A^{[i]}(s)$ la matrice de τ^i dans la base e. Soit $\Phi : M^\vee \to F^{!\vee}M^\vee$. On peut écrire

$$\Phi(e) = \sum \tau^i \otimes \varphi_i(s)e$$

pour $i = 0, \cdots, p-1$, avec $\varphi_i(s)$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients localement méromorphes sur $\mathbf{Z}_p$. Le fait que Φ soit bien défini donne les relations

(6.2.1.5) $$\varphi_i(s) = A^{[i]}(ps - i)^{-1}\varphi_0(s)$$

pour $i = 1, \cdots, p-1$, et

(6.2.1.6) $$\varphi_0(s+1)A^{[1]}(s) = A^{[p]}(ps)\varphi_0(s).$$

Si Φ est inversible d'inverse Ψ déterminé par

$$\Psi(1 \otimes e) = \psi(s)e,$$

avec $\psi(s)$ une matrice à coefficients localement méromorphe, le fait que Ψ soit bien défini est équivalent à la relation

(6.2.1.7) $$\psi(s+p)A^{[p]}(s) = A^{[1]}(\frac{s}{p})\psi(s).$$

Le fait que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}$ est équivalent à la relation

(6.2.1.8) $$\psi(ps) = \varphi_0(s)^{-1} \quad \text{et} \quad \psi(ps - i) = 0 \text{ pour } i = 1, \cdots, p-1.$$

La relation $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}$ est alors conséquence des précédentes. Si, pour i dans $\mathbf{Z}$ et s' dans $\mathbf{Z}_p$, on pose

$$B(ps' + i, s') = A^{[i]}(ps')\varphi_0(s'),$$

il résulte des relations précédentes que la fonction $B(s, s')$ vérifie effectivement les propriétés requises. □

D'après le résultat suivant, les pôles de la matrice $B(s, s')$ et de son inverse sont situés sur des hyperplans rationnels translatés.

Théorème 6.2.2. *On suppose que le corps K est algébriquement clos. Soit M un F-$\Delta_{T,\mathrm{rat}}$-module holonome. Il existe un ensemble fini $\mathscr{L}$ de formes linéaires non nulles sur Ω_T induisant des formes linéaires à coefficients entiers premiers entre eux sur le réseau X_T, un ensemble fini $\mathscr{C}$ d'éléments de K, tels que, si $\mathscr{B}$ désigne la partie multiplicative de $H^0(\Omega_T, \mathscr{O}_{\Omega_T})^\times$ stable par translation, par F_* et par F_*^{-1} engendrée par les $\ell(s) + \alpha$ pour ℓ dans $\mathscr{L}$ et α dans $\mathscr{C}$, il existe* *un F-$\Delta_{T,\mathscr{B}}$-module holonome N tel que M se déduise de N par extension des scalaires.*

Démonstration. D'après le théorème 1.2.1 de [L-S] et le théorème 3.1 de [S], il existe un ensemble fini $\mathscr{S}$ de formes linéaires non nulles sur Ω_T induisant des formes linéaires à coefficients entiers premiers entre eux sur le réseau X_T, un ensemble fini $\mathscr{C}$ d'éléments de K, tels que, si $\mathscr{B}_0$ désigne la partie multiplicative de $H^0(\Omega_T, \mathscr{O}_{\Omega_T})^\times$ stable par translation engendrée par les $\ell(s) + \alpha$ pour ℓ dans $\mathscr{S}$ et α dans $\mathscr{C}$, il existe un $\Delta_{T,\mathscr{B}_0}$-module holonome N tel que M se déduise de N par extension des scalaires et tel que N soit un $H^0(\Omega_T, \mathscr{O}_{\Omega_T})_{\mathscr{B}_0}$ module libre de type fini.

On fixe un isomorphisme $T \simeq (\mathbf{G}_{m,K})^n$ et on reprend les notations de 3.1. Soit e une base de N comme $H^0(\Omega_T, \mathscr{O}_{\Omega_T})_{\mathscr{B}_0}$ module. Pour tout j dans $\mathbf{Z}^n$ on note $A^{[j]}(s)$ la matrice de $\tau^j (= \prod \tau_i^{j_i})$ dans la base e. Par construction les pôles des matrices $A^{[j]}(s)$ sont situés sur les hyperplans affines d'équation $\varphi(s) = 0$, avec φ dans $\mathscr{B}_0$ et les $A^{[j]}(s)$ sont inversibles en dehors de ces hyperplans.

Notons $B(s,s')$ la matrice associé à la base e (de M comme $K(s_1, \cdots, s_n)$-espace vectoriel) et à l'isomorphisme $\Phi : M^\vee \simeq F^{!\vee}M^\vee$ par la proposition 6.2.1. Soit $\mathscr{B}$ la partie multiplicative de $K(s_1, \cdots, s_n)^\times$ stable par translation, par F_* et par F_*^{-1} engendrée par $\mathscr{B}_0$ et soit U le complémentaire dans $\mathbf{Z}_p^n$ de la réunion des hyperplans affines d'équation $\varphi(s) = 0$ avec φ dans $\mathscr{B}$. Pour conclure il suffit d'établir que, pour i dans $\mathbf{Z}^n$, les matrices $B(ps - i, s)$ n'ont pas de pôle sur U et que $B(s, \frac{s}{p})$ est inversible sur $U \cap \mathbf{Z}_p^n$.

Soit s_0 dans U et soit i dans $\mathbf{Z}^n$. Si $B(ps - i, s)$ avait un pôle en $s = s_0$, elle aurait aussi un pôle en tous les translatés $s = s_0 + k$ pour k dans $\mathbf{Z}^n$, d'après (6.2.1.1) et (6.2.1.2). En particulier le lieu polaire de $B(ps - i, s)$ serait dense dans $\mathbf{Z}_p^n$, ce qui serait absurde. On vérifie de façon similaire que $B(s, \frac{s}{p})$ est inversible sur $U \cap \mathbf{Z}_p^n$.□

6.3. On reprend les notations de 5.4. Soit T un $K(\lambda)$-tore déployé. On définit de façon similaire à 5.4.1 les F_φ-$\Delta_{T,\mathrm{rat}}$-modules holonomes.

Soit M un $\Delta_{T,\mathrm{rat}}$-module holonome. On pose $M^\vee = \Delta_{T,\mathrm{rat}}^\vee \otimes_{\Delta_{T,\mathrm{rat}}} M$. On fixe un isomorphisme $T \simeq (\mathbf{G}_{m,K(\lambda)})^n$ et on reprend les notations de 3.1. On fixe une base e du $K(s_1, \cdots, s_n)(\lambda)$-espace vectoriel M. On note e' la base correspondante du $K(s_1, \cdots, s_n)(\lambda)$-espace vectoriel $M \otimes_\varphi K(\lambda)$. On note $A_i(s, \lambda)$ la matrice de τ_i dans la base e, pour $1 \leq i \leq n$.

On a l'analogue suivant de la proposition 6.2.1, avec la même démonstration.

Proposition 6.3.1. *Le module M est sous-jacent à un F_φ-$\Delta_{T,\mathrm{rat}}$-module holonome si et seulement si il existe une matrice carrée d'ordre n $B(s,s')$, dont les coefficients, pour $ps' - s \in \mathbf{Z}^n$ fixé, sont des fonctions (localement) méromorphes de s' sur $\mathbf{Z}_p^n$ à valeurs dans $\overline{K(\lambda)}$, qui vérifie les relations*

(6.3.1.1) $$B(s + 1_i, s') = A_i(s, \lambda)B(s, s')$$

et

(6.3.1.2) $$B(s,s'+1_i)A_i(s',\lambda^p)=B(s,s')$$

pour $1 \leq i \leq n$, *et qui soit inversible pour* s' *dans un ouvert dense de* $\mathbf{Z}_p^n$ *pour* $ps'-s \in \mathbf{Z}^n$ *fixé. A une telle matrice* B *correspond un isomorphisme* $\Phi : M^\vee \to F^{!\vee}(M^\varphi)^\vee$ *déterminé par*

$$\Phi(e)=\sum \tau^i \otimes B(ps-i,s)e',$$

pour i *décrivant* $\{0,\cdots,p-1\}^n$, *d'inverse* Ψ *déterminé par*

$$\Psi(1\otimes e')=\chi_0 B(s,\frac{s}{p})^{-1}e$$

et réciproquement tout isomorphisme $\Phi : M^\vee \to F^{!\vee}(M^\varphi)^\vee$ *est de cette forme.* □

Remarque. Les matrices de Frobenius construites par Dwork dans [D3] vérifient exactement les conditions 6.3.1.1 et 6.3.1.2.

7. Transformation de Laplace

Dans cette section on note K un corps de caractéristique nulle. Soit T un K-tore déployé. Soient $f_1,\cdots,f_r$ des éléments non nuls de $H^0(T,\mathcal{O}_T)$. On pose $T'=\operatorname{Spec}K[t_1,t_1^{-1},\cdots,t_r,t_r^{-1}]$ et $A'=\operatorname{Spec}K[t_1,\cdots,t_r]$. On note $i : T\times T' \to T\times A'$ l'inclusion, j le morphisme $T\to T\times A'$ qui à x associe $(x,(t_i=f_i(x)))$ et $p : T\times T'\to T$ la projection.

Pour tout α dans $K^\times$, on note $\mathcal{S}_\alpha$ le $D_{T\times T'}$-module engendré par

$$\exp(\alpha\sum_{1\leq i\leq r} t_i^{-1}f_i(x))$$

et $\mathcal{E}_\alpha$ le $D_{T\times T'}$-module engendré par $\delta_{\{1\}}\boxtimes\exp(-\alpha\sum_{1\leq i\leq r}t_i)$ où $\delta_{\{1\}}$ désigne la distribution de Dirac en 1 dans T. Ces $D_{T\times T'}$-modules admettent la description suivante.

Etant donné un isomorphisme $T\simeq \operatorname{Spec}K[x_1,x_1^{-1},\cdots,x_n,x_n^{-1}]$, on a des isomorphismes $\mathcal{S}_\alpha \simeq D_{T\times T'}/I$ et $\mathcal{E}_\alpha\simeq D_{T\times T'}/J$ avec I l'idéal à gauche engendré par les $\partial_{t_i}+\alpha t_i^{-2}f_i(x)$ et les $\partial_{x_j}-\alpha\sum_i t_i^{-1}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ et J l'idéal à gauche engendré par les $\partial_{t_i}+\alpha$ et les x_j-1.

L'énoncé suivant est à rapprocher du chapitre 11 de [D3] et du théorème 2.9 de [D-L].

Théorème 7.1. *Soit* M *un objet de* $D^b(D_T)$. *Soit* $\mathcal{B}_0$ *la partie multiplicative stable par translation engendrée par les formes linéaires* s_i, *pour* $1\leq i\leq r$, *dans* $H^0(\Omega_{T\times T'},\mathcal{O}_{\Omega_{T\times T'}})^\times$. *On a un isomorphisme canonique dans* $D^b(\Delta_{T\times T'},\mathcal{B}_0)$

$$\mathfrak{M}(i^!j_+M)\otimes^L_{\Delta_{T\times T'}}\Delta_{T\times T',\mathcal{B}_0}\simeq$$
$$(\mathfrak{M}(\mathcal{S}_\alpha\otimes^L_{\mathcal{O}_{T\times T'}}p^!M[-r])*\mathfrak{M}(\mathcal{E}_\alpha))\otimes^L_{\Delta_{T\times T'}}\Delta_{T\times T',\mathcal{B}_0}.$$

Ici j_+, $i^!$ et $p^!$ sont les foncteurs d'image directe et inverse pour les complexes de $\mathscr{D}$-modules tels que définis dans [B], et $*$ a été défini en 3.4.

Démonstration. Commençons par traiter le cas où $M = \mathcal{O}_T$. On fixe un isomorphisme $T = \operatorname{Spec} K[x_1, x_1^{-1}, \cdots, x_n, x_n^{-1}]$ et on pose $\tau_i = t_i$, $s_i = -t_i\partial_{t_i}$, $\vartheta_j = x_j$ et $\sigma_j = -x_j\partial_{x_j}$. Posons $M_1 = \mathfrak{M}(i^!j_+\mathcal{O}_T)$. Comme i est une immersion ouverte et j est une immersion fermée, on a $i^!j_+\mathcal{O}_T \simeq H^0(i^!j_+\mathcal{O}_T)$. On a alors, par définition,

$$M_1 \simeq \Delta_{T\times T'}/\Delta_{T\times T'}(f_i(\vartheta) - \tau_i) \otimes_{\Delta_T} \Delta_T/\Delta_T(\sigma_j),$$

avec $1 \otimes \vartheta_j = \vartheta_j \otimes 1$ et $1 \otimes \sigma_j = \sigma_j + \vartheta_j(\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vartheta)\tau_i^{-1}s_i) \otimes 1$. Par conséquent, on a $M_1 \simeq \Delta_{T\times T'}/I_1$ avec I_1 l'idéal à gauche engendré par les $f_i(\vartheta) - \tau_i$ et les $\sigma_j + \vartheta_j(\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vartheta)\tau_i^{-1}s_i)$.

Posons $M_2 = \mathfrak{M}(\mathscr{S}_\alpha)$. Par construction on a $M_2 \simeq \Delta_{T\times T'}/I_2$ avec I_2 l'idéal à gauche engendré par les $\tau_i s_i - \alpha f_i(\vartheta)$ et les $\sigma_j + \alpha\vartheta_j(\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vartheta)\tau_i^{-1})$.

Comme $\mathfrak{M}(\mathscr{E}_\alpha) \simeq \Delta_{T\times T'}/I_3$ avec I_3 l'idéal à gauche engendré par les $s_i - \alpha\tau_i$ et les $\vartheta_j - 1$, on a un isomorphisme de $\Delta_{T\times T', \mathscr{B}_0}$-modules à gauche

$$\mathfrak{M}(\mathscr{E}_\alpha) \otimes^L_{\Delta_{T\times T'}} \Delta_{T\times T', \mathscr{B}_0} \simeq H^0(\Omega_{T\times T'}, \mathcal{O}_{\Omega_{T\times T'}})_{\mathscr{B}_0},$$

l'action de τ_i sur 1 dans le deuxième terme étant donné par la multiplication par $\frac{s_i}{\alpha}$ et celle de ϑ_j étant triviale. On en tire que

$$(M_2 * \mathfrak{M}(\mathscr{E}_\alpha)) \otimes^L_{\Delta_{T\times T'}} \Delta_{T\times T', \mathscr{B}_0} \simeq \Delta_{T\times T', \mathscr{B}_0}/\Delta_{T\times T', \mathscr{B}_0} I'$$

avec I' l'idéal à gauche engendré par les $\tau_i - f_i(\vartheta)$ et les $\sigma_j + \vartheta_j(\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vartheta)s_i\tau_i^{-1})$ (on remplace τ_i par $\alpha\tau_i s_i^{-1}$ et τ_i^{-1} par $\alpha^{-1}s_i\tau_i^{-1}$). Pour conclure il suffit de remarquer que le morphisme $\Delta_{T\times T'} \to \Delta_{T\times T'}$ donné par la multiplication à droite par $\tau_1 \cdots \tau_r$ induit un isomorphisme de $\Delta_{T\times T'}$-modules à gauche

$$\Delta_{T\times T'}/I' \simeq \Delta_{T\times T'}/I_1.$$

Pour tout objet M de $D^b(D_T)$ on a un isomorphisme canonique

$$j_+M \simeq j_+\mathcal{O}_T \otimes^L_{\mathcal{O}_{T\times A'}} p^!(M[-r]) \tag{7.1.1}$$

en notant p la projection de $T \times A'$ sur T. En effet on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} j_+\mathcal{O}_T \otimes^L_{\mathcal{O}_{T\times A'}} p^!(M[-r]) &\simeq j_+\mathcal{O}_T \otimes^L_{\mathcal{O}_{T\times A'}} (M \boxtimes \mathcal{O}_{A'}) \\ &\simeq D_{T\times A' \leftarrow T} \otimes^L_{D_T} \mathcal{O}_T \otimes^L_{\mathcal{O}_T} (M \boxtimes \mathcal{O}_{A'}) \\ &\simeq D_{T\times A' \leftarrow T} \otimes^L_{D_T} M \\ &\simeq j_+M. \end{aligned}$$

Ici $\boxtimes$ désigne le produit tensoriel externe des $\mathscr{D}$-modules.

Grâce à l'isomorphisme (7.1.1), le cas général se ramène au cas déjà considéré de $\mathcal{O}_T$. $\square$

8. Images directes par des morphismes non monomiaux

On suppose à nouveau que K est un corps normé complet contenant $\mathbf{Q}_p$ et π vérifiant $\pi^{p-1} = -p$. On note $\varphi : H^0(T, \mathcal{O}_T) \to H^0(T, \mathcal{O}_T)$ l'unique morphisme de groupes abéliens qui est l'identité sur X_T et l'élévation à la puissance p-ième sur K. Soient $f_1, \cdots, f_r$ des éléments non nuls de $H^0(T, \mathcal{O}_T)$. On reprend les notations de la section précédente. On fixe un isomorphisme de tores

$$T \simeq \operatorname{Spec} K[x_1, x_1^{-1}, \cdots, x_n, x_n^{-1}].$$

On écrit $f_i = \sum_{j \in N_i \subset \mathbf{Z}^n} a_{j,i} x^j$ avec des $a_{j,i}$ non nuls.

On pose $T'' = \operatorname{Spec} K[y_k, y_k^{-1}]_{k \in \prod_{1 \leq i \leq r} N_i}$. On définit un morphisme monomial $\varpi : T \times T' \to T''$ par $\varpi((x, t)) = ((a_{j,i} t_i x^j))$. On pose $a = (a_{j,i})$. Avec les notations de 5.3.3, ϖ est de la forme $\varpi_{A,a}$ avec A ne dépendant que des ensembles N_i.

Par définition $\mathcal{L}_\pi$ est isomorphe à $\varpi^0_{A,a} \mathcal{E}$ (notations de [B]) avec $\mathcal{E}$ le $D_{T''}$-module engendré par $\exp(\pi \sum_k y_k)$. Soit d la dimension relative de $\varpi_{A,a}$. Comme $\mathcal{E}$ est une connexion, $\mathcal{L}_\pi$ est isomorphe à $\varpi^!_{A,a} \mathcal{E}[-d]$. Si on pose $N = \mathfrak{M}(\mathcal{E}[-d])$, on a bien $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_\pi) \simeq \varpi^!_{A,a} N$. Si les $a_{j,i}$ vérifient $a^p_{j,i} = a_{j,i}$ (ou plus généralement $a^{p^r}_{j,i} = a_{j,i}$), le morphisme $\varpi_{A,a}$ commute au Frobenius (resp. à F^r) et N est sous-jacent à un objet de $D^b_{\text{hol}}(F\text{-}\Delta_{T''})$ (resp. $D^b_{\text{hol}}(F^r\text{-}\Delta_{T''})$) par 5.2.3 et 5.3.6.

Théorème 8.1. *On suppose que la conjecture 5.3.3 est vérifiée pour A et que, pour $i = 1, \cdots, r$, on a $\varphi(f_i) = f_i$. On suppose que p n'appartient pas à $F(A)$. On note $H : T \to A'$ le morphisme, en général non monomial, $x \mapsto (f_i(x))$, $i : T' \to A'$ l'inclusion et p la projection $T \times T' \to T$. On note $\mathcal{B}_0$ (resp. $\mathcal{B}$) la partie multiplicative de $H^0(\Omega_{T'}, \mathcal{O}_{\Omega_{T'}})^\times$ stable par translation (resp. et par F_* et F_*^{-1}) engendrée par les formes linéaires s_i pour $i = 1, \cdots, r$. Alors $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_\pi)$ est sous-jacent à un objet de $D^b_{\text{hol}}(F\text{-}\Delta_{T \times T'})$ et $\mathfrak{M}(i^! H_+ \mathcal{O}_T) \otimes^L_{\Delta_{T'}} \Delta_{T', \mathcal{B}}$ est sous-jacent à un objet de $D^b_{\text{hol}}(F\text{-}\Delta_{T', \mathcal{B}})$. Plus précisément, il existe un objet (N, Φ) de $D^b_{\text{hol}}(F\text{-}\Delta_{T'})$ tel que l'on ait un isomorphisme*

$$\mathfrak{M}(i^! H_+ \mathcal{O}_T) \otimes^L_{\Delta_{T'}} \Delta_{T', \mathcal{B}_0} \simeq N \otimes^L_{\Delta_{T'}} \Delta_{T', \mathcal{B}_0}.$$

Plus généralement, soit (M, Φ) un objet de $D^b_{\text{hol}}(F\text{-}\Delta_T)$. On écrit $M = \mathfrak{M}(\mathcal{M})$ avec $\mathcal{M}$ dans $D^b_{\text{hol}}(D_T)$. On suppose que $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_\pi) \otimes^L_{K[X_{T \times T'}]} p^! \mathfrak{M}(\mathcal{M})$ (cf. 5.3.6) est sous-jacent à un objet de $D^b_{\text{hol}}(F\text{-}\Delta_{T \times T'})$. Alors $\mathfrak{M}(i^! H_+ \mathcal{M}) \otimes^L_{\Delta_{T'}} \Delta_{T', \mathcal{B}}$ est sous-jacent à un objet de $D^b_{\text{hol}}(F\text{-}\Delta_{T', \mathcal{B}})$. Plus précisément, il existe un objet (N, Φ) de $D^b_{\text{hol}}(F\text{-}\Delta_{T'})$ tel que l'on ait un isomorphisme

$$\mathfrak{M}(i^! H_+ \mathcal{M}) \otimes^L_{\Delta_{T'}} \Delta_{T', \mathcal{B}_0} \simeq N \otimes^L_{\Delta_{T'}} \Delta_{T', \mathcal{B}_0}.$$

Pour tout entier $k \geq 1$, on a des énoncés analogues en remplaçant φ par φ^k et F par F^k.

Démonstration. Si on admet la conjecture 5.3.3, pour A, le module $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_\pi)$ est sous-jacent à un objet de $D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T\times T'})$ si p n'appartient pas à $F(A)$. D'après 5.2.2, 5.2.3 et 5.3.6, $\mathcal{K}_\pi$ est sous-jacent à un objet de $D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T\times T'})$, et donc également $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_\pi \otimes^L_{\mathcal{O}_{T\times T'}} p^! \mathcal{M}) * \mathfrak{M}(\mathcal{K}_\pi)$ d'après 5.3.6 (en effet les objets $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_\pi \otimes^L_{\mathcal{O}_{T\times T'}} p^! \mathcal{M})$ et $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_\pi) \otimes^L_{K[X_{T\times T'}]} p^! \mathfrak{M}(\mathcal{M})$ sont isomorphes). Finalement, par 5.3.1, si on note q' la projection $T \times T' \to T'$,

$$q'_+(\mathfrak{M}(\mathcal{L}_\pi \otimes^L_{\mathcal{O}_{T\times T'}} p^! \mathcal{M}) * \mathfrak{M}(\mathcal{K}_\pi))$$

est sous-jacent à un objet de $D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T'})$. Le théorème 7.1 permet alors de conclure car on a un isomorphisme canonique

$$q'_+(\mathfrak{M}(i^! j_+ \mathcal{M})) \simeq \mathfrak{M}(i^! H_+ \mathcal{M}),$$

et que, pour tout objet de $D^b_{\mathrm{hol}}(F\text{-}\Delta_{T\times T'})$, l'image directe par q' commute avec l'extension des scalaires de Δ à $\Delta_{\mathcal{R}}$.□

Références

[A-D] A. Adolphson, B. Dwork: Gauss sums, Prépublication (1992)

[Am] Y. Amice: Interpolation p-adique, Bull. Soc. Math. France **92** (1964) 117–180

[Be1] P. Berthelot: $\mathcal{D}^\dagger_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents I: Opérateurs différentiels de niveau fini, Prépublication IRMAR (1993)

[Be2] P. Berthelot: Exposé au Symposium Barsotti (Juin 1991)

[B] A. Borel et al.: Algebraic $\mathcal{D}$-modules, Perspectives in Math. vol.2, Academic Press, Boston, 1987

[Bo] M. Boyarsky: p-adic gamma functions and Dwork cohomology, Trans. Amer. Math. Soc. **257** (1980) 359–369

[D1] B. Dwork: Lectures on p-adic differential equations, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften vol. 253, Springer-Verlag, New-York, 1982

[D2] B. Dwork: On the Boyarsky Principle, Amer. J. Math. **104** (1983) 115–156

[D3] B. Dwork: Generalized hypergeometric functions, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1990

[D-L] B. Dwork, F. Loeser: Hypergeometric series, Japanese Journal of Math. **19** (1993) 81–129

[G-K] B. Gross, N. Koblitz: Gauss sums and the p-adic Γ function, Ann. of Math. **109** (1979) 569–581

[H] C. Huyghe: Thèse, Université de Rennes I (1995)

[La] G. Laumon: Transformation de Fourier géométrique, Prépublication IHES (1985)

[L-S] F. Loeser, C. Sabbah: Equations aux différences finies et déterminants de fonctions multiformes, Comment. Math. Helvetici **66** (1991) 458–503

[M-R] J.C. McConnell, J.C. Robson: Noncommutative Noetherian Rings, John Wiley and Sons, Ltd, Chichester, 1987

[S] C. Sabbah: Lieu des pôles d'un système d'équations aux différences finies, Bull. Soc. Mat. France **120** (1992) 371–396

This article was processed by the author using the LaTeX style file *pljour1m* from Springer-Verlag.