GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. — Exposant d'Arnold et sections planes. Note de **François Loeser**, présentée par Bernard Malgrange.

Remise le 20 février 1984.

Nous montrons des inégalités entre l'exposant d'Arnold d'une fonction analytique complexe à singularité isolée, celui d'une restriction à un hyperplan général et des invariants polaires. Les résultats obtenus sont très proches d'une conjecture de B. Teissier.

ANALYTIC GEOMETRY. — Arnold Exponent and Plane Sections.

We prove inequalities between the Arnold exponent of a complex analytic function with isolated singularity, the exponent of its restriction to a general hyperplane section and polar invariants. We obtain a result very close to a conjecture of B. Teissier.

1. RAPPELS ET NOTATIONS. — Soit $f:(\mathbf{C}^{n+1}, 0)\to(\mathbf{C}, 0)$ une fonction analytique à singularité isolée en zéro.

Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que les coordonnées locales $(Z_0, ..., Z_n)$ sont telles que l'hyperplan défini par $Z_0=0$ est générique, c'est-à-dire n'est pas limite en zéro d'espaces tangents à $\{f=0\}$.

Dans ce cas la courbe polaire Γ est la courbe définie par les équations :

$$\frac{\partial f}{\partial Z_1}=\frac{\partial f}{\partial Z_2}=\ldots=\frac{\partial f}{\partial Z_n}=0.$$

Si $\Gamma=\bigcup\Gamma_q$ est la décomposition de Γ en composantes irréductibles, on appellera m_q la multiplicité en 0 de Γ_q et e_q la multiplicité d'intersection de Γ_q avec $\partial f/\partial Z_0=0$.

Rappelons maintenant la définition de l'exposant d'Arnold $\sigma(f)$: on fixe $0<\eta\ll\varepsilon\ll 1$, on pose :

$$B_\varepsilon=\{x\in\mathbf{C}^{n+1}\,|\,\|x\|\leqq\varepsilon\},\qquad D_\eta=\{t\in\mathbf{C}\,|\,|t|<\eta\}$$

et :

$$X=B_\varepsilon\cap f^{-1}(D_\eta),\qquad X_t=X\cap f^{-1}(t).$$

Il est maintenant classique (*cf.* [1]) que si $\omega\in\Gamma(B_\varepsilon, \Omega^n_{B_\varepsilon/D_\eta})$ et si $\gamma(t)$ est une famille horizontale multiforme de classes d'homologie de dimension n dans X_t,

$$I(t)=\int_{\gamma(t)}\omega \text{ a un développement asymptotique,}$$

$$I(t)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{Q}\\ 0\leqq q\leqq n}} C_{\alpha,q}(\gamma,\omega)\,t^\alpha\log t^q.$$

La borne inférieure de l'ensemble des α tels qu'il existe γ, ω, q avec $C_{\alpha,q}(\gamma,\omega)\neq 0$ est appelée *exposant d'Arnold* de f et notée $\sigma(f)$.

D'après [1], $\sigma(f)$ est >0.

Dans [3], B. Teissier a conjecturé le résultat suivant :

$$(*)\qquad \sigma(f)\geqq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\theta^{(i)}(f)},$$

où $\theta^{(0)}(f)=\sup(e_q/m_q)$ et $\theta^{(i)}(f)=\theta^{(0)}(f|_{H^i})$ pour un plan H^i général de codimension i passant par l'origine.

Suivant l'usage, pour $x\in\mathbf{R}$, $[x]$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique entier n tel que $x\in[n, n+1[$.

2. Énoncé des résultats :

Théorème 1. — *Si f est à singularité isolée, et si* H *est un plan général passant par l'origine, on a :*

$$\sigma(f|_H)+\inf\left(\frac{1}{1-[-e_q/m_q]}\right)\leqq\sigma(f)\leqq\sigma(f|_H)+\sup\left(\frac{1}{1+[e_q/m_q]}\right).$$

Corollaire. — *On a :*

$$\sigma(f)\geqq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-[-\theta^{(i)}]}.$$

Démonstration du théorème. — On suppose toujours que $Z_0=0$ est général; chaque composante Γ_q admet alors le paramétrage suivant :

$$Z_0=t_q^{m_q},\qquad Z_i=t_q^{k_{q,i}}+o(t_q^{k_{q,i}})\quad\text{avec } k_{q,i}\geqq m_i\quad\text{pour } i\geqq 1,$$

car $Z_0=0$ est transverse à Γ d'après un résultat de B. Teissier (*cf.* [4]), tandis que :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial Z_0}\right|_{\Gamma_q}=\lambda_q t_q^{e_q}+o(t^{e_q})\qquad\text{avec}\quad\lambda_q\neq 0.$$

Sur Γ_q on a donc $\partial f/\partial Z_0=u\,Z_0^{e_q/m_q}$ avec u inversible, ce qui nous permet de montrer :

Lemme 1. — *Si l'hyperplan $Z_0=0$ est général pour f, et si $a\leqq\inf(e_q/m_q)$, la famille $\varphi_\lambda=f(\lambda Z_0, Z_1,\ldots,Z_n)+Z_0^{a+1}$, $|\lambda|\leqq 1$, est à μ constant, c'est-à-dire : pour tout λ tel que $|\lambda|\leqq 1$,*

$$\mu(\varphi_\lambda)=\mu(\varphi_0),$$

où μ est le nombre de Milnor.

Lemme 2. — *Sous les hypothèses précédentes, si $a\geqq\sup(e_q/m_q)$, la famille $\psi_\lambda=f(Z_0, Z_1,\ldots,Z_n)+\lambda Z_0^{a+1}$ est à μ constant.*

Démonstration du lemme 1. — On remarque que $\mu(\varphi_\lambda)$ est égal à la multiplicité d'intersection en zéro de Γ avec $\lambda(\partial f/\partial Z_0)+(a+1)Z_0^a=0$.

Comme $a\leqq\inf(e_q/m_q)$, c'est toujours égal à la multiplicité d'intersection de Γ avec $Z_0^a=0$.

C.Q.F.D.

La démonstration du lemme 2 est similaire (ou *voir* [4]).

Rappelons le théorème suivant de Steenbrink [2] qui généralise des résultats antérieurs de Varchenko [5].

Théorème 2 (Steenbrink). — *Soit* $F:(\mathbf{C}^{n+1}\times\mathbf{C}, 0)\to(\mathbf{C}, 0)$ *une fonction analytique telle que la fonction $f_\lambda=F|_{\mathbf{C}^{n+1}\times\{\lambda\}}$ ait une singularité isolée en zéro pour tout λ suffisamment petit. Alors il existe $\varepsilon>0$ tel que si $0<|\lambda|<\varepsilon$, on ait $\sigma(f_\lambda)\geqq\sigma(f_0)$.*

Démonstration du théorème. — Supposons $a \leqq \inf(e_q/m_q)$; on considère la déformation $\psi_\lambda : \mu(\psi_\lambda)$ est constant pour $\lambda \neq 0$; on a donc d'après le théorème de Steenbrink, $\sigma(\psi_1) \geqq \sigma(\psi_0) = \sigma(f)$. Mais d'après le lemme 1 et le théorème de Varchenko ([6]), $\sigma(\varphi_1) = \sigma(\varphi_0)$; comme $\psi_1 = \varphi_1$, on a donc $\sigma(f) \leqq \sigma(f(0, Z_1, \ldots, Z_n) + Z_0^{a+1})$.

D'après la formule de « Thom-Sebastiani » pour l'exposant d'Arnold (*cf.* [1]), on a donc $\sigma(f) \leqq \sigma(f|_H) + \sigma(Z_0^{a+1})$.

Comme il est très facile de voir que $\sigma(Z_0^{a+1}) = 1/(a+1)$, on a donc :

$$\sigma(f) \leqq \sigma(f|_H) + \frac{1}{a+1} \leqq \sigma(f|_H) + \sup\left(\frac{1}{1+[e_q/m_q]}\right).$$

L'autre majoration est similaire. On prend maintenant $a \geqq \sup(e_q/m_q)$, d'après le théorème de Varchenko et le lemme 2, $\sigma(f) = \sigma(f(Z_0, \ldots, Z_n) + Z_0^{a+1})$ tandis que $\sigma(\varphi_1) \geqq \sigma(\varphi_0)$, d'où le résultat.

Exemple. — $f = x^2 y + y^4$ on a $\sigma(f) = 5/8$, $\sigma(f|_H) = 1/3$ pour H général, et

$$\{e_q/m_q\} = \{2, 3\}.$$

Remarque. — Soit f à singularité isolée; on peut lui associer (*cf.* [2], [5]) une suite de μ rationnels appelée spectre et notée $E(f) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)$. On a $\sigma(f) = 1 + \inf_{1 \leq i \leq \mu} \alpha_i$. Dans [2], Steenbrink démontre le résultat suivant, plus fort que le théorème 2.

THÉORÈME 2′ (Steenbrink). — *Sous les hypothèses du théorème* 2, *pour tout* $t \in \mathbf{R}$, *il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que si* $0 < |\lambda| < \varepsilon$:

$$\operatorname{card}(E(f_\lambda) \cap]t, t+1]) \leqq \operatorname{card}(E(f_0) \cap]t, t+1]).$$

On en déduit, par le même raisonnement que le théorème 1, le résultat suivant (qui le généralise).

THÉORÈME 1′. — *Sous les hypothèses du théorème* 1, *en posant :*

$$a = \inf\left[\frac{e_q}{m_q}\right] \quad et \quad A = \sup\left[-\frac{e_q}{m_q}\right],$$

on a pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$\sum_{k=1}^{a} \operatorname{card}\left(E(f|_H) \cap \left]t - \frac{k}{a+1}, t+1-\frac{k}{a+1}\right]\right) \leqq \operatorname{card}(E(f) \cap]t, t+1])$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{a} \operatorname{card}\left(E(f|_H) \cap \left]t - \frac{k}{A+1}, t+1-\frac{k}{A+1}\right]\right).$$

Pour terminer signalons que dans le cas des courbes planes ($n=1$) on peut montrer que :

$$\sigma(f) \leqq \sigma(f|_{\mathrm{H}}) + \sup\left(\frac{1}{1+(e_q/m_q)}\right) \quad \text{pour H général.}$$

Dans le cas des courbes irréductibles cette inégalité est une égalité d'après les travaux d'Igusa [7] et de Merle [8].

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] B. MALGRANGE, Intégrales asymptotiques et monodromie, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 7, 1974, p. 405-430.

[2] J. H. M. STEENBRINK, *Semicontinuity of the Singularity Spectrum*, preprint, novembre 1983.

[3] B. TEISSIER, Polyèdre de Newton jacobien, *Séminaire sur les singularités*, Publications mathématiques Paris VII, 1980.

[4] B. TEISSIER, Variétés polaires I. Invariants des singularités d'hypersurfaces, *Invent. Math*, 40, n° 3, 1977, p. 267-292.

[5] A. N. VARCHENKO, On Semicontinuity of the Spectrum and an Upper Bound for the Number of Singular Points of Projective Hypersurfaces, *Dokl. Akad. Nauk.*, 270, n° 6, 1983, p. 1294-1297.

[6] A. N. VARCHENKO, The Complex Exponent of a Singularity does Not Change Along the Strata $\mu=$const, *Funkt. Analiz i evo Pril.*, 16 n° 1, p. 1-12, 1982.

[7] J. I. IGUSA, On the First Term of Certain Asymptotic Expansions, *Complex and Algebraic Geometry*, Iwanami Shoten and Cambridge Univ. Press, 1977, p. 357-368.

[8] M. MERLE, Invariants polaires des courbes planes, *Invent. Math.*, 41, 1977, p. 103-111.

Centre de Mathématiques, École polytechnique, 91128 *Palaiseau Cedex.*