Une estimation asymptotique du nombre de
Solutions appro-chees d'une equation p-adique.

Loeser, F.

in: Inventiones mathematicae | Inventiones Mathematicae | Periodical Issue | Article
31 - 38

Invent. math. 85, 31–38 (1986)

Inventiones mathematicae

Une estimation asymptotique du nombre de solutions approchées d'une équation p-adique

F. Loeser

Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, Unité Associée au CNRS N° 169, F-91128 Palaiseau Cedex, France

§ 1. Introduction

Soient p un nombre premier, $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques, K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ d'anneau des entiers R, P l'idéal maximal de R et $q = \operatorname{card}(R/P)$.

Etant donné un polynôme $f \in R[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $f(0)=0$, on donne une estimation asymptotique du nombre de solutions de l'équation $f=0$ dans l'anneau $R/P^i R$:

$$N_i = \operatorname{Card}\{x \bmod P^i / x \in R^n \text{ et } f(x) = 0 \bmod P^i\}$$

en fonction d'invariants géométriques calculables à partir de l'équation f dans le cas où f n'a qu'une singularité algébriquement isolée et non rationnelle à l'origine. On montre en particulier en 2.7 la majoration suivante: si f est à singularité isolée et non rationnelle en zéro,

$$\limsup (N_i)^{1/i} \leqq q^{\left(n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1+\{\theta^i(f)\}}\right)}$$

où les $\theta^i(f)$ sont des invariants polaires de B. Teissier (en particulier $1 + \theta^{n-1}(f)$ est la multiplicité de f en zéro).

Pour obtenir une minoration de $\limsup (N_i)^{1/i}$ en fonction d'invariants géométriques, il est clair qu'il faut faire des hypothèses sur l'extension K. Quand celle-ci est «bonne» nous donnons une minoration de $\limsup (N_i)^{1/i}$ en fonction d'invariants polaires et également en fonction du polyèdre de Newton.

Nour montrons également dans la troisième partie que si f a une singularité isolée en zéro, si $f=0$ possède un point lisse K-rationnel dans R^n et si sur toute extension finie de K la contribution de la partie lisse de $f=0$ à N_i est prépondérante, la singularité de f en zéro est nécessairement une singularité rationnelle (au sens des singularités).

Pour finir, signalons que les méthodes que nous employons sont transcendantes et utilisent la théorie de Hodge.

N.B. Nous avons essayé d'éviter toute possibilité de confusion entre les deux notions bien distinctes suivantes: celle, géométrique, de singularité rationnelle, et celle, arithmétique, de point K-rationnel sur un corps K.

§ 2. Enoncé des estimations et démonstrations

Avec les notations précédentes, on pose $|dx|$ la mesure de Haar sur K^n normalisée de façon à ce que la mesure de R^n soit 1. On rappelle que pour $a \in K$, $|a| = q^{-\operatorname{ord} a}$.

Dans [I.1], J.I. Igusa a démontré la rationalité de la série de Poincaré:

$$P(T) = \sum_{i=0}^{\infty} N_i (q^{-n} T)^i$$

en introduisant l'intégrale:

$$Z_K(s) = \int_{R^n} |f(x)|^s \, |dx| \qquad \text{pour } \operatorname{Re} s > 0$$

et en démontrant:

Théorème 2.1 [I.1]. *$Z_K(s)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui est une fonction rationnelle de q^{-s}.*

Le lien entre $Z_K(s)$ et $P(T)$ est fourni par le lemme suivant:

Lemme 2.2 [I.3]. $Z_K(s) = P(q^{-s}) - q^s(P(q^{-s}) - 1)$.

Ce lemme se démontre en écrivant

$$R^n = f^{-1}(0) \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} (f^{-1}(P^k) \setminus f^{-1}(P^{k+1}))$$

et en remarquant que la mesure de $f^{-1}(P^i)$ est $N_i q^{-ni}$.

Définition 2.3. On note $-\beta(K,f)$ la partie réelle du pôle de $Z_K(s)$ le plus proche de l'origine.

Corollaire 2.4. *On a* $\limsup (N_i)^{1/i} \leqq q^{n-\beta(K,f)}$.

Dans le cas où $f=0$ définit une courbe possédant pour unique singularité une singularité isolée en zéro formellement irréductible sur une clôture algébrique de K, J.I. Igusa a montré dans [I.2] que $\beta(K,f) = \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{\beta_1}$, m étant la multiplicité de $f=0$ en zéro et $\dfrac{\beta_1}{m}$ le premier exposant de Puiseux.

Nous nous proposons de donner des inégalités pour $\beta(K,f)$ qui généralisent ce résultat. Les invariants qui vont généraliser les exposants de Puiseux seront les invariants polaires de B. Teissier dont on va rappeler la définition dans le cas particulier qui nous intéresse.

Soit $f \in R[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme tel que $f(0)=0$. On suppose que f n'a que des singularités algébriquement isolées. Quitte à effectuer une homothétie, on peut faire de plus l'hypothèse suivante:

($*$) Pour toute extension finie de K, f n'a pas d'autre singularité que l'origine dans la boule fermée de rayon 1.

Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K, U un voisinage de $\{0\}$ dans $\bar{K}^n$ sur lequel f n'a pas d'autre point singulier que $\{0\}$, et H un hyperplan de $\bar{K}^n$ passant par l'origine. On note Γ_H^0 l'ensemble des points p de $U \setminus \{0\}$ tels que l'hyperplan tangent en p à l'hypersurface de niveau de f passant par p (définie par $f(x) - f(p)=0$) soit parallèle à H. On note Γ_H l'adhérence de Γ_H^0 dans U pour la topologie de Zariski.

D'après [T] il existe un ouvert de Zariski dense W de $\mathbb{P}^{n-1}$ tel que si $H \in W$:

- le nombre l de composantes irréductibles formelles en zéro de Γ_H est indépendant de H;
- si on note $\Gamma_H = \bigcup_{q=1}^{l} \Gamma_q$ la décomposition en composantes irréductibles formelles en zéro, m_q la multiplicité en zéro de Γ_q, et $e_q + m_q$ la multiplicité d'intersection de Γ_q avec $(f=0)$ en zéro, l'ensemble des couples (e_q, m_q) est indépendant de $H \in W$. De plus les e_q sont positifs ou nuls.

Définition 2.5. On pose $\theta^0(f) = \sup\left(\frac{e_q}{m_q}\right)$, $\tau^0(f) = \inf\left(\frac{e_q}{m_q}\right)$. Soit H^i un plan de codimension $i \leqq n-2$ passant par l'origine, et $f|H^i$ la restriction de f à H^i. D'après [T], $\tau^0(f|H^i)$ et $\theta^0(f|H^i)$ sont constants sur on ouvert de Zariski W^i non vide de la grassmannienne. On peut donc poser $\tau^i(f) = \tau^0(f|H^i)$ et $\theta^i(f) = \theta^0(f|H^i)$ pour $H^i \in W^i$. On pose

$$\theta^{n-1}(f) = \tau^{n-1}(f) = \mathrm{mult}_0(f=0) - 1.$$

Rappelons la définition d'une singularité rationnelle:

Soit V une variété algébrique normale de Cohen-Macaulay définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, $\hat{V} \xrightarrow{\delta} V$ une résolution des singularités ayant un diviseur à croisements normaux comme lieu exceptionnel. On dit que V n'a que des singularités rationnelles si $\delta_* \omega_{\hat{V}} = \omega_V$.

Si V est définie sur un corps K de caractéristique nulle, on dit que V n'a que des singularités rationnelles si pour une (et donc toute) clôture algébrique $\bar{K}$ de K la variété $\bar{V}$ obtenue par extension des scalaires n'a que des singularités rationnelles.

Pour x un réel, on note $[x]$ la partie entière de x et $\{x\} = -[-x]$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre résultat:

Théorème 2.6. *Si $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ vérifie $f(0)=0$ et ($*$) et si la singularité de f en zéro n'est pas rationnelle, alors*

$$\beta(K, f) \geqq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \{\theta^i(f)\}}$$

Corollaire 2.7. *Sous les hypothèses précédentes on a la majoration:*

$$\limsup (N_i)^{1/i} \leqq q^{\left(n-\sum_{\iota=0}^{n-1} \frac{1}{1+\{\theta^{\iota}(f)\}}\right)}.$$

Démonstration du théorème. D'après le théorème d'Hironaka sur la résolution des singularités [H] il existe un schéma X lisse irréductible et de type fini sur $K[X_1, \ldots, X_n]$ et un morphisme propre:

$$\pi \colon X \to \operatorname{Spec} K[X_1, \ldots, X_n]$$

qui induit un isomorphisme entre $X \backslash \pi^{-1}(\operatorname{Sing} f)$ et $\operatorname{Spec} K[X_1, \ldots, X_n] \backslash \operatorname{Sing} f$ ($\operatorname{Sing} f$ étant le lieu singulier de $f^{-1}(0)$) et tel que $\pi^{-1}(f^{-1}(0))$ est un diviseur à croisements normaux. Un tel couple (X, π) sera appelé une résolution des singularités de (K^n, f).

Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K, $\bar{X} = X \times_K \bar{K}$ et $\bar{\pi} \colon \bar{X} \to \operatorname{Spec} \bar{K}[X_1, \ldots, X_n]$ le morphisme induit par l'extension des scalaires.

On dit que (K, f) est bon s'il existe une résolution des singularités de (K^n, f) telle que toutes les composantes irréductibles de $\bar{\pi}^{-1}(f^{-1}(0))$ soient définies sur K.

On a le lemme évident suivant:

Lemme 2.8. • *Il existe une extension finie K' de K telle que (K', f) soit bon.*

• *Si (K', f) est bon, alors (K'', f) est bon pour toute extension finie K'' de K'.*

Soit $\pi \colon X \to \operatorname{Spec} K[X_1, \ldots, X_n]$ une résolution des singularités de (K^n, f), $X(K)$ la variété analytique des points K-rationnels de X.

π induit un morphisme $\pi(K) \colon X(K) \to K^n$ et $\pi(K)^{-1}(f^{-1}(0))$ est un diviseur à croisements normaux dans $X(K)$. On note E la transformée stricte du diviseur $f^{-1}(0)$, D_i, $1 \leqq i \leqq k$, les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel, et N_i la multiplicité de D_i dans $\pi(K)^{-1}(f^{-1}(0))$. Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées sur K^n, on note $v_i - 1$ la multiplicité de la forme différentielle $\pi(K)^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)$ au point générique de D_i.

Dans [I.1] Igusa a montré:

Théorème 2.9. *L'ensemble des parties réelles des pôles de $Z_K(s)$ est contenu dans $\left\{-\frac{v_i}{N_i}\right\}_{1 \leqq i \leqq k} \cup \{-1\}$.*

En fait la méthode d'Igusa donne un résultat plus précis pour le pôle le plus proche de l'origine:

Définition 2.10. On pose $\alpha(K, f) = \sup\limits_{1 \leqq i \leqq k} \left\{-\frac{v_i}{N_i}\right\}$.

Proposition 2.11 ([I.2], p. 367). *Si $\alpha(K, f) \geqq -1$, ou si $\beta(K, f) < 1$, on a $-\alpha(K, f) = \beta(K, f)$.*

Corollaire 2.12. *Si $\alpha(K, f) \geqq -1$, il ne dépend pas de la résolution. On a donc si $\alpha(K, f) \geqq -1$, $\alpha(K, f) \leqq \alpha(L, f)$ pour toute extension finie L de K, et $\alpha(K, f) = \alpha(\bar{K}, f)$ si (K, f) est bonne.*

Lemme 2.13. *Soit σ un isomorphisme $\bar{K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$, le transformé par σ de f: ${}^\sigma f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ est à singularité isolée en zéro, et on a $\alpha(\bar{K}, f) = \alpha(\mathbb{C}, {}^\sigma f)$, $\tau^i(f) = \tau^i({}^\sigma f)$, $\theta^i(f) = \theta^i({}^\sigma f)$.*

Démonstration. Evident.

Soit g: $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ une fonction analytique à singularité isolée à l'origine de nombre de Milnor μ. Soit $0 < \eta \ll \varepsilon \ll 1$. On note $X = g^{-1}(D_\eta) \cap B_\varepsilon$, $X(t) = X \cap g^{-1}(t)$, avec D_η le disque de centre zéro et de rayon η, B_ε la boule de centre zéro et de rayon ε. Sur $D_\eta^* = D_\eta \setminus \{0\}$, $H^{n-1}(X(t), \mathbb{C})$ est la fibre d'un système local $\underline{H}$ sur D_η^* et on note $H = \Gamma(U, \pi^* \underline{H})$ pour π: $U \to D_\eta^*$ le revêtement universel de D_η^*. H est muni d'une filtration de Hodge $F^\cdot$ ([St.1]) et le spectre de g, Sp(g) est le μ-uple non ordonné de nombres rationnels défini ainsi: la fréquence de a dans Sp(g) est égale à la dimension du sous-espace propre généralisé associé à l'action de la monodromie sur F^p/F^{p+1} avec la valeur propre $\exp(-2i\pi a)$ et $p = [n - a - 1]$.

On pose $\sigma(g) = 1 + \inf \mathrm{Sp}(g)$.

On a le résultat suivant dû à Varchenko:

Théorème 2.14. *Si $\alpha(\mathbb{C}, g) \geqq -1$ ou si $\sigma(g) \leqq 1$,*

$$\sigma(g) = -\alpha(\mathbb{C}, g).$$

Ce théorème est une conséquence du théorème 4.2 de [V.2] et du fait que la filtration F de [V.2] coïncide avec celle de [St.1] sur les gradués par le poids de la monodromie ([V.3]).

On a aussi le résultat suivant dû à M. Saito:

Théorème 2.15 [S]. *g a une singularité rationnelle à l'origine si et seulement si $\sigma(g) > 1$.*

On va maintenant déduire le théorème 2.6 du résultat suivant dont on rappelle la démonstration.

Théorème 2.16 [L.1]. *Si g: $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ est à singularité isolée, on a:*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \{\theta^i(g)\}} \leqq \sigma(g) \leqq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 + [\tau^i(g)]}.$$

Démonstration du théorème 2.16. Soient $(z_1, \ldots, z_n)$ les coordonnées locales sur $\mathbb{C}^n$ en zéro.

Lemme 2.17. *Si $z_1 = 0$ est un hyperplan général et $a \leqq \tau^0(g)$, la déformation $\varphi_\lambda = g(\lambda z_1, z_2, \ldots, z_n) + z_1^{a+1}$ est à μ constant pour $|\lambda| \leqq 1$.*

Démonstration. $\mu(\varphi_\lambda)$ est la multiplicité d'intersection de $\Gamma_{z_1=0}$ avec $\dfrac{\partial \varphi_\lambda}{\partial z_1} = 0$, autrement dit avec $\lambda \dfrac{\partial g}{\partial z_1} + (a+1) z_1^a = 0$. Si $z_1 = 0$ est général et $\Gamma_{z_1=0} = \bigcup_{q=1}^{l} \Gamma_q$ est la décomposition en composantes irréductibles, Γ_q admet la paramétrisation suivante:

$$z_1 = t_q^{m_q}$$

$$z_i = t_q^{k_{q,i}} + o(t_q^{k_{q,i}}) \quad \text{avec} \quad k_{q,i} \geqq m_i \quad \text{pour } i \geqq 2,$$

et de plus, sur Γ_q on a:

$$\frac{\partial g}{\partial z_1} = K t_q^{e_q} + o(t_q^{e_q}) \quad \text{avec} \quad K \neq 0.$$

La multiplicité d'intersection de Γ_q avec $\dfrac{\partial \varphi_\lambda}{\partial z_1} = 0$ est donc constante égale à $a m_q$, ce qui prouve le lemme.

Lemme 2.18. *Si $z_1 = 0$ est un hyperplan général et $a \geqq \theta^0(g)$ alors la famille $\psi_\lambda = g + \lambda z_1^{a+1}$ est à μ constant pour $|\lambda| \leqq 1$.*

Démonstration. Analogue à celle du lemme précédent.

Supposons $a \leqq \tau^0(g)$. D'après le théorème de semi-continuité de Steenbrink [St.2] on a $\sigma(\psi_1) \geqq \sigma(\psi_0) = \sigma(g)$. Comme φ_λ est à μ constant, on a $\sigma(\varphi_1) = \sigma(\varphi_0)$ d'après Varchenko [V.4]. On a donc $\sigma(g) \leqq \sigma(g(0, z_2, \ldots, z_n) + z_1^{a+1})$. D'après la formule de «Thom-Sebastiani» pour σ ([V.2]) on a $\sigma(g|_{z_1=0} + z_1^{a+1}) = \sigma(g|_{z_1=0}) + \sigma(z_1^{a+1})$.

Mais $\sigma(z_1^{a+1}) = \dfrac{1}{a+1}$, d'où

$$\sigma(g) \leqq \sigma(g|_{z_1=0}) + \frac{1}{1 + [\tau^0(g)]}.$$

On obtient l'inégalité $\sigma(g) \leqq \sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{1}{1 + [\tau^i(g)]}$ par récurrence et l'inégalité $\sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{1}{1 + \{\theta^i(g)\}} \leqq \sigma(g)$ de manière analogue en utilisant le lemme 2.18 à la place du lemme 2.17.

Démonstration du théorème 2.6. Si f n'est pas rationnelle, on a $\sigma({}^\sigma f) \leqq 1$ d'après 2.15, et donc $\alpha(\bar{K}, f) = -\sigma({}^\sigma f)$ d'après 2.13 et 2.14, donc $-\alpha(\bar{K}, f) \geqq \sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{1}{1 + \{\theta^i(g)\}}$. Si $\beta(K, f) \geqq 1$, 2.6 est clair car $1 \geqq -\alpha(\bar{K}, f)$. Si $\beta(K, f) < 1$, on a $\beta(K, f) = -\alpha(K, f) \geqq -\alpha(\bar{K}, f)$ d'après 2.11 et 2.12, ce qui achève la démonstration.

§ 3. Autres estimations et remarques

3.1. Pour obtenir le théorème 2.6 on n'a utilisé que la minoration du théorème 2.16. En utilisant de manière analogue la majoration on obtient le résultat suivant:

Proposition 3.1.1. *Si $f \in R[X_1, \ldots, X_n]$ vérifie $f(0) = 0$ et $(*)$, si la singularité de f en zéro n'est pas rationnelle et si (K, f) est bon:*

$$\beta(K, f) \leqq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1 + [\tau^i(f)]}.$$

On peut obtenir une majoration très souvent meilleure comme suit: si g: $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ est une fonction analytique à singularité isolée non dégénérée pour son polyèdre de Newton et $t^{-1} \leqq 1$, on a $\sigma = t^{-1}$ où $(t, \ldots, t)$ est le point d'intersection de la diagonale avec la frontière du polyèdre de Newton ([V.1]). Par semi-continuité de σ ([St.2]) on en déduit que sans hypothèse de non dégénérence on a $\sigma(g) \leqq t^{-1}$ dès que $t^{-1} \leqq 1$, d'où le résultat suivant:

Proposition 3.1.2. *Si $f \in R[X_1, \ldots, X_n]$ vérifie $f(0)=0$ et $(*)$, si la singularité de f en zéro n'est pas rationnelle et si (K,f) est bon:*

$$\beta(K,f) \leqq t^{-1}$$

où $(t, \ldots, t)$ est le point d'intersection de la diagonale avec le bord du polyèdre de Newton.

Remarque 3.1.3. Ce résultat semble être en général meilleur que celui de la proposition 3.1.1, en particulier pour les courbes réductibles non dégénérées pour leur polygone de Newton.

Remarque 3.1.4. J. Denef a montré dans [D] que si $f \in R[X_1, \ldots, X_n]$ est non dégénérée sur K pour son polyèdre de Newton, on a $\beta(K,f) = t^{-1}$ dès que $t^{-1} \leqq 1$.

3.2. Pour f quelconque dans $R[X_1, \ldots, X_n]$ avec $f(0)=0$, on a toujours $\beta(K,f) \geqq \frac{1}{m}$ avec m la multiplicité de f en zéro comme on le voit aisément en utilisant le théorème de préparation de Weierstrass. Le théorème 2.6 améliore nettement cette estimation.

3.3. Dès que $f=0$ a un point rationnel lisse dans R^n on a $N_i \geqq K q^{i(n-1)}$ avec $K>0$ par un calcul direct élémentaire. Dans ce cas si $\alpha(K,f) < -1$ on a $N_i \sim K q^{i(n-1)}$ avec $K>0$. En fait si une estimation de ce type, où la contribution de la partie lisse est prépondérante, a lieu sur toutes les extensions finies de K, f a nécessairement une singularité rationnelle en zéro:

Théorème 3.3.1. *Si $f \in R[X_1, \ldots, X_n]$ vérifie $f(0)=0$ et $(*)$, et possède un point K-rationnel lisse dans R^n, les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *pour toute extension finie K' de K, -1 est un pôle simple de $Z_{K'}(s)$ et est le pôle de $Z_{K'}(s)$ le plus proche de l'origine.*

b) *la singularité de f en zéro est rationnelle.*

Démonstration. $b \Rightarrow a$: si la singularité de f en zéro est rationnelle, on a nécessairement $\alpha(K',f) < -1$ pour toute extension finie K' de K et toute résolution des singularités d'après 2.13, 2.14 et 2.15. Par calcul direct sur une résolution on voit que $\beta(K',f) = -1$ et que c'est un pôle simple de $Z_{K'}(s)$: en effet quitte à éclater davantage, on peut toujours supposer que les composantes irréductibles de la transformée stricte ne s'intersectent pas.

$a \Rightarrow b$: au vu de ce qui précède, le seul point non trivial à vérifier est que si (K,f) est bon et $\alpha(K,f) = -1$, -1 est pôle d'ordre au moins deux de $Z_K(s)$. D'après 2.13, 2.14 et le théorème 1.1 de [L.2] on a que -1 est pôle d'ordre au moins deux de $\int_X |{}^{\sigma}f|^{2s} dz\, d\bar{z}$.

Soit (Z, φ) une résolution des singularités de $(X, {}^{\sigma}f)$. On peut supposer, quitte à éclater, que les composantes irréductibles de la transformée stricte ne se rencontrent pas. On a alors nécessairement l'une des deux possibilités suivantes:

- ou deux composantes irréductibles distinctes D_i et D_j du diviseur exceptionnel s'intersectent et $\frac{v_i}{N_i} = \frac{v_j}{N_j} = 1$.
- ou une composante irréductible D_i du diviseur exceptionnel vérifiant $\frac{v_i}{N_i} = 1$ rencontre la transformée stricte du diviseur ${}^{\sigma}f^{-1}(0)$.

Dans ce cas, on a le résultat analogue pour une résolution (Y, π) de (K^n, f), car (K, f) est bon, et par un calcul direct sur celle-ci on obtient que -1 est un pôle d'ordre au moins deux de $Z_K(s)$.

Bibliographie

[D] Denef, J.: Poles of p-adic complex powers and Newton polyhedra. (Preprint)

[H] Hironaka, H.: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. Ann. Math. **79**, 1–2, 109–326 (1964)

[I.1] Igusa, J.I.: Complex powers and asymptotic expansions I, II. J. Reine Angew. Math. **268/269** , 110–130 (1974) et **278/279**, 357–368 (1975)

[I.2] Igusa, J.I.: On the first terms of certain asymptotic expansions. In: Complex and Algebraic Geometry. Tokyo: Iwanami Shoten; Cambridge: University Press 1977, pp. 357–368

[I.3] Igusa, J.I.: Some observations on higher degree characters. Am. J. Math. **99**, 2, 393-417 (1977)

[I.4] Igusa, J.I.: Lectures on forms of higher degree. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1978

[L.1] Loeser, F.: Exposant d'Arnold et sections planes. C.R. Acad. Sc. Paris, **298**, Sér. I 485–488 (1984)

[L.2] Loeser, F.: Quelques conséquences locales de la théorie de Hodge. Ann. Inst. Fourier, **35**, 75–92 (1985)

[S] Saito, M.: Exponents and the geometric genus of an isolated hypersurface singularity. Proc. Symp. Pure Math. **40**, 1983, pp. 465–472

[St.1] Steenbrink, J.H.M.: Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology. In: Real and Complex Singularities, Oslo 1976, Sijthoff-Noordhoff 1977, pp. 525–563

[St.2] Steenbrink, J.H.M.: Semicontinuity of the singularity spectrum. Invent. Math. **79**, 557–565 (1985)

[T] Teissier, B.: Variétés polaires I, Invariants des singularités d'hypersurfaces, Invent. Math. **40**, 267–292 (1977)

[V.1] Varchenko, A.: Newton polyhedra and estimation of oscillating integrals. Funct. Anal. Appl. **10**, 175–196 (1976)

[V.2] Varchenko, A.: Asymptotic mixed Hodge structure on vanishing cohomology. Izv. Akad. Nauk **45**, 540–591 (1981)

[V.3] Varchenko, A.: Asymptotic of holomorphic forms define mixed Hodge structure. Dokl. Akad. Nauk **255**, 1035–1038 (1980)

[V.4] Varchenko, A.: The complex exponent of a singularity does not change along the stata μ =const. Funct. Anal. Appl. **16**, 1–12 (1982)

Oblatum 16-IX-1985