Vol. 83, No. 3 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © June 1996

FAISCEAUX PERVERS ℓ-ADIQUES SUR UN TORE

OFER GABBER ET FRANÇOIS LOESER

1. Notations et conventions 505
2. Quelques rappels 507
3. Transformation de Mellin 509
   3.1. Torsion par le caractère générique 509
   3.2. L'espace des caractères ℓ-adiques 518
   3.3. Transformation de Mellin 521
   3.4. Transformation de Mellin et perversité 525
   3.5. Perversité et convolution 527
   3.6. Une localisation de $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ et de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ 528
   3.7. La catégorie $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ 531
   3.8. La catégorie $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ 535
   3.9. Localisation en dehors de Δ 536
4. Etude de $\Delta(A)$ 538
   4.1. Enoncé des résultats 538
   4.2. Calculs locaux en un diviseur à croisements normaux 539
   4.3. Un résultat intermédiaire 543
   4.4. Supports 546
   4.5. Démonstration du théorème 4.1.1′ 547
   4.6. Démonstration de la proposition 4.1.2 548
   4.7. Variantes relatives 550
5. Faisceaux pervers de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle 552
   5.1. Caractérisation des faisceaux pervers irréductibles de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle 552
   5.2. Démonstration du théorème 5.1.1 553
6. Support et variétés associées de $\mathscr{M}_*$ 555
   6.1. Support de $\mathscr{M}_*(A)$ 555
   6.2. Variétés associées de $\mathscr{M}_*(A)$ 558
   6.3. Support des fibres 559
   6.4. Compléments sur $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}$ et stabilité par image directe 560
   6.5. Enveloppe réflexive de $\mathscr{M}_*(A)$ 564
7. Le cône de $\mathscr{M}_! \to \mathscr{M}_*$ 566
   7.1. Le foncteur $\Delta\mathscr{M}$ 566
   7.2. Le résultat principal 567
   7.3. Lien avec les cycles proches 568

Reçu le 27 juin 1995. Révision reçue le 10 septembre 1995.

7.4. $\Delta\mathscr{M}$ et image directe 575
7.5. Définition des entiers $n_{S,x,\chi}$ et comportement par image directe 578
8. Faisceaux pervers de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à 1 et faisceaux pervers hypergéométriques 580
8.1. Complexes hypergéométriques 580
8.2. Caractérisation des faisceaux pervers irréductibles de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à 1 583
8.3. Début de la démonstration 584
8.4. Faisceaux hypergéométriques associés à un faisceau pervers 585
8.5. Fin de la démonstration 587
8.6. Le groupe $\mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T)$ 589
9. L'analogue pour les $\mathscr{D}$-modules du théorème 5.1.1 590
Appendice 591
A.1. Extension des scalaires et formule des coefficients universels......... 591
A.2. L'anneau $\overline{\mathbf{Q}}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Z}_\ell[[X_1, \ldots, X_n]]$ 595
A.3. Démonstration de la proposition 3.6.1 597
A.4. Démonstration de la proposition 6.3.2 599
A.5. Démonstration du théorème 3.7.5 600
Références 605

Introduction. Ce travail est consacré à l'étude de la catégorie des faisceaux pervers ℓ-adiques sur un tore défini sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ différente de ℓ. Nous avons été guidés par l'analogie avec les $\mathscr{D}$-modules en caractéristique 0. Rappelons quelques traits saillants de l'étude des $\mathscr{D}$-modules holonomes sur un tore effectuée dans [LS1] et [LS2].

Soit $(\mathbf{G}_m)^n$ le tore Spec $\mathbf{C}[x, x^{-1}]$ avec $x = x_1, \ldots, x_n$ et $x^{-1} = x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}$. On note $\mathscr{D}$ l'anneau des opérateurs différentiels algébriques sur le tore $(\mathbf{G}_m)^n$: $\mathscr{D} = \mathbf{C}[x, x^{-1}]\langle D\rangle$ avec $D = D_1, \ldots, D_n$ et $D_i = x_i\partial_{x_i}$. Posons $s_i = -D_i$ et $\tau_i = x_i$ de telle sorte que l'anneau $\mathbf{C}[x, x^{-1}]\langle D\rangle$ s'identifie à l'anneau $\mathbf{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ des opérateurs algébriques aux différences finies, c'est à dire au quotient de l'algèbre libre engendrée par $\mathbf{C}[s_1, \ldots, s_n]$ et $\mathbf{C}[\tau_1, \ldots, \tau_n, \tau_1^{-1}, \ldots, \tau_n^{-1}]$ par les relations $\tau_i \cdot s_i = (s_i + 1) \cdot \tau_i$ et $\tau_i \cdot s_j = s_j \cdot \tau_i$ si $i \neq j$. Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}$-module (à gauche) holonome. Notons $\mathfrak{M}(\mathscr{M})$ le module $\mathscr{M}$ vu comme $\mathbf{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$-module. C'est le transformé de Mellin du $\mathscr{D}$-module $\mathscr{M}$. Il résulte du théorème de Bernstein (cf. [LS1, théorème 1.2.1, 1]) que $\mathfrak{M}(\mathscr{M})(s) := \mathbf{C}(s) \otimes_{\mathbf{C}[s]} \mathfrak{M}(\mathscr{M})$ est de dimension finie sur $\mathbf{C}(s)$. Autrement dit, $\mathfrak{M}(\mathscr{M})(s)$ est un système rationnel holonome d'équations aux différences finies, c'est à dire un $\mathbf{C}(s)$-espace vectoriel de dimension finie muni d'automorphismes $\mathbf{C}$-linéaires $\tau_1, \ldots, \tau_n$ commutant entre eux et qui satisfont les relations précédentes. D'après [LS2], la dimension du $\mathbf{C}(s)$-espace vectoriel $\mathfrak{M}(\mathscr{M})(s)$ est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe de de Rham algébrique de $\mathscr{M}$. Réciproquement, on peut démontrer [LS1, théorème 1.2.1, 2] que tout système rationnel holonome d'équations aux différences finies peut être obtenu à partir d'un $\mathscr{D}$-module holonome. La catégorie des systèmes rationnels holonomes d'équations aux différences finies est naturellement munie d'une structure de catégorie tannakienne obtenue à partir du produit tensoriel $\otimes_{\mathbf{C}(s)}$, un foncteur fibre naturel étant obtenu par considération des espaces vectoriels sous-jacents. Ce produit correspond à la convolution multiplicative des $\mathscr{D}$-modules. L'ensemble des classes d'isomorphisme des systèmes rationnels holonomes d'équations aux différences finies de rang 1 forme un groupe abélien que l'on note $\mathbf{H}((\mathbf{G}_m)^n)$. Ce groupe est canoniquement isomorphe au groupe de cohomologie $H^1(\mathbf{Z}^n, \mathbf{C}(s)^\times)$, le groupe $\mathbf{Z}^n$ agissant par translation additive sur les variables $s_1, \ldots, s_n$.

Un théorème ancien, mais plusieurs fois redécouvert, de Ore permet de déterminer explicitement ce groupe.

THÉORÈME 0.1 [O], [Sa], [LS1]. *Soit $\tilde{\mathscr{L}}$ l'ensemble des formes linéaires non nulles sur $\mathbf{Q}^n$ à coefficients entiers premiers entre eux et soit $\mathscr{L}$ le quotient de $\tilde{\mathscr{L}}$ par la multiplication par ± 1. On a un isomorphisme de groupes abéliens*

$$H^1(\mathbf{Z}^n, \mathbf{C}(s)^\times) \simeq (\mathbf{C}^\times)^n \times \mathbf{Z}^{(\mathscr{L} \times \mathbf{C}/\mathbf{Z})}.$$

Ici $\mathbf{Z}^{(\mathscr{L} \times \mathbf{C}/\mathbf{Z})}$ désigne le groupe abélien des fonctions $\mathscr{L} \times \mathbf{C}/\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ à support fini.

Comme les éléments de $(\mathbf{C}^\times)^n \times \mathbf{Z}^{(\mathscr{L} \times \mathbf{C}/\mathbf{Z})}$ correspondent à des classes d'équivalence d'équations aux différences satisfaites par les coefficients des séries hypergéométriques, on peut paraphraser le théorème 0.1 de la façon suivante: "les systèmes rationnels holonomes d'équations aux différences finies de rang 1 correspondent à des séries hypergéométriques." En fait, d'après [LS2, II], le groupe $\mathbf{H}((\mathbf{G}_m)^n)$ est isomorphe à l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathscr{D}$-modules holonomes irréductibles de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à 1, le produit provenant du produit de convolution, et tout tel $\mathscr{D}$-module est sous-objet d'un $\mathscr{D}$-module hypergéométrique.

Considérons maintenant un corps algébriquement clos k de caractéristique $p > 0$, un nombre premier ℓ différent de p, et un tore T défini sur k.

Un des énoncés principaux de cet article est l'analogue suivant du théorème de Ore. On note $\mathbf{H}(T)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux pervers ℓ-adiques irréductibles sur T, de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à 1. On peut naturellement munir $\mathbf{H}(T)$ d'une structure de groupe provenant du produit de convolution (3.7.6, 3.7.7). On note $\mathscr{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ le groupe des caractères ℓ-adiques continus (à valeurs dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$) du groupe fondamental modéré de $\mathbf{G}_{m,k}$.

THÉORÈME 0.2. *Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des sous-tores de dimension* 1 *de T. On a un isomorphisme de groupes abéliens*

$$\mathbf{H}(T) \simeq T(k) \times \mathbf{Z}^{(\mathscr{S} \times \mathscr{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\overline{\mathbf{Q}}_\ell))}.$$

Décrivons plus en détail le contenu de ce travail. On construit dans la section 3 des foncteurs de transformation de Mellin définis pour les faisceaux pervers ℓ-adiques sur T, et plus généralement sur les objets de $D^b_c(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, la catégorie dérivée des complexes de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux à cohomologie bornée et constructible. Pour cela, on munit le groupe des caractères ℓ-adiques continus du groupe fondamental modéré de T d'une structure de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-schéma (3.2), et on note $\mathscr{C}(T)$ ce schéma. Dès que la dimension de T est strictement positive, $\mathscr{C}(T)$ a une infinité dénombrable de composantes connexes (qui sont en correspondance avec les caractères d'ordre fini premier à ℓ). Les composantes connexes sont des schémas affines réguliers (en particulier noethériens) et sont isomorphes à Spec $\overline{\mathbf{Q}}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Z}_\ell[[X_1, \ldots, X_n]]$. Soit $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{C}(T))$ la catégorie dérivée des complexes de $\mathscr{O}_{\mathscr{C}(T)}$-modules à cohomologie bornée et cohérente. On définit alors des foncteurs de transformation de Mellin $\mathscr{M}_!$ et $\mathscr{M}_*\colon D^b_c(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{C}(T))$ tels que, pour tout point fermé χ de $\mathscr{C}(T)$, l'image inverse totale de $\mathscr{M}_!(A)$ (resp., $\mathscr{M}_*(A)$) sur le point fermé χ soit canoniquement isomorphe à $R\Gamma_c(T, A \otimes \mathscr{L}_\chi)$ (resp. $R\Gamma(T, A \otimes \mathscr{L}_\chi)$), en notant $\mathscr{L}_\chi$ le faisceau de Kummer associé à χ. Moralement ces foncteurs sont construits en remplaçant $\mathscr{L}_\chi$ par le faisceau de Kummer "générique." On étudie en 3.3 le comportement de ces foncteurs par rapport aux opérations usuelles. Un résultat essentiel est que le foncteur de transformation de Mellin $\mathscr{M}_*$ est t-exact (3.4). Il transforme un faisceau pervers A en un $\mathscr{O}_{\mathscr{C}(T)}$-module cohérent et le rang générique de ce module sur toutes les composantes connexes de $\mathscr{C}(T)$ est égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(T, A)$ de A. En particulier on retrouve que $\chi(T, A)$ est toujours un entier positif ou nul, un résultat de Laumon [La2]. Il ne semble pas facile en général de déterminer l'image essentielle des foncteurs $\mathscr{M}_!$ et $\mathscr{M}_*$, une des difficultés venant de la non connexité de $\mathscr{C}(T)$. Une condition nécessaire est donnée par le fait que, pour tout objet A de $D^b_c(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, le support des objets $\mathscr{M}_!(A)$ et $\mathscr{M}_*(A)$ est une réunion finie de cotores algébriques translatés. Un cotore algébrique translaté est un sous-schéma de $\mathscr{C}(T)$ de la forme $\chi \cdot p^\vee \mathscr{C}(T')$ avec χ un point fermé de $\mathscr{C}(T)$ et $p^\vee\colon \mathscr{C}(T') \to \mathscr{C}(T)$ l'immersion fermée associée par fonctorialité à un morphisme surjectif de tores $p\colon T \to T'$ à noyau connexe. Quand A est pervers, on a de plus, sous une hypothèse d'existence de résolutions des singularités, que les variétés associées du module $\mathscr{M}_*(A)$ sont exactement les composantes connexes d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés. Ces énoncés sont démontrés dans la section 6, comme conséquence du théorème suivant, qui est démontré dans la section 5.

THÉORÈME 0.3. *Soit T un tore de dimension $n \geqslant 0$ et soit A un faisceau pervers ℓ-adique irréductible sur le tore T, vérifiant $\chi(T, A) = 0$. Alors il existe un morphisme surjectif de tores $p\colon T \to T'$ à noyau connexe, avec T' de dimension $n - 1$, un faisceau pervers ℓ-adique A' sur T' et un point fermé χ dans $\mathscr{C}(T)$ tels que*

$$A \simeq \mathscr{L}_\chi \otimes p^*(A'[1]).$$

Un outil technique important dans la preuve des théorèmes 0.2 et 0.3 est l'étude du support $\Delta(A)$ du cône du morphisme canonique $\mathscr{M}_!(A) \to \mathscr{M}_*(A)$ donné par oubli des supports. De premiers résultats concernant $\Delta(A)$ sont obtenus dans la section 4 et permettent de démontrer le théorème 0.3, mais ce n'est que dans la section 7, que l'on démontre, en utilisant les résultats des sections précédentes, que $\Delta(A)$ est, en codimension 1, réunion d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés de codimension 1.

Dans la section 3 on introduit également une catégorie remarquable de faisceaux pervers sur T, notée $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T)$, qui est stable par produit de convolution et contient les faisceaux pervers irréductibles de caractéristique d'Euler-Poincaré strictement positive. On démontre que cette catégorie est une $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-catégorie tannakienne. Dans la section 6, on obtient des énoncés de stabilité par image directe. Sous certaines hypothèses, l'image directe par un morphisme de tores d'un objet de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T)$ tordu par un faisceau de Kummer assez général appartient encore à $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T)$. La section 8 est consacrée aux complexes hypergéométriques sur T. On démontre, en utilisant la transformation de Mellin, que ce sont toujours des faisceaux pervers. Les résultats des sections précédentes nous permettent alors de caractériser les faisceaux pervers irréductibles de caractéristique d'Euler-Poincaré 1 sur T comme les objets hypergéométriques de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T)$ (théorème 8.2). Cet énoncé est le point clé de la démonstration du théorème 0.2. Quand $n = 1$ un tel résultat avait été obtenu par Katz [K2]. Dans la section 9 on démontre l'analogue du théorème 0.3 pour les $\mathscr{D}$-modules. Nous avons regroupé en appendice les démonstrations de résultats "bien connus" mais ne se trouvant pas explicitement dans la littérature ou trop techniques pour trouver leur place dans le corps de l'article. Remarquons enfin que les constructions et les résultats des sections 2 à 7 et de l'appendice restent valides, avec des simplifications évidentes, dans le cas où k est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

Remerciements. Le présent texte reprend, avec des démonstrations plus détaillées, un texte précédent des mêmes auteurs, paru avec le même titre comme prépublication du Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique (novembre 1993). Les théorèmes 3.7.5 et 8.6.1 ne figuraient pas dans cette version antérieure. Nous tenons à remercier G. Laumon qui nous a communiqué ses textes [La2] et [La3] ainsi que L. Illusie pour ses remarques concernant la version précédente de ce texte. Nous remercions également le rapporteur pour ses commentaires utiles.

1. Notations et conventions

1.1. Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, ℓ un nombre premier distinct de p, et $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_\ell$. On pose $\hat{\mathbf{Z}}(1)(k) = \varprojlim_{(p,N)=1} \mu_N(k)$ et $\mathbf{Z}_\ell(1)(k) = \varprojlim \mu_{\ell^n}(k)$.

1.2. On pose $\mathbf{G}_{m,k} = \operatorname{Spec} k[x, x^{-1}]$. Pour $n \geqslant 0$, un k-tore T de dimension n est un k-schéma en groupes isomorphe à $(\mathbf{G}_{m,k})^n$. Un quotient de T est un morphisme surjectif de tores $T \to T'$ dont le noyau est un tore. On note $X_*(T)$ le groupe abélien libre de rang n, $X_*(T) = \mathrm{Hom}_{k\text{-gr}}(\mathbf{G}_{m,k}, T)$, $\hat{X}_*(T) =$

$X_*(T) \otimes_{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{Z}}(1)(k)$ et $X_{*\ell}(T) = X_*(T) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_\ell(1)(k)$. On a des isomorphismes canoniques $X_*(\mathbf{G}_{m,k}) \simeq \mathbf{Z}$, $\hat{X}_*(\mathbf{G}_{m,k}) \simeq \hat{\mathbf{Z}}(1)(k)$ et $X_{*\ell}(\mathbf{G}_{m,k}) \simeq \mathbf{Z}_\ell(1)(k)$.

1.3. Pour tout k-tore T, on note $\pi_1(T)$ le groupe fondamental de T pointé en 1, $\pi_1(T)^t$ le groupe fondamental modéré, c'est à dire le quotient de $\pi_1(T)$ classifiant les revêtements modérés (cf. 1.9) de T, et $\pi_1(T)_\ell$ le quotient pro-ℓ maximal de $\pi_1(T)^t$. Par la théorie de Kummer $\hat{X}_*(T)$ s'identifie à $\pi_1(T)^t$ et $X_{*\ell}(T)$ à $\pi_1(T)_\ell$.

1.4. Pour tout caractère continu $\chi\colon \hat{X}_*(T) \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ on note $\mathscr{L}_\chi$ le faisceau de Kummer correspondant (un tel χ se factorise par $R^\times$ avec R l'anneau des entiers d'une extension finie convenable de $\mathbf{Q}_\ell$ contenue dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$). C'est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 sur T. Si R est un sous-anneau de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ on note $\mathscr{C}(T, R^\times)$ le groupe des caractères continus $\chi\colon \hat{X}_*(T) \to R^\times$.

1.5. Tous les k-schémas seront supposés séparés et de type fini. Les produits de k-schémas $X \times_k Y$ seront notés simplement $X \times Y$.

Si X est un k-schéma on note $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ la catégorie dérivée des complexes de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux à cohomologie bornée constructible et $\mathrm{Perv}(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ la catégorie abélienne des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux pervers [D1], [BBD], [E]. Si R est un anneau local régulier complet et de corps résiduel de caractéristique ℓ, on note $D_c^b(X, R)$ la catégorie triangulée définie dans [E, Theorem 6.3] (et notée $D_c^b(X - R)$ dans loc. cit.). Toutes ces catégories sont stables par la dualité de Verdier $K \mapsto D(K) := R\mathscr{H}\mathrm{om}(K, f^!A)$, pour $A = \overline{\mathbf{Q}}_\ell$ (resp., R), en notant f le morphisme structural $X \to \mathrm{Spec}\, k$. Pour K un objet de $D_c^b(X, A)$, on note ${}^pH^iK$ l'objet de cohomologie pervers en degré i associé à K.

1.6. Soit T un k-tore. On note $m\colon T \times T \to T$ le morphisme de multiplication et p_i les projections. On définit des bifoncteurs $*_*$ (convolution) et $*_!$ (convolution à support propre) $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \times D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ de la façon suivante. Soient A et B des objets de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. On pose

$$A *_* B := Rm_*(p_1^*A \otimes^L p_2^*B)$$

et

$$A *_! B := Rm_!(p_1^*A \otimes^L p_2^*B).$$

1.7. Si R est un anneau régulier, on note $D_{\mathrm{coh}}^b(R)$ la sous-catégorie de la catégorie dérivée de la catégorie des R-modules formée des complexes à cohomologie bornée et cohérente (i.e., de type fini). Pour tout objet K de $D_{\mathrm{coh}}^b(R)$, on pose $DK := R\,\mathrm{Hom}(K, R)$. Si $\mathscr{X}$ est un schéma localement noethérien régulier de dimension finie, on définit de même la catégorie triangulée $D_{\mathrm{coh}}^b(\mathscr{X})$ et pour tout objet K de $D_{\mathrm{coh}}^b(\mathscr{X})$, on pose $DK := R\mathscr{H}\mathrm{om}(K, \mathscr{O}_{\mathscr{X}})$. Avec ces conventions on a des isomorphismes de foncteurs $D \circ D \simeq \mathrm{Id}$.

1.8. Si R est un anneau commutatif topologique linéairement topologisé et G un groupe abélien profini, on pose $R[[G]] = \varprojlim R/I[G/U]$, la limite étant prise sur les idéaux ouverts I de R et les sous-groupes ouverts U de G.

1.9. Soit X un k-schéma lisse sur k et admettant une compactification lisse $X \hookrightarrow \overline{X}$ telle que $\overline{X} - X$ soit un diviseur à croisements normaux. On dira d'un revêtement fini étale $X' \to X$ qu'il est modéré s'il est modérément ramifié en chaque point générique de $\overline{X} - X$. On démontre à l'aide du lemme d'Abhyankar [SGA1, Exp. XIII, 5.2] que cette propriété est indépendante du choix de la compactification.

2. Quelques rappels

2.1. Pour tout k-schéma X on note $K(X)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux constructibles sur X. Si $\pi\colon X \to Y$ est un morphisme de k-schémas, on note $[\pi_*]$ et $[\pi_!]$ les morphismes de groupes de Grothendieck induits respectivement par l'image directe usuelle et l'image directe à support propre. Le résultat suivant est dû à Laumon.

THÉORÈME 2.1 [La1]. *Si $\pi\colon X \to Y$ est un morphisme de k-schémas, on a $[\pi_*] = [\pi_!]$.*

En particulier, si X est un k-schéma, pour tout objet A de $D_c^b(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ on a l'égalité de la caractéristique d'Euler-Poincaré usuelle

$$\chi(X, A) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(X, A)$$

et de la caractéristique d'Euler-Poincaré à support compact

$$\chi_c(X, A) = \sum_i (-1)^i \dim H_c^i(X, A).$$

2.2. Nous utiliserons l'énoncé suivant, conséquence de résultats de Deligne exposés dans [I1].

PROPOSITION 2.2. *Soient T un tore sur k et A un objet de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Pour tout χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$ on a $\chi(T, A \otimes \mathscr{L}_\chi) = \chi(T, A)$.*

2.3. Rappelons le résultat suivant, dû à Katz et Laumon.

THÉORÈME 2.3.1 [KLa, (6.5.2)]. *Soient S un k-schéma, p_1 et p_2 les projections de $S \times \mathbf{G}_{m,k}$, et A un objet de $D_c^b(S \times \mathbf{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Alors pour presque tout χ dans $\mathscr{C}(\mathbf{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$ le morphisme canonique*

$$Rp_{1!}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi)) \to Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi))$$

est un isomorphisme.

Remarque. L'énoncé de [KLa, (6.5.2)] n'est donné que pour les caractères d'ordre fini, mais la démonstration s'étend sans changement à l'énoncé présent.

On en déduit par récurrence l'énoncé suivant. On dit qu'une propriété est vérifiée pour presque tout $(\chi_1, \dots, \chi_n)$ dans $(\mathscr{C}(\mathbf{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times))^n \simeq \mathscr{C}((\mathbf{G}_{m,k})^n, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$, dans le cas où $n = 0$ si elle est vérifée, dans le cas où $n \geqslant 1$ si pour tout χ_1 excepté un ensemble fini elle est vérifiée pour presque tout $(\chi_2, \dots, \chi_n)$.

COROLLAIRE 2.3.2. *Soient n un entier $\geqslant 0$, S un k-schéma, p_1 et p_2 les projections de $S \times (\mathbf{G}_{m,k})^n$, et A un objet de $D_c^b(S \times (\mathbf{G}_{m,k})^n, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Alors pour presque tout χ dans $\mathscr{C}((\mathbf{G}_{m,k})^n, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$ le morphisme canonique*

$$Rp_{1!}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi)) \to Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi))$$

est un isomorphisme.

2.4. On utilisera le lemme suivant.

LEMME 2.4. *Soit $p\colon X \to Y$ un morphisme affine de k-schémas. Soit A un objet de* $\operatorname{Perv}(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. *Si le morphisme canonique $Rp_!(A) \to Rp_*(A)$ est un isomorphisme, alors $Rp_!(A)$ est un faisceau pervers sur Y.*

Démonstration. D'après [BBD, 4.1] le foncteur Rp_* est t-exact à droite tandis que le foncteur $Rp_!$ est t-exact à gauche. Par conséquent, si A est pervers sur X et si le morphisme canonique $Rp_!(A) \to Rp_*(A)$ est un isomorphisme, alors $Rp_!(A)$ est pervers. □

2.5. Soient X et Y des k-schémas et soit $f\colon X \to Y$ un morphisme lisse, de dimension relative d, à fibres géométriques connexes (et donc par définition non vides). Soit $\mathscr{F}$ un objet de $\operatorname{Perv}(X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. D'après [BBD, p. 111], on peut parler du plus grand sous-objet $\mathscr{F}_0$ et du plus grand quotient $\mathscr{F}_1$ de $\mathscr{F}$ provenant de Y par image inverse. D'après loc. cit. ces objets admettent la description suivante: on a un monomorphisme canonique

$$f^*({}^pH^{-d}Rf_*\mathscr{F})[d] \to \mathscr{F}$$

et un épimorphisme canonique

$$\mathscr{F} \to f^!({}^pH^dRf_!\mathscr{F})[-d] = f^*({}^pH^dRf_!\mathscr{F}(d))[d]$$

qui permettent d'identifier $\mathscr{F}_0$ à $f^*({}^pH^{-d}Rf_*\mathscr{F})[d]$ et $\mathscr{F}_1$ à $f^*({}^pH^dRf_!\mathscr{F}(d))[d]$.

2.6. Rappelons pour mémoire les propriétés suivantes du produit de convolution.

PROPOSITION 2.6. (1) *Soit $\pi\colon T \to T'$ un morphisme de tores. Soient A et B des objets de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. On a des isomorphismes canoniques*

$$R\pi_*(A *_* B) \simeq R\pi_*(A) *_* R\pi_*(B) \text{ et } R\pi_!(A *_! B) \simeq R\pi_!(A) *_! R\pi_!(B).$$

(2) *Soit T un tore et soit $\chi\colon \hat{X}_*(T) \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ un caractère continu. Soient A et B des objets de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. On a des isomorphismes canoniques*

$$(A *_* B) \otimes \mathscr{L}_\chi \simeq (A \otimes \mathscr{L}_\chi) *_* (B \otimes \mathscr{L}_\chi) \text{ et}$$

$$(A *_! B) \otimes \mathscr{L}_\chi \simeq (A \otimes \mathscr{L}_\chi) *_! (B \otimes \mathscr{L}_\chi).$$

Démonstration. Le premier énoncé résulte de l'égalité $m \circ (\pi \times \pi) = \pi \circ m$, en notant m le morphisme de multiplication. Le second énoncé est une conséquence de la formule de projection et de l'isomorphisme canonique $m^* \mathscr{L}_\chi \simeq \mathscr{L}_\chi \boxtimes \mathscr{L}_\chi$. □

3. Transformation de Mellin

3.1. Torsion par le caractère générique. Soit R un anneau local régulier complet et de corps résiduel de caractéristique ℓ. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $R_n = R/\mathfrak{M}^n$, en notant $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal de R. Pour tout k-tore T, on pose

$$\Omega_T := R[[\pi_1(T)_\ell]].$$

C'est un anneau local régulier complet et de corps résiduel de caractéristique ℓ. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $\Omega_{T,n} = \Omega_T/\mathfrak{M}(\Omega_T)^n$, en notant $\mathfrak{M}(\Omega_T)$ l'idéal maximal de Ω_T. Le morphisme canonique $R \to \Omega_T$ est local. Plus généralement, pour tout morphisme de tore $T' \to T$, le morphisme $\Omega_{T'} \to \Omega_T$ est local.

Par la théorie de Kummer Ω_T s'identifie à $R[[X_{*\ell}(T)]]$. Pour tout choix d'un générateur γ de $\mathbf{Z}_\ell(1)(k)$, on a, par la théorie d'Iwasawa, un isomorphisme

$$R[[\mathbf{Z}_\ell(1)(k)]] \simeq R[[t]],$$

à savoir celui qui envoie γ sur $1 + t$. Ainsi pour tout isomorphisme $\varphi\colon T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$, on a, étant donné γ, un isomorphisme

$$\Omega_T \simeq R[[t_1, \dots, t_n]].$$

L'anneau Ω_T est muni d'une involution, que l'on notera inv, associée au morphisme d'inversion $\pi_1(T)_\ell \to \pi_1(T)_\ell$. D'autre part, pour tout caractère continu $\chi\colon \pi_1(T)_\ell \to R^\times$, il existe un unique automorphisme continu de R-algèbres φ_χ de Ω_T tel que, pour tout γ dans $\pi_1(T)_\ell$, on ait $\varphi_\chi(\gamma) = \chi(\gamma) \cdot \gamma$.

Soit $\kappa\colon \pi_1(T)_\ell \to \Omega_T^\times$ le caractère "tautologique" défini par $\kappa(\gamma) = \gamma$ pour tout γ dans $\pi_1(T)_\ell$. En composant κ avec la projection canonique $\delta\colon \pi_1(T) \to \pi_1(T)_\ell$, on obtient un caractère continu

$$\operatorname{can}_T\colon \pi_1(T) \to \Omega_T^\times$$

auquel est associé un Ω_T-faisceau lisse constructible libre tordu de rang 1 sur T

que l'on note L_T. Par construction, c'est un faisceau modérément ramifié. On considérera L_T comme un objet de la catégorie triangulée $D_c^b(T,\Omega_T)$ définie dans [E] (cf. Appendice). En composant can_T avec inv, on obtient de même un Ω_T-faisceau lisse constructible libre tordu de rang 1 sur T que l'on note $L_T^\vee$. Dans la catégorie $D_c^b(T,\Omega_T)$ on a un isomorphisme canonique $L_T^\vee \simeq R\mathscr{H}om_{\Omega_T}(L_T,\Omega_T)$.

PROPOSITION 3.1.1. *Soit π: $T \to T'$ un morphisme de tores.*
(i) *On a un isomorphisme canonique*

$$L\pi^* L_{T'} \simeq L_T \otimes^L_{\Omega_T} \Omega_{T'}.$$

(ii) *Si π est un morphisme quotient de dimension relative d, on peut voir $L_{T'}$ comme un objet de $D_c^b(T',\Omega_T)$ et on a des isomorphismes canoniques dans $D_c^b(T',\Omega_T)$:*

$$R\pi_* L_T \simeq \left(\bigwedge\nolimits^{\max}_{\mathbf{Z}_\ell} \pi_1(\operatorname{Ker}\pi)_\ell\right)^\vee \otimes^L_{\mathbf{Z}_\ell} L_{T'}[-d]$$

et

$$R\pi_! L_T \simeq L_{T'}[-2d](-d)$$

(On a un morphisme canonique $\mathbf{Z}_\ell \to R$ et $^\vee$ désigne le $\mathbf{Z}_\ell$-module dual.)

Démonstration. L'énoncé (i) résulte de ce que le composé du morphisme canonique $\pi_1(T) \to \pi_1(T')$ avec $\mathrm{can}_{T'}$: $\pi_1(T') \to \Omega_{T'}^\times$ coïncide avec $\mathrm{can}_T \otimes_{\Omega_T} \Omega_{T'}$: $\pi_1(T) \to \Omega_{T'}^\times$. Démontrons (ii). Comme π est un morphisme quotient, l'anneau $\Omega_{T'}$ est un quotient de Ω_T, ce qui permet de voir naturellement $L_{T'}$ comme un Ω_T-faisceau lisse constructible. Plus généralement, on peut voir tout objet de $D_c^b(T',\Omega_{T'})$ comme un objet de $D_c^b(T',\Omega_T)$.

Calculons $R\pi_* L_T$. Soit n la dimension de T. On fait agir $\pi_1(T)$ sur Ω_T par le caractère can_T. Le faisceau L_T est le Ω_T-faisceau lisse associé au $\pi_1(T)$-module Ω_T. Pour tout k-tore T on note $\tilde{T}^t$ le "revêtement universel modéré" de T, c'est à dire la limite projective $\varprojlim_{(n,p)=1}\{T_n, p^n_m\}$, avec $T_n = T$ pour tout entier n strictement positif premier à p et, pour m divisant n, p^n_m: $T_n \to T_m$ donné par $t \mapsto t^{n/m}$. Comme, pour tout k-tore T, $\tilde{T}^t$ est acyclique pour les coefficients constants de ℓ-torsion (cf. 4.2.1), on déduit de la suite spectrale de Hochschild-Serre asssociée au revêtement $\widetilde{\operatorname{Ker}\pi}^t \times s(T') \to T$ (où s est une section de π) que, pour tout entier i, le faisceau de cohomologie $R^i\pi_* L_T$ est isomorphe au faisceau lisse constructible associé au $\pi_1(T')$-module $H^i(\pi_1(\operatorname{Ker}\pi)^t,\Omega_T)$. Choisissons des générateurs topologiques $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ de $\pi_1(T)^t$ tels que $\gamma_1,\dots,\gamma_d$ soient des générateurs topologiques de $\pi_1(\operatorname{Ker}\pi)^t$. On a alors un isomorphisme $\Omega_T \simeq R[[t_1,\dots,t_n]]$, avec $t_i = \gamma_i - 1$, et le complexe $R\Gamma(\pi_1(\operatorname{Ker}\pi)^t,\Omega_T)$ est isomorphe au complexe de

Koszul $K^{\cdot}((t_1,\dots,t_d),R[[t_1,\dots,t_n]])$ (cf. [Laz, V.2.2.3]). Comme on a

$$H^qK^{\cdot}((t_1,\dots,t_d),R[[t_1,\dots,t_n]])=0 \qquad \text{pour } q\neq d,$$

et

$$H^dK^{\cdot}((t_1,\dots,t_d),R[[t_1,\dots,t_n]])\simeq R[[t_{d+1},\dots,t_n]],$$

on obtient un isomorphisme, non canonique, $R\pi_*L_T\simeq L_{T'}[-d]$, $L_{T'}$ étant vu comme un Ω_T-faisceau.

Comme, pour tout objet B de $D_c^b(T',\Omega_T)$ isomorphe dans $D_c^b(T',\Omega_T)$ à $L_{T'}$ on a un isomorphisme canonique $B\simeq \mathscr{H}^0(B\otimes^L_{\Omega_T}\Omega_{T'})$, on en déduit, en prenant $B=R\pi_*L_T[d]$, un isomorphisme canonique

$$R^d\pi_*L_T\simeq \mathscr{H}^d(R\pi_*L_T\otimes^L_{\Omega_T}\Omega_{T'}).$$

D'autre part, on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}
&(1) & R\pi_*L_T\otimes^L_{\Omega_T}\Omega_{T'} &\simeq R\pi_*(L_T\otimes^L_{\Omega_T}\Omega_{T'})\\
&(2) & &\simeq R\pi_*(\pi^*L_{T'})\\
&(3) & &\simeq R\pi_*(\mathbf{Z}_\ell\otimes^L_{\mathbf{Z}_\ell}\pi^*L_{T'})\\
&(4) & &\simeq R\pi_*(\mathbf{Z}_\ell)\otimes^L_{\mathbf{Z}_\ell}L_{T'}
\end{aligned}$$

(1) est conséquence de A.1.5 (i), (2) de (i), (3) est clair, et (4) résulte de A.1.5 (i).

On en tire que

$$\mathscr{H}^d(R\pi_*L_T\otimes^L_{\Omega_T}\Omega_{T'})\simeq \mathscr{H}^d(R\pi_*(\mathbf{Z}_\ell)\otimes^L_{\mathbf{Z}_\ell}L_{T'})\simeq R^d\pi_*(\mathbf{Z}_\ell)\otimes_{\mathbf{Z}_\ell}L_{T'},$$

d'où le résultat recherché car on a un isomorphisme canonique

$$R^d\pi_*(\mathbf{Z}_\ell)\simeq \Big(\textstyle\bigwedge^{\max}_{\mathbf{Z}_\ell}\pi_1(\operatorname{Ker}\pi)_\ell\Big)^\vee.$$

On en déduit le calcul de $R^d\pi_!L_T$ de la façon suivante. On a des isomorphismes canoniques

$$R\mathscr{H}\mathrm{om}_{\Omega_T}(L_T^\vee,\Omega_T)\simeq L_T$$

et

$$R\mathscr{H}\mathrm{om}_{\Omega_T}(L_{T'}^\vee,\Omega_T)\simeq \Big(\textstyle\bigwedge^{\max}_{\mathbf{Z}_\ell}\pi_1(\operatorname{Ker}\pi)_\ell\Big)^\vee\otimes^L_{\mathbf{Z}_\ell}L_{T'}[-d],$$

le premier isomorphisme étant clair et le second (où $L_{T'}^{\vee}$ est vu comme un Ω_T-faisceau) résultant du lemme suivant.

LEMME 3.1.2. *Si $\pi\colon T \to T'$ est un morphisme quotient de dimension relative d, on a un isomorphisme canonique*

$$R\mathrm{Hom}_{\Omega_T}(\Omega_{T'}, \Omega_T) \simeq \Big(\bigwedge\nolimits_{\mathbf{Z}_\ell}^{\max} \pi_1(\mathrm{Ker}\, \pi)_\ell\Big)^{\vee} \otimes^{L}_{\mathbf{Z}_\ell} \Omega_{T'}[-d].$$

Démonstration. Soit J le noyau du morphisme surjectif $\Omega_T \to \Omega_{T'}$. Comme J est engendré par une suite régulière de longueur d, on a $\mathrm{Ext}^i_{\Omega_T}(\Omega_{T'}, \Omega_T) = 0$ pour $i \neq d$ et un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^d_{\Omega_T}(\Omega_{T'}, \Omega_T) \simeq \mathrm{Hom}_{\Omega_T}\Big(\bigwedge\nolimits^d (J/J^2), \Omega_T/J\Big)$$

(cf. [AK, I.4.5]). Le module de droite est clairement canoniquement isomorphe à $\Big(\bigwedge\nolimits_{\mathbf{Z}_\ell}^{\max} \pi_1(\mathrm{Ker}\, \pi)_\ell\Big)^{\vee} \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \Omega_{T'}$. □

On conclut en dualisant l'isomorphisme

$$R\pi_* L_T^{\vee} \simeq \Big(\bigwedge\nolimits_{\mathbf{Z}_\ell}^{\max} \pi_1(\mathrm{Ker}\, \pi)_\ell\Big)^{\vee} \otimes^{L}_{\mathbf{Z}_\ell} L_{T'}^{\vee}[-d],$$

que l'on obtient en remplaçant L_T par $L_T^{\vee}$ dans le calcul de $R\pi_* L_T$: on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} R\pi_! L_T &\simeq R\mathscr{H}\mathrm{om}_{\Omega_T}(R\pi_* L_T^{\vee}, \Omega_T)[-2d](-d) \\ &\simeq R\mathscr{H}\mathrm{om}_{\Omega_T}\bigg(\Big(\bigwedge\nolimits_{\mathbf{Z}_\ell}^{\max} \pi_1(\mathrm{Ker}\, \pi)_\ell\Big)^{\vee} \otimes^{L}_{\mathbf{Z}_\ell} L_{T'}^{\vee}[-d], \Omega_T\bigg)[-2d](-d) \\ &\simeq L_{T'}[-2d](-d). \end{aligned}$$

□

Pour tout objet A de $D^b_c(T, R)$, on considère l'objet $A \otimes^L_R L_T$ de $D^b_c(T, \Omega_T)$ tel que défini dans l'appendice A.1. On note $f\colon T \to \mathrm{Spec}\, k$ le morphisme structural. Remarquons (cf. [E, Theorem 7.2]) que la catégorie $D^b_c(\mathrm{Spec}\, k, \Omega_T)$ est équivalente à la catégorie $D^b_{\mathrm{coh}}(\Omega_T)$, la sous-catégorie de la catégorie dérivée de la catégorie des Ω_T-modules formée des complexes à cohomologie bornée et cohérente. D'après [E, Theorem 6.3], les complexes $Rf_!(A \otimes^L_R L_T)$ et $Rf_*(A \otimes^L_R L_T)$ sont des objets de $D^b_c(\mathrm{Spec}\, k, \Omega_T)$. On notera $\mathscr{M}^R_!(A)$ et $\mathscr{M}^R_*(A)$ les objets correspondants de $D^b_{\mathrm{coh}}(\Omega_T)$. On définit ainsi des foncteurs exacts de catégories triangulées

$$\mathscr{M}^R_!\colon D^b_c(T, R) \to D^b_{\mathrm{coh}}(\Omega_T)$$

et

$$\mathscr{M}_*^R : D_c^b(T,R) \to D_{\mathrm{coh}}^b(\Omega_T).$$

PROPOSITION 3.1.3. *Les foncteurs $\mathscr{M}_!^R$ et $\mathscr{M}_*^R$ vérifient les propriétés suivantes.*

(a) *Au morphisme de foncteurs $Rf_! \to Rf_*$ correspond un morphisme de foncteurs $\mathscr{M}_!^R \to \mathscr{M}_*^R$.*

(b) *Dualité: pour tout objet A de $D_c^b(T,R)$ on a des isomorphismes canoniques*

$$D(\mathscr{M}_!^R(A)) \simeq \mathscr{M}_*^R(DA) \otimes_{\mathrm{inv}}^L \Omega_T$$

et

$$D(\mathscr{M}_*^R(A)) \simeq \mathscr{M}_!^R(DA) \otimes_{\mathrm{inv}}^L \Omega_T,$$

le foncteur D étant normalisé comme en 1.7.

(c) *Compatibilité à l'image directe: si $\pi: T \to T'$ est un morphisme de tores on a, pour tout objet A de $D_c^b(T,R)$, des isomorphismes canoniques*

$$\mathscr{M}_!^R(R\pi_!(A)) \simeq \Omega_{T'} \otimes_{\Omega_T}^L \mathscr{M}_!^R(A)$$

et

$$\mathscr{M}_*^R(R\pi_*(A)) \simeq \Omega_{T'} \otimes_{\Omega_T}^L \mathscr{M}_*^R(A).$$

(d) *Compatibilité à l'image inverse pour les tores quotients: si $\pi: T \to T'$ est un morphisme quotient de dimension relative d, on a, pour tout objet A de $D_c^b(T',R)$, des isomorphismes canoniques*

$$\mathscr{M}_!^R(\pi^*(A)) \simeq \mathscr{M}_!^R(A(-d))[-2d]$$

et

$$\mathscr{M}_*^R(\pi^*(A)) \simeq \left(\textstyle\bigwedge_{\mathbf{Z}_\ell}^{\max} \pi_1(\mathrm{Ker}\,\pi)_\ell\right)^\vee \otimes_{\mathbf{Z}_\ell}^L (\mathscr{M}_*^R(A)[-d]),$$

$\mathscr{M}_!^R(A)$ et $\mathscr{M}_*^R(A)$ étant vus comme des objets de $D_{\mathrm{coh}}^b(\Omega_T)$.

(e) *Compatibilité au produit externe: si $T = T_1 \times T_2$ est un produit de tores, on note p_1 et p_2 les projections canoniques. Soient A_i, pour $i = 1,2$, des objets de $D_c^b(T_i,R)$. On a des isomorphismes canoniques*

$$\mathscr{M}_!^R(p_1^*(A_1) \otimes_R^L p_2^*(A_2)) \simeq (\mathscr{M}_!^R(A_1) \otimes_{\Omega_{T_1}}^L \Omega_{T_1\times T_2}) \otimes_{\Omega_{T_1\times T_2}}^L (\mathscr{M}_!^R(A_2) \otimes_{\Omega_{T_2}}^L \Omega_{T_1\times T_2})$$

et

$$\mathscr{M}_*^R(p_1^*(A_1) \otimes_R^L p_2^*(A_2)) \simeq (\mathscr{M}_*^R(A_1) \otimes_{\Omega_{T_1}}^L \Omega_{T_1\times T_2}) \otimes_{\Omega_{T_1\times T_2}}^L (\mathscr{M}_*^R(A_2) \otimes_{\Omega_{T_2}}^L \Omega_{T_1\times T_2}).$$

(f) *Convolution: si A_1 et A_2 sont des objets de $D^b_c(T,R)$, on a des isomorphismes canoniques*

$$\mathscr{M}^R_!(A_1 *_! A_2) \simeq \mathscr{M}^R_!(A_1) \otimes^L_{\Omega_T} \mathscr{M}^R_!(A_2)$$

et

$$\mathscr{M}^R_*(A_1 *_* A_2) \simeq \mathscr{M}^R_*(A_1) \otimes^L_{\Omega_T} \mathscr{M}^R_*(A_2).$$

(g) *Torsion: pour tout caractère continu $\chi\colon \pi_1(T)_\ell \to R^\times$, et tout objet A de $D^b_c(T,R)$, on a des isomorphismes canoniques*

$$\mathscr{M}^R_!(A) \otimes^L_{\varphi_\chi} \Omega_T \simeq \mathscr{M}^R_!(A \otimes^L_R \mathscr{L}_\chi)$$

et

$$\mathscr{M}^R_*(A) \otimes^L_{\varphi_\chi} \Omega_T \simeq \mathscr{M}^R_*(A \otimes^L_R \mathscr{L}_\chi),$$

en notant $\mathscr{L}_\chi$ le faisceau de Kummer associeé à χ, vu comme objet de $D^b_c(T,R)$.

Démonstration. L'assertion (a) est claire.

Démontrons (b). Pour tout objet A de $D^b_c(T,R)$ on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}
& D(\mathscr{M}^R_!(A)) \simeq D(Rf_!(A \otimes^L_R L_T)) \\
(1)\quad & \simeq Rf_*(D(A \otimes^L_R L_T)) \\
(2)\quad & \simeq Rf_*(DA \otimes^L_R L_T^\vee) \\
(3)\quad & \simeq Rf_*(DA \otimes^L_R (L_T \otimes^L_{\mathrm{inv}} \Omega_T)) \\
(4)\quad & \simeq Rf_*(DA \otimes^L_R L_T) \otimes^L_{\mathrm{inv}} \Omega_T \\
& \simeq \mathscr{M}^R_*(DA) \otimes^L_{\mathrm{inv}} \Omega_T.
\end{aligned}$$

(1) est conséquence de la dualité dans $D^b_c(T,\Omega_T)$, (2) du lemme 3.1.4, (3) de l'isomorphisme $L_T^\vee \simeq L_T \otimes^L_{\mathrm{inv}} \Omega_T$, et (4) de A.1.4 et A.1.5. La démonstration de l'autre isomorphisme est duale.

LEMMA 3.1.4. *Pour tout objet A de $D^b_c(T,R)$ on a un isomorphisme canonique*

$$D(A \otimes^L_R L_T) \simeq D(A) \otimes^L_R L_T^\vee.$$

Démonstration. Soit A un objet de $D_c^b(T,R)$. On a des isomorphismes canoniques

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad R\mathscr{H}\mathrm{om}_{\Omega_T}(A\otimes_R^L L_T,\Omega_T)_n \simeq R\mathscr{H}\mathrm{om}_{\Omega_T}(A\otimes_R^L L_T,\Omega_T)\otimes_{\Omega_T}^L \Omega_{T,n}\\
&(2)\quad \simeq R\mathscr{H}\mathrm{om}_{\Omega_T}((A\otimes_R^L L_T)\otimes_{\Omega_T}^L \Omega_{T,n},\Omega_{T,n})\\
&(3)\quad \simeq R\mathscr{H}\mathrm{om}_{\Omega_{T,n}}((A\otimes_R^L R_n)\otimes_{R_n}^L (L_T\otimes_{\Omega_T}^L \Omega_{T,n}),\Omega_{T,n})\\
&(4)\quad \simeq R\mathscr{H}\mathrm{om}_{R_n}((A\otimes_R^L R_n), R\mathscr{H}\mathrm{om}_{\Omega_{T,n}}(L_T\otimes_{\Omega_T}^L \Omega_{T,n},\Omega_{T,n}))\\
&(5)\quad \simeq R\mathscr{H}\mathrm{om}_{R_n}((A\otimes_R^L R_n), L_T^\vee\otimes_{\Omega_T}^L \Omega_{T,n})\\
&(6)\quad \simeq R\mathscr{H}\mathrm{om}_{R_n}((A\otimes_R^L R_n), R_n)\otimes_{R_n}^L (L_T^\vee\otimes_{\Omega_T}^L \Omega_{T,n})\\
&(7)\quad \simeq (R\mathscr{H}\mathrm{om}_R(A,R)\otimes_R^L R_n)\otimes_{R_n}^L (L_T^\vee\otimes_{\Omega_T}^L \Omega_{T,n})\\
&(8)\quad \simeq (R\mathscr{H}\mathrm{om}_R(A,R)\otimes_R^L L_T^\vee)\otimes_{\Omega_T}^L \Omega_{T,n}\\
&(9)\quad \simeq (R\mathscr{H}\mathrm{om}_R(A,R)\otimes_R^L L_T^\vee)_n .
\end{aligned}
$$

(1) est conséquence de ce que le complexe $R\mathscr{H}\mathrm{om}_{\Omega_T}(A\otimes_R^L L_T,\Omega_T)$ est normalisé (au sens de [E]), (2) de [E, 6.3], et (3) de A.1.2. L'isomorphisme (4) est un isomorphisme "de Cartan." (5) est conséquence de l'isomorphisme canonique

$$R\mathscr{H}\mathrm{om}_{\Omega_{T,n}}(L_T\otimes_{\Omega_T}^L \Omega_{T,n},\Omega_{T,n}) \simeq L_T^\vee\otimes_{\Omega_T}^L \Omega_{T,n}.$$

L'isomorphisme (6) provient de ce que le complexe $A\otimes_R^L R_n$ est constructible et de tor-dimension finie et du fait que $L_T^\vee\otimes_{\Omega_T}^L \Omega_{T,n}$ est un R_n-faisceau localement constant. Enfin (7) est conséquence de [E, 6.3], (8) de A.1.2, et (9) de ce que le complexe $R\mathscr{H}\mathrm{om}_R(A,R)\otimes_R^L L_T^\vee$ est normalisé. On en tire le résultat, d'après A.1.3, car

$$D(A\otimes_R^L L_T)\simeq R\mathscr{H}\mathrm{om}_{\Omega_T}(A\otimes_R^L L_T,\Omega_T[2\dim T](\dim T))$$

et

$$D(A)\simeq R\mathscr{H}\mathrm{om}_R(A,R[2\dim T](\dim T)). \qquad \square$$

Démontrons (c). On note f': $T' \to \operatorname{Spec} k$ le morphisme structural. Pour tout objet A de $D_c^b(T, R)$ on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}
\Omega_{T'} \otimes^L_{\Omega_T} \mathscr{M}^R_!(A) &\simeq \Omega_{T'} \otimes^L_{\Omega_T} Rf_!(A \otimes^L_R L_T) \\
(1)\qquad &\simeq Rf_!((A \otimes^L_R L_T) \otimes^L_{\Omega_T} \Omega_{T'}) \\
(2)\qquad &\simeq Rf_!(A \otimes^L_R (L_T \otimes^L_{\Omega_T} \Omega_{T'})) \\
(3)\qquad &\simeq Rf_!(A \otimes^L_R \pi^* L_{T'}) \\
(4)\qquad &\simeq Rf'_!(R\pi_!(A \otimes^L_R \pi^* L_{T'})) \\
(5)\qquad &\simeq Rf'_!(R\pi_!(A) \otimes^L_R L_{T'}) \\
&\simeq \mathscr{M}^R_!(R\pi_! A).
\end{aligned}$$

(1) est conséquence de A.1.5, (2) de A.1.4, (3) de 3.1.1 (i), (4) de $f = f' \circ \pi$, et (5) de A.1.5. La démonstration de l'autre isomorphisme est duale.

Démontrons (d). On note f': $T' \to \operatorname{Spec} k$ le morphisme structural de T'. Soit A un objet de $D_c^b(T', R)$. On a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}^R_!(\pi^* A) &\simeq Rf_!(\pi^* A \otimes^L_R L_T) \\
(1)\qquad &\simeq Rf'_!(R\pi_!(\pi^* A \otimes^L_R L_T)) \\
(2)\qquad &\simeq Rf'_!(A \otimes^L_R R\pi_!\, L_T) \\
(3)\qquad &\simeq Rf'_!(A \otimes^L_R L_{T'}[-2d](-d)) \\
&\simeq \mathscr{M}^R_!(A(-d))[-2d].
\end{aligned}$$

(1) est conséquence de l'égalité $f = f' \circ \pi$, (2) de la formule de projection A.1.5 (ii), et (3) de 3.1.1 (ii).

On a démontré ainsi l'existence du premier isomorphisme canonique. L'existence du second s'en déduit par la dualité (b) car pour tout objet K de $D^b_{\mathrm{coh}}(\Omega_{T'})$ on a d'après 3.1.2 un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned}
R\mathscr{H}om_{\Omega_T}(K, \Omega_T) &\simeq R\mathscr{H}om_{\Omega_{T'}}(K, \Omega_{T'}) \otimes^L_{\Omega_{T'}} R\mathscr{H}om_{\Omega_T}(\Omega_{T'}, \Omega_T) \\
&\simeq R\mathscr{H}om_{\Omega_{T'}}(K, \Omega_{T'}) \otimes^L_{\Omega_{T'}} \left(\left(\bigwedge\nolimits^{\max}_{\mathbf{Z}_\ell} \pi_1(\operatorname{Ker} \pi)_\ell \right)^{\vee} \otimes^L_{\mathbf{Z}_\ell} \Omega_{T'}[-d] \right).
\end{aligned}$$

Démontrons (e). On note $j_i \colon T_i \to T_1 \times T_2$ les morphismes d'inclusion, on pose $L'_{T_i} := j_i^* L_{T_1\times T_2}$, pour $i = 1, 2$. On note f_i les morphismes $T_i \to \operatorname{Spec} k$ et f le morphisme $T_1 \times T_2 \to \operatorname{Spec} k$. On a un isomorphisme canonique

$$p_1^* L'_{T_1} \otimes^L_\Omega p_2^* L'_{T_2} \simeq L_{T_1\times T_2}$$

duquel on tire des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}
(p_1^*A_1 \otimes^L_R p_2^*A_2) \otimes^L_R L_{T_1\times T_2} &\simeq (p_1^*A_1 \otimes^L_R p_2^*A_2) \otimes^L_R (p_1^*L'_{T_1} \otimes^L_\Omega p_2^*L'_{T_2}) \\
(1) \qquad &\simeq (p_1^*A_1 \otimes^L_R p_1^*L'_{T_1}) \otimes^L_\Omega (p_2^*A_2 \otimes^L_R p_2^*L'_{T_2}) \\
(2) \qquad &\simeq p_1^*(A_1 \otimes^L_R L'_{T_1}) \otimes^L_\Omega p_2^*(A_2 \otimes^L_R L'_{T_2}).
\end{aligned}$$

(1) est conséquence de A.1.4, et (2) de A.1.5 (iii).

On a donc des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_!^R(p_1^*A_1 \otimes^L_R p_2^*A_2) &\simeq Rf_!((p_1^*A_1 \otimes^L_R p_2^*A_2) \otimes^L_R L_{T_1\times T_2}) \\
&\simeq Rf_!(p_1^*(A_1 \otimes^L_R L'_{T_1}) \otimes^L_\Omega p_2^*(A_2 \otimes^L_R L'_{T_2})) \\
&\simeq Rf_{1!}(A_1 \otimes^L_R L'_{T_1}) \otimes^L_\Omega Rf_{2!}(A_2 \otimes^L_R L'_{T_2}),
\end{aligned}$$

le dernier isomorphisme étant l'isomorphisme de Künneth.

Par ailleurs, pour $i = 1, 2$, on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}
Rf_{i!}(A_i \otimes^L_R L'_{T_i}) &\simeq Rf_{i!}(A_i \otimes^L_R j_i^* L_{T_1\times T_2}) \\
(1) \qquad &\simeq Rf_!(Rj_{i!}(A_i \otimes^L_R j_i^* L_{T_1\times T_2})) \\
(2) \qquad &\simeq Rf_!(Rj_{i!}A_i \otimes^L_R L_{T_1\times T_2}) \\
(3) \qquad &\simeq Rf_{i!}(A_i \otimes^L_R L_{T_i}) \otimes^L_{\Omega_{T_i}} \Omega_{T_1\times T_2}.
\end{aligned}$$

(1) est conséquence de l'égalité $f_i = f \circ j_i$, (2) de A.1.5, et (3) de (c).

On a démontré ainsi l'existence du premier isomorphisme canonique. L'existence du second s'en déduit par la dualité (b).

Démontrons (f). On note $m \colon T \times T \to T$ le morphisme défini par la loi de groupe et p_i les projections. Pour $i = 1, 2$, on note $\alpha_i \colon \Omega_T \to \Omega_{T\times T}$ le morphisme associé à l'inclusion du $i$ème facteur et $\beta \colon \Omega_{T\times T} \to \Omega_T$ le morphisme associé à

m. Soient A_1 et A_2 des objets de $D_c^b(T,R)$. On a des isomorphismes canoniques

$$(1) \qquad \mathscr{M}_!^R(A_1 *_! A_2) \simeq \mathscr{M}_!^R(Rm_!(p_1^* A_1 \otimes_R^L p_2^* A_2))$$

$$(2) \qquad \simeq \Omega_T \otimes_\beta^L \mathscr{M}_!^R(p_1^* A_1 \otimes_R^L p_2^* A_2)$$

$$(3) \qquad \simeq \Omega_T \otimes_\beta^L ((\mathscr{M}_!^R(A_1) \otimes_{\alpha_1}^L \Omega_{T\times T}) \otimes_{\Omega_{T\times T}}^L (\mathscr{M}_!^R(A_2) \otimes_{\alpha_2}^L \Omega_{T\times T}))$$

$$(4) \qquad \simeq ((\mathscr{M}_!^R(A_1) \otimes_{\alpha_1}^L \Omega_{T\times T}) \otimes_\beta^L \Omega_T) \otimes_{\Omega_T}^L ((\mathscr{M}_!^R(A_2) \otimes_{\alpha_2}^L \Omega_{T\times T}) \otimes_\beta^L \Omega_T)$$

$$(5) \qquad \simeq \mathscr{M}_!^R(A_1) \otimes_{\Omega_T}^L \mathscr{M}_!^R(A_2).$$

(1) est conséquence de la définition de $*_!$, (2) de (c), (3) de (e), (4) de A.1.4, et (5) de A.1.4 et de ce que les morphismes composés $\beta \circ \alpha_i$ soient l'identité de Ω_T. On a démontré l'existence du premier isomorphisme canonique. L'existence du second s'en déduit par la dualité (b).

Démontrons (g). Soit χ un caractère $\pi_1(T)_\ell \to R^\times$, et soit A un objet de de $D_c^b(T,R)$. On a des isomorphismes canoniques

$$\mathscr{M}_!^R(A \otimes_R^L \mathscr{L}_\chi) \simeq Rf_!((A \otimes_R^L \mathscr{L}_\chi) \otimes_R^L L_T)$$

$$(1) \qquad \simeq Rf_!(A \otimes_R^L (\mathscr{L}_\chi \otimes_R^L L_T))$$

$$(2) \qquad \simeq Rf_!(A \otimes_R^L (L_T \otimes_{\varphi_\chi}^L \Omega_T))$$

$$(3) \qquad \simeq Rf_!(A \otimes_R^L L_T) \otimes_{\varphi_\chi}^L \Omega_T$$

$$\simeq \mathscr{M}_!^R(A) \otimes_{\varphi_\chi}^L \Omega_T.$$

(1) est conséquence de A.1.4, (2) est conséquence de l'isomorphisme

$$L_T \otimes_{\varphi_\chi}^L \Omega_T \simeq \mathscr{L}_\chi \otimes_R^L L_T,$$

et (3) de A.1.4 et A.1.5. Ceci donne l'existence du premier isomorphisme. L'existence du second est donnée par la preuve duale. □

3.2. L'espace des caractères ℓ-adiques

3.2.1. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ de $\mathbf{Q}_\ell$. On note $\mathscr{R}$ l'ensemble ordonné des anneaux d'entiers d'extensions finies de $\mathbf{Q}_\ell$ contenues dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$. Pour R dans $\mathscr{R}$, on note $\mathfrak{M}_R$ l'idéal maximal de R.

Soit R dans $\mathscr{R}$. Soit T un tore de dimension n sur k. On note $\mathscr{C}(T, R^\times)_\ell$ le groupe des caractères continus $\chi\colon \pi_1(T)_\ell \to R^\times$ et $\mathscr{C}(T, R^\times)_f \subset \mathscr{C}(T, R^\times)$ le sous-groupe des caractères d'ordre fini premier à ℓ. On a un isomorphisme canonique: $\mathscr{C}(T, R^\times) \simeq \mathscr{C}(T, R^\times)_f \times \mathscr{C}(T, R^\times)_\ell$ qui permet d'identifier $\mathscr{C}(T, R^\times)_\ell$ au sous-groupe des caractères qui se factorisent en $\chi\colon \hat{X}_*(T) \to 1 + \mathfrak{M}_R$. On note $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)_\ell = \varinjlim_{R\in\mathscr{R}}\{\mathscr{C}(\mathscr{T}, \mathscr{R}^\times)_\ell$ et $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)_f = \varinjlim_{R\in\mathscr{R}} \mathscr{C}(T, R^\times)_f$.

On a un isomorphisme canonique: $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times) \simeq \mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)_f \times \mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)_\ell$.

3.2.2. Soit $\varinjlim_{R\in\mathscr{R}} R[[\pi_1(T)_\ell]]$ la limite inductive des anneaux $R[[\pi_1(T)_\ell]]$ avec R parcourant l'ensemble ordonné $\mathscr{R}$. On note $(\varinjlim_{R\in\mathscr{R}} R[[\pi_1(T)_\ell]])[\ell^{-1}]$ l'anneau obtenu en inversant ℓ.

PROPOSITION 3.2.2. (1) *Pour tout R dans $\mathscr{R}$, le morphisme canonique*

$$\overline{\mathbf{Q}}_\ell \otimes_R R[[\pi_1(T)_\ell]] \to \left(\varinjlim_{R\in\mathscr{R}} R[[\pi_1(T)_\ell]]\right)[\ell^{-1}]$$

est un isomorphisme.

(2) *L'anneau* $\varinjlim_{R\in\mathscr{R}} R[[\pi_1(T)_\ell]])[\ell^{-1}]$ *est un anneau noethérien et régulier.*

Démonstration. L'énoncé (1) résulte de ce que, pour tout $R \in \mathscr{R}$, le morphisme canonique

$$\overline{\mathbf{Q}}_\ell \otimes_R R[[t_1, \dots, t_n]] \to \left(\varinjlim_{R\in\mathscr{R}} R[[t_1, \dots, t_n]]\right)[\ell^{-1}]$$

est un isomorphisme. L'énoncé (2) est conséquence directe de A.2.2.2 et A.2.2.3 (ii). □

On note $\mathscr{C}(T)_\ell$ le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-schéma

$$\mathscr{C}(T)_\ell := \operatorname{Spec}\left(\varinjlim_{R\in\mathscr{R}} R[[\pi_1(T)_\ell]]\right)[\ell^{-1}].$$

Pour tout R dans $\mathscr{R}$ on a un isomorphisme canonique, compatible aux inclusions $R \subset R'$,

$$\mathscr{C}(T)_\ell \simeq \operatorname{Spec} \overline{\mathbf{Q}}_\ell \otimes_R R[[\pi_1(T)_\ell]].$$

On a un isomorphisme canonique

$$\mathscr{C}(T)_\ell(\overline{\mathbf{Q}}_\ell) \simeq \mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)_\ell$$

entre l'ensemble des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-points du $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-schéma $\mathscr{C}(T)_\ell$ et le groupe $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)_\ell$ des caractères pro-ℓ. De plus, d'après A.2.2.3 (i), on peut identifier l'ensemble des points fermés de $\mathscr{C}(T)_\ell$ et celui de ses $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-points. Par transport de structure on en déduit une structure de groupe sur $\mathscr{C}(T)_\ell(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ que l'on note multiplicativement. (Remarque: dès que T est de dimension non nulle, cette structure de groupe ne provient pas d'une structure de schéma en groupes sur $\mathscr{C}(T)_\ell$, car le coproduit sur Ω_T est à valeur dans un produit tensoriel complété.) Plus généralement, le groupe $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)_\ell$ agit naturellement par translation sur le schéma $\mathscr{C}(T)_\ell$. Cette action se déduit, par passage à la limite inductive sur R parcourant $\mathscr{R}$, de l'action naturelle de $\mathscr{C}(T, R^\times)_\ell$, définie en 3.1, sur $R[[\pi_1(T)]]_\ell$. Si Z est un sous-schéma de $\mathscr{C}(T)_\ell$ et χ un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-point de $\mathscr{C}(T)_\ell$, on note $\chi \cdot Z$ le sous-schéma translaté. De même, par passage à la limite inductive sur R parcourant $\mathscr{R}$, on déduit de l'involution

$$\mathrm{inv}\colon R[[\pi_1(T)]]_\ell \to R[[\pi_1(T)]]_\ell$$

une involution, que l'on note encore inv,

$$\mathrm{inv}\colon \mathscr{C}(T)_\ell \to \mathscr{C}(T)_\ell.$$

Pour tout morphisme de tores $\pi\colon T \to T'$, on a par fonctorialité un morphisme de schémas $\pi_\ell^\vee\colon \mathscr{C}(T')_\ell \to \mathscr{C}(T)_\ell$. Si $\pi\colon T \to T'$ est un quotient, le morphisme $\pi_\ell^\vee$ est une immersion fermée. On appelle cotore algébrique de $\mathscr{C}(T)_\ell$, tout sous-schéma de $\mathscr{C}(T)_\ell$ de la forme $\pi_\ell^\vee(\mathscr{C}(T')_\ell)$ avec $\pi\colon T \to T'$ un quotient de T. On appelle cotore algébrique translaté de $\mathscr{C}(T)_\ell$ tout sous-schéma de la forme $\chi \cdot \pi_\ell^\vee(\mathscr{C}(T')_\ell)$ avec χ un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-point de $\mathscr{C}(T)_\ell$ et $\pi\colon T \to T'$ un quotient de T.

3.2.3. On note $\mathscr{C}(T)$ le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-schéma

$$\mathscr{C}(T) := \coprod_{\chi \in \mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)_f} \{\chi\} \times \mathscr{C}(T)_\ell.$$

Par construction, on a un isomorphisme canonique

$$\mathscr{C}(T)(\overline{\mathbf{Q}}_\ell) \simeq \mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$$

entre l'ensemble des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-points du $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-schéma $\mathscr{C}(T)$ et le groupe $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$ des caractères ℓ-adiques. Comme pour $\mathscr{C}(T)_\ell$, on peut identifier l'ensemble des points fermés de $\mathscr{C}(T)$ et celui de ses $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-points. Il est important de remarquer que, excepté le cas où T est un point, le schéma $\mathscr{C}(T)$ a une infinité dénombrable de composantes connexes.

Comme précédemment, on définit par transport de structure une structure de groupe sur $\mathscr{C}(T)(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ que l'on note multiplicativement, et, plus généralement, le groupe $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$ agit naturellement par translation multiplicative sur le schéma

$\mathscr{C}(T)$. Pour χ un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-point de $\mathscr{C}(T)$, on note

$$m_\chi \colon \mathscr{C}(T) \to \mathscr{C}(T)$$

le morphisme de translation, et si Z est un sous-schéma de $\mathscr{C}(T)$ on note $\chi \cdot Z$ le sous-schéma translaté. L'involution inv de $\mathscr{C}(T)_\ell$ se prolonge de façon unique en une involution, que l'on note encore inv, de $\mathscr{C}(T)$ telle que, pour tout $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-point χ de $\mathscr{C}(T)$, on ait $\mathrm{inv}(\chi) = \chi^{-1}$.

Comme plus haut, pour tout morphisme de tores $\pi \colon T \to T'$, on a par fonctorialité un morphisme de schémas $\pi^\vee \colon \mathscr{C}(T') \to \mathscr{C}(T)$. Si $\pi \colon T \to T'$ est un quotient, le morphisme $\pi^\vee$ est une immersion fermée. On appelle cotore algébrique de $\mathscr{C}(T)$, tout sous-schéma de $\mathscr{C}(T)$ de la forme $\pi^\vee(\mathscr{C}(T'))$ avec $\pi \colon T \to T'$ un quotient de T. On appelle cotore algébrique translaté de $\mathscr{C}(T)$ tout sous-schéma de la forme $\chi \cdot \pi^\vee(\mathscr{C}(T'))$ avec χ un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-point de $\mathscr{C}(T)$ et $\pi \colon T \to T'$ un quotient de T.

Remarque. Comme, dès que T est de dimension strictement positive, le schéma $\mathscr{C}(T)$ n'est pas connexe, les deux propriétés, pour un sous-schéma Z de $\mathscr{C}(T)$, Z est un cotore algébrique translaté de $\mathscr{C}(T)$ et pour tout caractère d'ordre fini premier à ℓ, χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)_f$, $Z \cap (\{\chi\} \times \mathscr{C}(T)_\ell)$ est un cotore algébrique translaté de $\{\chi\} \times \mathscr{C}(T)_\ell$ ne sont pas équivalentes, excepté le cas où T est un point.

3.3. Transformation de Mellin. On note $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{C}(T)_\ell)$ (resp., $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{C}(T))$) la sous-catégorie de la catégorie dérivée de la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathscr{C}(T)_\ell}$-modules (resp., des $\mathcal{O}_{\mathscr{C}(T)}$-modules) formée des complexes à cohomologie bornée et cohérente.

Pour tout R dans $\mathscr{R}$, on a défini en 3.1 des foncteurs $\mathscr{M}^R_!$ et $\mathscr{M}^R_*$

$$D^b_c(T, R) \to D^b_{\mathrm{coh}}(R[[\pi_1(T)]]_\ell).$$

En composant avec le foncteur d'extension des scalaires

$$\overline{\mathbf{Q}}_\ell \otimes^L_R \colon D^b_{\mathrm{coh}}(R[[\pi_1(T)]]_\ell) \to D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{C}(T)_\ell)$$

on obtient des foncteurs notés $\mathscr{M}^R_{\ell!}$ et $\mathscr{M}^R_{\ell*}$

$$D^b_c(T, R) \to D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{C}(T)_\ell).$$

On déduit de la proposition 3.2.2 (1) et de A.1.4 et A.1.5 que les foncteurs $\mathscr{M}^R_!$ et $\mathscr{M}^R_*$ commutent aux opérateurs d'extension et de restriction de l'anneau des coefficients et fournissent par passage à la limite des foncteurs, notés $\mathscr{M}_{\ell!}$ et $\mathscr{M}_{\ell*}$,

$$D^b_c(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{C}(T)_\ell)$$

tels que, pour tout R dans $\mathscr{R}$, leur composé avec le morphisme canonique $D_c^b(T, R) \to D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ coïncide avec les foncteurs $\mathscr{M}_{\ell !}^R$ et $\mathscr{M}_{\ell *}^R$.

On prolonge $\mathscr{M}_{\ell !}$ et $\mathscr{M}_{\ell *}$ en des foncteurs, notés $\mathscr{M}_!$ et $\mathscr{M}_*$,

$$D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to D_{\mathrm{coh}}^b(\mathscr{C}(T))$$

de la façon suivante: étant donné un objet A de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on convient que pour χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)_f$ la restriction de $\mathscr{M}_!(A)$ (resp., $\mathscr{M}_*(A)$) à $\{\chi\} \times \mathscr{C}(T)_\ell$ est $\mathscr{M}_!(A \otimes \mathscr{L}_\chi)$ (resp., $\mathscr{M}_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi)$), en identifiant abusivement $\{\chi\} \times \mathscr{C}(T)_\ell$ à $\mathscr{C}(T)_\ell$.

On obtient ainsi des foncteurs exacts de catégories triangulées $\mathscr{M}_!$ et $\mathscr{M}_*$: $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to D_{\mathrm{coh}}^b(\mathscr{C}(T))$ que l'on appelle respectivement transformation de Mellin à support propre et transformation de Mellin.

PROPOSITION 3.3.1. *Les foncteurs $\mathscr{M}_!$ et $\mathscr{M}_*$ vérifient les propriétés suivantes.*

(a) *Au morphisme de foncteurs $\mathscr{M}_!^R \to \mathscr{M}_*^R$ correspond un morphisme de foncteurs $\mathscr{M}_! \to \mathscr{M}_*$.*

(b) *Dualité: pour tout objet A de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ on a des isomorphismes canoniques*

$$D(\mathscr{M}_!(A)) \simeq \mathrm{inv}^*(\mathscr{M}_*(DA))$$

et

$$D(\mathscr{M}_*(A)) \simeq \mathrm{inv}^*(\mathscr{M}_!(DA)),$$

le foncteur D étant normalisé comme en 1.7.

(c) *Compatibilité à l'image directe: si π: $T \to T'$ est un morphisme de tores on a, pour tout objet A de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, des isomorphismes canoniques*

$$\mathscr{M}_!(R\pi_!(A)) \simeq L\pi^{\vee *}(\mathscr{M}_!(A))$$

et

$$\mathscr{M}_*(R\pi_*(A)) \simeq L\pi^{\vee *}(\mathscr{M}_*(A)).$$

(d) *Compatibilité à l'image inverse pour les tores quotients: si π: $T \to T'$ est un morphisme quotient de dimension relative d, on a, pour tout objet A de $D_c^b(T', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, des isomorphismes canoniques*

$$\mathscr{M}_!(\pi^*(A)) \simeq R\pi_*^\vee(\mathscr{M}_!(A(-d))[-2d])$$

et

$$\mathscr{M}_*(\pi^*(A)) \simeq \left(\bigwedge\nolimits_{\mathbf{Z}_\ell}^{\max} \pi_1(\mathrm{Ker}\,\pi)_\ell\right)^\vee \otimes_{\mathbf{Z}_\ell}^L R\pi_*^\vee(\mathscr{M}_*(A)[-d]).$$

(e) *Compatibilité au produit externe: si $T = T_1 \times T_2$ est un produit de tores, on note p_1 et p_2 (resp., i_1 et i_2) les projections (resp., immersions) canoniques. Soient A_i, pour $i = 1, 2$, des objets de $D^b_c(T_i, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. On a des isomorphismes canoniques*

$$\mathscr{M}_!(p_1^*(A_1) \otimes^L p_2^*(A_2)) \simeq i_1^{\vee *}(\mathscr{M}_!(A_1)) \otimes^L i_2^{\vee *}(\mathscr{M}_!(A_2))$$

et

$$\mathscr{M}_*(p_1^*(A_1) \otimes^L p_2^*(A_2)) \simeq i_1^{\vee *}(\mathscr{M}_*(A_1)) \otimes^L i_2^{\vee *}(\mathscr{M}_*(A_2)).$$

(f) *Convolution: si A_1 et A_2 sont des objets de $D^b_c(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a des isomorphismes canoniques*

$$\mathscr{M}_!(A_1 *_! A_2) \simeq \mathscr{M}_!(A_1) \otimes^L \mathscr{M}_!(A_2)$$

et

$$\mathscr{M}_*(A_1 *_* A_2) \simeq \mathscr{M}_*(A_1) \otimes^L \mathscr{M}_*(A_2).$$

(g) *Torsion: pour tout caractère $\chi\colon \pi_1(T)_\ell \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$, et tout objet A de $D^b_c(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a des isomorphismes canoniques*

$$m_\chi^* \mathscr{M}_!(A) \simeq \mathscr{M}_!(A \otimes^L \mathscr{L}_\chi)$$

et

$$m_\chi^* \mathscr{M}_*(A) \simeq \mathscr{M}_*(A \otimes^L \mathscr{L}_\chi).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe des propriétés analogues des foncteurs $\mathscr{M}_!^R$ et $\mathscr{M}_*^R$ démontrées en 3.1.3. □

COROLLAIRE 3.3.2. *Soit A un objet de $D^b_c(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ et soit χ un point fermé de $\mathscr{C}(T)$. On note i_χ le morphisme d'inclusion $\{\chi\} \to \mathscr{C}(T)$. On a des isomorphismes canoniques*

$$R\Gamma_c(T, A \otimes \mathscr{L}_\chi) \simeq Li_\chi^* \mathscr{M}_!(A)$$

et

$$R\Gamma(T, A \otimes \mathscr{L}_\chi) \simeq Li_\chi^* \mathscr{M}_*(A).$$

Démonstration. Par 3.3.1 (g) on peut se ramener au cas où χ est le caractère trivial qui résulte de 3.3.1 (c) pour T' de dimension zéro. □

Définition 3.3.3. Pour tout objet A de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on note $\Delta(A)$ le support dans $\mathscr{C}(T)$ du cône du morphisme canonique $\mathscr{M}_!(A) \to \mathscr{M}_*(A)$. Pour tout caractère d'ordre fini premier à ℓ, χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)_f$, on note $\Delta_\chi(A)$ l'intersection de $\Delta(A)$ avec $\{\chi\} \times \mathscr{C}(T)_\ell$.

On a l'énoncé suivant.

PROPOSITION 3.3.4. *Soit A un objet de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.*

(i) *Un point fermé χ de $\mathscr{C}(T)$ appartient à $\Delta(A)$ si et seulement si le morphisme canonique*

$$R\Gamma_c(T, A \otimes \mathscr{L}_\chi) \to R\Gamma(T, A \otimes \mathscr{L}_\chi)$$

n'est pas un isomorphisme.

(ii) *Pour tout caractère d'ordre fini premier à ℓ, χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)_f$, $\Delta_\chi(A)$ est un fermé strict de $\{\chi\} \times \mathscr{C}(T)_\ell$.*

(iii) *Soit $\pi \colon T \to T'$ un morphisme de tores et soit χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$. On suppose que le morphisme canonique*

$$R\pi_!(A \otimes \mathscr{L}_\chi) \to R\pi_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi)$$

est un isomorphisme. Alors on a

$$\Delta(R\pi_!(A \otimes \mathscr{L}_\chi)) = \pi^{\vee -1}(\chi^{-1} \cdot \Delta(A)).$$

Démonstration. Démontrons (i). Soit χ un point fermé de $\mathscr{C}(T)$ et soit i_χ le morphisme d'inclusion $\{\chi\} \to \mathscr{C}(T)$. Par définition du support, χ appartient à $\Delta(A)$ si et seulement si $Li_\chi^*(\text{Cône}(\mathscr{M}_!(A) \to \mathscr{M}_*(A))$ n'est pas acyclique. Comme on a un isomorphisme

$$Li_\chi^* \,(\text{Cône}\,(\mathscr{M}_!(A) \to \mathscr{M}_*(A))) \simeq \text{Cône}(Li_\chi^*\mathscr{M}_!(A) \to Li_\chi^*\mathscr{M}_*(A))$$

on obtient l'énoncé par le corollaire 3.3.2.

Pour démontrer (ii), on remarque que, d'après le corollaire 2.3.2 (pour S un point) et (i), une fois choisi un isomorphisme de tores $T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$, pour presque tout point fermé χ de $\mathscr{C}(T)$, χ n'appartient pas à $\Delta(A)$. Ceci entraîne que le complémentaire de $\Delta(A)$ a une intersection non vide avec toutes les composantes connexes de $\mathscr{C}(T)$, d'où le résultat.

Démontrons (iii). On a

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \Delta(R\pi_!(A \otimes \mathscr{L}_\chi)) = \text{Supp}\,(\text{Cône}(\mathscr{M}_!(R\pi_!(A \otimes \mathscr{L}_\chi)) \to \mathscr{M}_*(R\pi_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi))))\\
&(2) \quad\quad = \text{Supp}\,(\text{Cône}(L\pi^{\vee *}(\mathscr{M}_!(A \otimes \mathscr{L}_\chi) \to \mathscr{M}_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi))))\\
&(3) \quad\quad = \text{Supp}(L\pi^{\vee *}\,(\text{Cône}(\mathscr{M}_!(A \otimes \mathscr{L}_\chi) \to \mathscr{M}_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi))))\\
&(4) \quad\quad = \pi^{\vee -1}(\Delta(A \otimes \mathscr{L}_\chi)).
\end{aligned}$$

(1) est conséquence de l'hypothèse, (2) de 3.3.1 (c), (3) et (4) sont clairs. On en tire l'énoncé cherché, car on a, sans hypothèse sur A, l'égalité

$$\Delta(A \otimes \mathscr{L}_\chi) = \chi^{-1} \cdot \Delta(A)$$

d'après 3.3.1 (g). □

3.4. Transformation de Mellin et perversité. On commence par démontrer que la transformation de Mellin $\mathscr{M}_*$ est un foncteur t-exact.

THÉORÈME 3.4.1. *Soit T un tore sur k. La transformation de Mellin $\mathscr{M}_*$: $D^b_c(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{C}(T))$ est un foncteur t-exact, la catégorie $D^b_c(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ étant munie de la t-structure de la perversité moitié et la catégorie $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{C}(T))$ étant munie de la t-structure usuelle. De même le foncteur $\mathscr{M}_!$: $D^b_c(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{C}(T))$ est un foncteur t-exact si on munit la catégorie $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{C}(T))$ de la t-structure duale.*

Démonstration. L'énoncé sur $\mathscr{M}_!$ se déduit de celui sur $\mathscr{M}_*$ par dualité (3.3.1 (b)).

Le fait que $\mathscr{M}_*$ envoie $D^b_c(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)^{\leqslant 0}$ sur $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{C}(T))^{\leqslant 0}$ est une conséquence du théorème de M. Artin sur la dimension cohomologique des morphismes affines [SGA4, Exp. XIV, 3.1], [BBD, 4.1.1]. Il reste à démontrer que, pour tout objet pervers A de $D^b_c(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, les objets de cohomologie de degré < 0 de $\mathscr{M}_*(A)$ sont nuls. On raisonne par récurrence sur $n = \dim(T)$. Le cas $n = 0$ est clair. Pour $n > 0$, on peut supposer que A est irréductible et, compte tenu de l'hypothèse de récurrence, d'après 3.3.1 (d) et (g), que A n'est pas de la forme $A = \mathscr{L}_\chi \otimes p^*(A')[1]$ avec p: $T \to T'$ et A' faisceau pervers sur T', tore quotient de dimension $n-1$ et χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$.

Quitte à tordre A par un faisceau de Kummer (ce qui ne change pas les hypothèses sur A), il suffit, d'après 3.3.1 (g), de montrer que les $\mathscr{H}^i(\mathscr{M}_*(A))$, $i < 0$, sont nuls au voisinage de l'origine dans $\mathscr{C}(T)$. Soit p: $T \to T'$ un quotient de T avec T' de dimension $n-1$. Les hypothèses faites sur A entraînent, d'après 2.5, que l'objet de cohomologie pervers ${}^pH^{-1}Rp_*(A)$ est nul, et par conséquent, comme Rp_* est de t-amplitude $[-1, 0]$, que $Rp_*(A)$ est pervers. Par hypothèse de récurrence, l'énoncé recherché est vérifié pour $Rp_*(A)$. D'autre part, d'après 3.3.1 (c), on a

$$\mathscr{M}_*(Rp_*(A)) \simeq \mathscr{O}_{\mathscr{C}(T')} \otimes^L_{\mathscr{O}_{\mathscr{C}(T)}} \mathscr{M}_*(A).$$

Etant donnée une équation locale f de $\mathscr{C}(T')$ dans $\mathscr{C}(T)$, on en tire, en considérant le complexe simple associé au complexe double

$$\mathscr{M}_*(A) \otimes (\mathscr{O}_{\mathscr{C}(T)} \xrightarrow{\cdot f} \mathscr{O}_{\mathscr{C}(T)}),$$

que pour $i < 0$ le morphisme de multiplication par f

$$\mathscr{H}^i(\mathscr{M}_*(A)) \xrightarrow{\cdot f} \mathscr{H}^i(\mathscr{M}_*(A))$$

est surjectif. Le lemme de Nakayama permet de conclure. □

Corollaire 3.4.2. *Pour tout objet A de* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, $\mathscr{M}_*(A)$ *est (isomorphe à) un* $\mathcal{O}_{\mathscr{C}(T)}$*-module cohérent.* $\square$

Théorème 3.4.3. *Pour tout objet A de* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, $\mathscr{M}_*(A)$ *est (isomorphe à) un* $\mathcal{O}_{\mathscr{C}(T)}$*-module localement libre en dehors de* $\Delta(A)$, *de rang générique égal à* $\chi(T, A)$ *sur toutes les composantes irréductibles de* $\mathscr{C}(T)$.

Démonstration. D'après 3.4.2, $\mathscr{M}_*(A)$ est (isomorphe à) un faisceau cohérent. Comme, en dehors de $\Delta(A)$, on a un isomorphisme $\mathscr{M}_!(A) \to \mathscr{M}_*(A)$, on déduit de 3.3.1 (b) que, en dehors de $\Delta(A)$, $\mathscr{M}_*(A)$ est isomorphe à

$$R\mathscr{H}\mathrm{om}(\mathrm{inv}^*(\mathscr{M}_*(DA)), \mathcal{O})$$

qui est le dual (total) d'un faisceau cohérent. On en déduit le premier énoncé, car, sur un schéma régulier, un faisceau cohérent qui est isomorphe au dual (total) d'un faisceau cohérent est nécessairement localement libre (cf. [AK, III.5.2.1]).

L'énoncé sur le rang résulte alors de 2.2, 3.3.2, et 3.3.4 (ii). $\square$

Corollaire 3.4.4 [La2]. *Pour tout faisceau pervers ℓ-adique A sur un tore T, on a $\chi(T, A) \geqslant 0$.* $\square$

Le résultat suivant est dû à Laumon.

Proposition 3.4.5 [La3]. *Un objet A de $D^b_c(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est isomorphe à l'objet nul si et seulement si pour tout caractère χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$ on a*

$$R\Gamma_c(T, A \otimes \mathscr{L}_\chi) = 0.$$

Démonstration. Démontrons cet énoncé par récurrence sur $n = \dim T$. Pour $n = 0$ c'est clair. Pour $n = 1$ on procède comme suit. On fixe un isomorphisme $T \simeq \mathbf{G}_{m,k}$. Soit A un objet de $D^b_c(\mathbf{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ tel que, pour tout caractère χ dans $\mathscr{C}(\mathbf{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$, on ait

$$R\Gamma_c(T, A \otimes \mathscr{L}_\chi) = 0.$$

On suppose que A n'est pas nul et on note a le plus petit entier tel que l'objet de cohomologie pervers ${}^pH^a(A)$ soit non nul. Soit A' un sous-objet pervers irréductible de ${}^pH^a(A)$. D'après l'hypothèse et le fait que $R\Gamma_c(\mathbf{G}_{m,k}, \text{——})$ est de t-amplitude $[0, 1]$, on obtient que, pour tout χ dans $\mathscr{C}(\mathbf{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$, on a $H^0_c(\mathbf{G}_{m,k}, A' \otimes \mathscr{L}_\chi) = 0$. En particulier A' ne peut pas être à support ponctuel. Il est donc nécessairement de la forme $A' = \mathscr{F}[1]$ avec $\mathscr{F}$ faisceau sans partie ponctuelle sur $\mathbf{G}_{m,k}$. D'autre part on a

$$\chi(\mathbf{G}_{m,k}, A') = \dim H^0_c(\mathbf{G}_{m,k}, A') - \dim H^1_c(\mathbf{G}_{m,k}, A') \leqslant 0,$$

donc, d'après le corollaire 3.4.4, on a $\chi(\mathbf{G}_{m,k}, A') = 0$. D'après la formule de

Grothendieck-Ogg-Shafarevich ceci entraîne que $\mathscr{F}$ est lisse sur $\mathbf{G}_{m,k}$ et modéré en 0 et ∞. Comme A' est irréductible, $\mathscr{F}$ est donc de la forme $\mathscr{F} \simeq \mathscr{L}_\chi$ avec χ dans $\mathscr{C}(\mathbf{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$, mais ceci contredit l'hypothèse car $H_c^0(\mathbf{G}_{m,k}, \mathscr{L}_\chi[1] \otimes \mathscr{L}_\chi^{-1})$ n'est pas nul.

Si $n > 1$, soit $\pi \colon T \to T'$ un quotient de T avec dim $T' = n - 1$. Par l'hypothèse de récurrence on a, pour tout χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$, $R\pi_!(A \otimes \mathscr{L}_\chi) = 0$. Soit x un point fermé de T'. Par le théorème de changement de base pour les morphismes propres on en déduit que

$$R\Gamma_c(\pi^{-1}(x), (A \otimes \mathscr{L}_\chi)_{|\pi^{-1}(x)}) = 0$$

pour tout χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$. Comme le k-schéma $\pi^{-1}(x)$ est isomorphe à $\mathbf{G}_{m,k}$, on déduit du cas $n = 1$ que $A_{|\pi^{-1}(x)}$ est nul, d'où le résultat. □

On en déduit directement l'énoncé suivant.

Proposition 3.4.6. *Soit A un objet de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. On a $\mathscr{M}_!(A) = 0$ (resp., $\mathscr{M}_*(A) = 0$) si et seulement si A est l'objet nul.*

Démonstration. Par dualité 3.3.1 (b) il suffit de démontrer l'énoncé concernant $\mathscr{M}_!$, qui, d'après le corollaire 3.3.2, est une conséquence directe de la proposition 3.4.5. □

On en déduit la caractérisation suivante des faisceaux pervers sur un tore.

Théorème 3.4.7. *Un objet A de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est pervers si et seulement si le complexe $\mathscr{M}_*(A)$ est isomorphe à un complexe concentré en degré zéro.*

Démonstration. Soit A un objet de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Par t-exactitude du foncteur $\mathscr{M}_*$ (théorème 3.4.1), on a, pour tout entier i, des isomorphismes

$$\mathscr{M}_*({}^pH^i(A)) \simeq \mathscr{H}^i(\mathscr{M}_*(A)).$$

Par conséquent le complexe $\mathscr{M}_*(A)$ est quasi-isomorphe à un complexe concentré en degré zéro si et seulement si les $\mathscr{M}_*({}^pH^i(A))$ sont nuls pour $i \neq 0$, ce qui, par la proposition 3.4.6, est équivalent à ce que les objets de cohomologie pervers ${}^pH^i(A)$ sont nuls pour $i \neq 0$.

3.5. Perversité et convolution

Définition 3.5.1. Soit T un tore sur k.

On note $\mathscr{L}_*(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ (resp., $\mathscr{L}_!(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$) la classe des objets A de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ tels que $\mathscr{H}^i\mathscr{M}_*(A)$ (resp., $\mathscr{H}^i\mathscr{M}_!(A)$) est nul pour $i \neq 0$ et $\mathscr{H}^0\mathscr{M}_*(A)$ (resp., $\mathscr{H}^0\mathscr{M}_!(A)$) est un module localement libre.

Proposition 3.5.2. *Soit T un tore sur k.*

(1) *Les objets de $\mathscr{L}_*(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ et $\mathscr{L}_!(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ sont des faisceaux pervers.*

(2) *Les classes $\mathscr{L}_!$ et $\mathscr{L}_*$ sont échangées par dualité, respectivement stables par*

produit tensoriel externe, par $R\pi_!$ (resp., $R\pi_*$) pour π un morphisme de tores et stables par !-convolution (resp., $*$-convolution).

(3) *On a les inclusions*

$$\mathscr{L}_*(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) *_* \mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \subset \mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

et

$$\mathscr{L}_!(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) *_! \mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \subset \mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell).$$

Démonstration. L'énoncé (2) est une conséquence directe de 3.3.1 (b), (c), (e) et (f).

Le fait que les objets de $\mathscr{L}_*(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ soient des faisceaux pervers est une conséquence du théorème 3.4.7. On en déduit l'énoncé similaire concernant $\mathscr{L}_!(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ par dualité grâce à (2).

Démontrons la première inclusion de (3), la seconde s'en déduisant par dualité. Si A est un objet de $\mathscr{L}_*(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ et B un objet de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, le produit tensoriel $\mathscr{M}_*(A) \otimes^L \mathscr{M}_*(B)$ a une cohomologie concentrée en degré zéro, car $\mathscr{M}_*(A)$ a une cohomologie localement libre concentrée en degré zéro et $\mathscr{M}_*(B)$ a une cohomologie concentrée en degré zéro, d'où le résultat par 3.3.1 (f) et 3.4.7. □

Dans le cas de $\mathbf{G}_{m,k}$ on a la description suivante de $\mathscr{L}_*$ et $\mathscr{L}_!$.

Proposition 3.5.3. *Un faisceau pervers A sur $\mathbf{G}_{m,k}$ appartient à $\mathscr{L}_*(\mathbf{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ (resp., $\mathscr{L}_!(\mathbf{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$) si et seulement si il n'a pas de sous-objet (resp., de quotient) de la forme $\mathscr{L}_\chi[1]$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer l'énoncé sur $\mathscr{L}_*(\mathbf{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, celui concernant $\mathscr{L}_!(\mathbf{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ s'en déduisant par dualité. Soit A un faisceau pervers sur T. Comme $\mathscr{C}(\mathbf{G}_{m,k})$ est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-schéma régulier de dimension 1, un module cohérent sur $\mathscr{C}(\mathbf{G}_{m,k})$ est localement libre si et seulement si il est sans torsion. En particulier A appartient à $\mathscr{L}_*(\mathbf{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ si et seulement si, pour tout point fermé χ de $\mathscr{C}(\mathbf{G}_{m,k})$ on a $H^{-1}(Li_\chi^* \mathscr{M}_!(A)) = 0$, en notant i_χ le morphisme d'inclusion $\{\chi\} \to \mathscr{C}(T)$. D'après le corollaire 3.3.2, on a un isomorphisme

$$H^{-1}(Li_\chi^* \mathscr{M}_!(A)) \simeq H^{-1}(\mathbf{G}_{m,k}, A \otimes \mathscr{L}_\chi).$$

On conclut en remarquant que $H^{-1}(\mathbf{G}_{m,k}, A \otimes \mathscr{L}_\chi)$ n'est pas nul si et seulement si le faisceau pervers A a un sous-objet de la forme $\mathscr{L}_{\chi^{-1}}[1]$. □

3.6. Une localisation de $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *et de* $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Rappelons qu'une sous-catégorie S d'une catégorie abélienne A est dite épaisse si S est une sous-catégorie non vide strictement pleine stable par extension et par passage au sous-objet et au quotient.

Une sous-catégorie B d'une catégorie triangulée A est dite épaisse si B est une sous-catégorie triangulée strictement pleine vérifiant la condition suivante: pour tout morphisme $f\colon X \to Y$ dans A qui se factorise par un objet de B et qui est contenu dans un triangle distingué $X \to Y \to Z$ avec Z objet de B, les objets X et Y sont des objets de B.

L'énoncé suivant est vraisemblablement bien connu. Nous en donnons une démonstration en appendice (A.3).

PROPOSITION 3.6.1. *Soit D une catégorie triangulée munie d'une t-structure t. Soit A le coeur de (D, t) et soit S une sous-catégorie épaisse de la catégorie abélienne A. On note $\bar{S}$ la sous-catégorie de D formée des objets de D dont tous les objets de cohomologie relativement à t appartiennent à S, et A_{loc} la catégorie abélienne obtenue par localisation de A relativement à S. Alors*

(i) *$\bar{S}$ est une sous-catégorie épaisse de D.*

(ii) *Soit D_{loc} la catégorie triangulée obtenue par localisation de D relativement à $\bar{S}$. On définit une t-structure sur D_{loc} en prenant pour $D_{\mathrm{loc}}^{\leqslant n}$ (resp., $D_{\mathrm{loc}}^{\geqslant n}$) la classe des objets K de D_{loc} tels que $H^p(K)$ soit un objet de S pour $p > n$ (resp., $p < n$).*

(iii) *Le coeur de D_{loc} est une catégorie abélienne équivalente à A_{loc}.* □

On note $S(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ la sous-catégorie de la catégorie abélienne $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ formée des objets A de $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ tels que le support de $\mathscr{M}_*(A)$ est de codimension au moins 1 ou vide dans toutes les composantes irréductibles de $\mathscr{C}(T)$. D'après le théorème 3.4.3, un objet A de $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ appartient à $S(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ si et seulement si $\chi(T, A) = 0$.

LEMME 3.6.2. *La catégorie $S(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est une sous-catégorie épaisse de la catégorie abélienne* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

Démonstration. D'après le théorème 3.4.1, le foncteur $\mathscr{M}_*$ induit un foncteur exact de catégories abéliennes

$$\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to \mathrm{M}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{C}(T))$$

(on note $\mathrm{M}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{C}(T))$ la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathscr{C}(T)}$-modules cohérents), et la sous-catégorie de $\mathrm{M}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{C}(T))$ formée des modules dont le support est de codimension au moins 1 dans toutes les composantes irréductibles de $\mathscr{C}(T)$ est épaisse. □

On applique la proposition 3.6.1 à $D = D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, $A = \mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, et $S = S(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. On note $\bar{S}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) = \bar{S}$, $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\mathrm{loc}} = A_{\mathrm{loc}}$ et $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\mathrm{loc}} = D_{\mathrm{loc}}$.

La catégorie $\bar{S}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ admet la description suivante.

LEMME 3.6.3. *Soit K un objet de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *K est un objet de $\bar{S}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.*

(ii) *Le support de $\mathscr{M}_*(K)$ est de codimension au moins* 1 *dans toutes les composantes irréductibles de $\mathscr{C}(T)$.*

(iii) *Le support de $\mathscr{M}_!(K)$ est de codimension au moins* 1 *dans toutes les composantes irréductibles de $\mathscr{C}(T)$.*

Démonstration. L'équivalence de (ii) et (iii) résulte directement de 3.3.4 (ii). Pour tout objet K de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Supp}(\mathscr{M}_*(K)) &= \bigcup_i \operatorname{Supp}(\mathscr{H}^i(\mathscr{M}_*(K))) \\ &= \bigcup_i \operatorname{Supp}(\mathscr{M}_*({}^pH^iK)))\end{aligned}$$

la seconde égalité étant conséquence de 3.4.1, d'où l'on déduit l'équivalence de (i) et (ii). $\square$

La catégorie $\bar{S}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ possède les propriétés suivantes relativement à la convolution.

PROPOSITION 3.6.4. (i) *La catégorie $\bar{S}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est un idéal de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ pour les produits de convolution $*_!$ et $*_*$.*

(ii) *Soient A et B des objets de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Le cône du morphisme canonique*

$$A *_! B \to A *_* B$$

est un objet de $\bar{S}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

(iii) *Soient A et B des objets de* $\operatorname{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. *Les objets de cohomologie pervers ${}^pH^i(A *_* B)$ et ${}^pH^i(A *_! B)$ appartiennent à $S(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ pour $i \neq 0$.*

Démonstration. L'énoncé (i) résulte directement du lemme précédent et de 3.3.1 (f). Pour (ii) il suffit, d'après le lemme, de vérifier que le cône du morphisme

$$\mathscr{M}_*(A *_! B) \to \mathscr{M}_*(A *_* B)$$

a un support de codimension strictement positive. Si on note Supp_0 le support modulo des sous-variétés de codimension strictement positive, on a les égalités

$$\operatorname{Supp}_0(\text{Cône}(\mathscr{M}_*(A *_! B) \to \mathscr{M}_*(A *_* B)))$$

(1) $$= \operatorname{Supp}_0(\text{Cône}(\mathscr{M}_!(A *_! B) \to \mathscr{M}_*(A *_* B)))$$

(2) $$= \operatorname{Supp}_0(\text{Cône}(\mathscr{M}_!(A) \otimes^L \mathscr{M}_!(B) \to \mathscr{M}_*(A) \otimes^L \mathscr{M}_*(B)))$$

(3) $$= \operatorname{Supp}_0(\text{Cône}(\mathscr{M}_*(A) \otimes^L \mathscr{M}_*(B) \to \mathscr{M}_*(A) \otimes^L \mathscr{M}_*(B)))$$

$$= 0,$$

(1) et (3) découlant de 3.3.4 (ii) et (2) de 3.3.1 (f), ce qui donne l'énoncé voulu. On en déduit (iii) en écrivant la suite exacte longue de cohomologie perverse associée

à un triangle de base $A *_! B \to A *_* B$ et en utilisant que si A et B sont pervers, ${}^pH^i(A *_* B)$ et ${}^pH^i(A *_! B)$ sont nuls respectivement pour $i > 0$ et $i < 0$ (en effet, comme le morphisme de multiplication $m\colon T \times T \to T$ est affine, les foncteurs Rm_* et $Rm_!$ sont respectivement t-exacts à droite et à gauche par le théorème de M. Artin) $\square$

DÉFINITION-PROPOSITION 3.6.5. *D'après la proposition précédente* $*_!$ *et* $*_*$ *induisent par localisation un même bifoncteur*

$$*_{\mathrm{loc}}\colon D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\mathrm{loc}} \times D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\mathrm{loc}} \to D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\mathrm{loc}}.$$

C'est un bifoncteur t-biexact commutatif et associatif (avec les conventions usuelles de signe).

Démonstration. Le seul point non immédiat est la t-biexactitude qui provient du fait que $*_*$ est t-biexact à droite et que $*_!$ est t-biexact à gauche. $\square$

3.7. La catégorie $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$

Définition 3.7.1. Soit A un objet de $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. On note A_t le plus grand sous-objet de A appartenant à $S(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ et A^t le plus petit sous-objet B de A tel que A/B appartienne à $S(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. (Ceci a un sens car la classe des sous-objets de A appartenant à $S(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est stable par sous-objets et somme.) On note $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ la sous-catégorie de $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ dont les objets sont les faisceaux pervers A tels que $A_t = 0$ et $A^t = A$.

DÉFINITION-PROPOSITION 3.7.2. *On a un foncteur*

$$\mathrm{int}\colon \mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to \mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

qui à un objet A de $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *associe*

$$A_{\mathrm{int}} := A^t/(A^t \cap A_t) \simeq (A^t + A_t)/A_t.$$

Ce foncteur commute à la dualité et se factorise par $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\mathrm{loc}}$ *donnant ainsi un quasi-inverse à droite*

$$s\colon \mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\mathrm{loc}} \to \mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

du foncteur de localisation

$$\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to \mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\mathrm{loc}}$$

qui est une équivalence de catégories entre $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\mathrm{loc}}$ *et* $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$*. On munit* $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *de la structure de catégorie abélienne déduite de celle de* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\mathrm{loc}}$ *par cette équivalence de catégories.*

Démonstration. Si $\pi\colon A \to B$ est un morphisme dans $\mathrm{Perv}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ on a $\pi(A_t) \subset B_t$. On a également $\pi(A^t) \subset B^t$. En effet le morphisme $A/\pi^{-1}(B^t) \to B/B^t$ étant un monomorphisme, $A/\pi^{-1}(B^t)$ est un objet de $S(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ et donc $A^t \subset \pi^{-1}(B^t)$. Ceci démontre que $A \mapsto A_{\mathrm{int}}$ est un foncteur. Le fait qu'il commute à la dualité résulte de ce que, pour tout objet A de $\mathrm{Perv}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a des isomorphismes canoniques $(DA)_t \simeq D(A/A^t)$ et $(DA)^t \simeq D(A/A_t)$.

Remarquons que si $\pi\colon A \to B$ est un morphisme dans $\mathrm{Perv}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ avec $\mathrm{Ker}\,\pi$ dans $S(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ alors $\pi_{\mathrm{int}}\colon A_{\mathrm{int}} \to B_{\mathrm{int}}$ est un monomorphisme. En effet, comme $\pi^{-1}(B_t)$ est extension de B_t par $\mathrm{Ker}\,\pi$, c'est un objet de $S(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ contenant A_t, et donc $\pi^{-1}(B_t) = A_t$. Dualement, si $\mathrm{Coker}\,\pi$ est dans $S(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, alors π_{int} est un épimorphisme. En particulier, si $\pi\colon A \to B$ est un $S(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$-isomorphisme (i.e., $\mathrm{Ker}\,\pi$ et $\mathrm{Coker}\,\pi$ sont dans $S(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$) alors π_{int} est un isomorphisme. Par la propriété universelle du foncteur de localisation ceci démontre que le foncteur int se factorise par un foncteur $s\colon \mathrm{Perv}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\mathrm{loc}} \to \mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Notons can: $\mathrm{Perv}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to \mathrm{Perv}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\mathrm{loc}}$ et $i\colon \mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to \mathrm{Perv}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ les foncteurs canoniques. On a trivialement $s \circ \mathrm{can} \circ i = \mathrm{Id}$. D'autre part on a un isomorphisme canonique de foncteurs $\mathrm{can} \circ i \circ s \simeq \mathrm{Id}$, ce qui donne que s est une équivalence de catégories. En effet, si A est un objet de $\mathrm{Perv}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, les morphismes canoniques $A^t \to A$ et $A^t \to A_{\mathrm{int}}$ sont des $S(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$-isomorphismes et fournissent donc un isomorphisme fonctoriel $A \simeq A_{\mathrm{int}}$ dans $\mathrm{Perv}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\mathrm{loc}}$.

Définition-Proposition 3.7.3. *On note $*_{\mathrm{int}}$ le bifoncteur*

$$*_{\mathrm{int}}\colon \mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell) \times \mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to \mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

déduit par s du bifoncteur $*_{\mathrm{loc}}$ défini en 3.6.5. C'est un bifoncteur biexact commutatif et associatif vérifiant les conditions de cohérence usuelles. Si A et B sont des objets de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ on a des isomorphismes canoniques

$$A *_{\mathrm{int}} B \simeq ({}^pH^0(A *_! B))_{\mathrm{int}} \simeq ({}^pH^0(A *_* B))_{\mathrm{int}}.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de 3.6.4 et 3.6.5. □

La convolution intermédiaire $*_{\mathrm{int}}$ vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 3.7.4. (i) *Le produit de convolution $*_{\mathrm{int}}$ commute à la dualité: si A et B sont des objets de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ on a un isomorphisme canonique*

$$D(A *_{\mathrm{int}} B) \simeq D(A) *_{\mathrm{int}} D(B).$$

(ii) *Soit $\delta_{\{1\}}$ le faisceau pervers ponctuel $i_1\overline{\mathbf{Q}}_\ell$, i_1 étant l'inclusion $\{1\} \hookrightarrow T$. Le faisceau $\delta_{\{1\}}$ est un objet de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ et pour tout objet A de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ on a un isomorphisme canonique*

$$\delta_{\{1\}} *_{\mathrm{int}} A \simeq A.$$

Démonstration. L'énoncé (i) est conséquence de l'isomorphisme canonique $D(A *_* B) \simeq D(A) *_! D(B)$ et de 3.7.3.

Le fait que $\delta_{\{1\}}$ soit un objet de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est clair, et, pour tout objet K de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a des isomorphismes canoniques

$$\delta_{\{1\}} *_* K \simeq \delta_{\{1\}} *_! K \simeq K,$$

ce qui donne (ii). □

D'après ce qui précède, la catégorie abélienne $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ munie du produit $*_{\mathrm{int}}$ et de l'objet unité $\delta_{\{1\}}$ est une catégorie monoïdale symétrique (au sens de [D2]). On peut munir $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ d'une structure de catégorie tannakienne en procédant comme suit.

On note inv l'involution $x \mapsto x^{-1}$ sur le tore T. On note n le morphisme $T \times T \to T$ qui à (x, y) associe $x^{-1} \cdot y$ et $i: T \to T \times T$ l'inclusion de la diagonale. On a $i(T) = n^{-1}(1)$.

Pour tout objet A de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on pose

$$A^\vee := \mathrm{inv}^*(DA) \simeq D(\mathrm{inv}^* A).$$

On a $\mathrm{inv}^* = \mathrm{inv}_*$ et $A \mapsto A^\vee$ est une involution de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

Pour tout objet A de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a un isomorphisme canonique

$$\Phi_A: \mathrm{Hom}(\delta_{\{1\}}, A^\vee *_* A) \simeq \mathrm{Hom}(A, A),$$

donné par composition des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(\delta_{\{1\}}, A^\vee *_* A) &\simeq \mathrm{Hom}(\delta_{\{1\}}, Rn_*(DA \boxtimes A)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}(n^*\delta_{\{1\}}, DA \boxtimes A) \\ &\simeq \mathrm{Hom}(i_! \overline{\mathbf{Q}}_\ell, DA \boxtimes A) \\ &\simeq \mathrm{Hom}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell, Ri^!(DA \boxtimes A)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}(A, A),\end{aligned}$$

où le dernier isomorphisme provient de [SGA5, Exp. III (3.1.1) et (3.2.1)].

On définit

$$a_A: \delta_{\{1\}} \to A^\vee *_* A$$

par $a_A := \Phi_A^{-1}(\mathrm{Id}_A)$. On définit

$$b_A: A *_! A^\vee \to \delta_{\{1\}}$$

par transposition de $a_{\mathrm{inv}^*(A)}\colon \delta_{\{1\}} \to (\mathrm{inv}^*(A))^\vee *_* \mathrm{inv}^*(A)$ en

$$ {}^t a_{\mathrm{inv}^*(A)}\colon D((\mathrm{inv}^*(A))^\vee *_* \mathrm{inv}^*(A)) \simeq A *_! A^\vee \to D(\delta_{\{1\}}) \simeq \delta_{\{1\}}. $$

Ces morphismes induisent dans la catégorie localisée $D^b_c(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\mathrm{loc}}$ des morphismes $\delta_{\{1\}} \to A^\vee *_{\mathrm{loc}} A$ et $A *_{\mathrm{loc}} A^\vee \to \delta_{\{1\}}$, dont on déduit, via la section s, pour tout objet A de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, des morphismes canoniques

$$ \alpha_A\colon \delta_{\{1\}} \to A^\vee *_{\mathrm{int}} A \quad \text{et} \quad \beta_A\colon A *_{\mathrm{int}} A^\vee \to \delta_{\{1\}}. $$

L'énoncé suivant est démontré en A.5.

THÉORÈME 3.7.5. *Les données précédentes définissent une structure de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-catégorie tannakienne sur la catégorie* $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. *Pour toute composante connexe C de $\mathscr{C}(T)$, de point générique ξ_C, le foncteur $A \mapsto \mathscr{M}_*(A)_{|\xi_C}$ est un foncteur fibre.*

Remarque. Par le théorème principal des catégories tannakiennes [D2], on retrouve que le rang générique de $\mathscr{M}_*(A)$ est le même sur toutes les composantes connexes de $\mathscr{C}(T)$ (cf. 3.4.3).

On déduit directement du théorème 3.4.3 et du théorème 3.7.5, que, si A est un objet de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, la dimension de A au sens des catégories tannakiennes,

$$ \dim A := \beta_{A^\vee} \circ \alpha_A \in \mathrm{End}(\delta_{\{1\}}) = \overline{\mathbf{Q}}_\ell, $$

est égale à $\chi(T, A)$. Comme dans une catégorie tannakienne un objet A est inversible (i.e., $A \otimes A^\vee \simeq 1$) si et seulement si $\dim A = 1$, on obtient le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.7.6. *Un objet A de* $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *est inversible pour le produit $*_{\mathrm{int}}$ si et seulement si $\chi(T, A) = 1$. Dans ce cas l'inverse de A est $A^\vee = \mathrm{inv}^*(DA)$.* □

Par la proposition suivante les objets inversibles de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ sont exactement les faisceaux pervers irréductibles de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à 1.

PROPOSITION 3.7.7. *Soit A un objet de* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *tel que $\chi(T, A) = 1$. Le faisceau pervers A est irréductible si et seulement si c'est un objet de* $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

Démonstration. Il est clair que si A est un faisceau pervers irréductible c'est un objet de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Réciproquement, supposons que A soit un objet de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Soit B un sous-objet non nul de A. Par hypothèse on a $\chi(T, B) \neq 0$. Comme on a

$$ \chi(T, A) = \chi(T, B) + \chi(T, A/B), $$

on déduit du corollaire 3.4.4 que $\chi(T, B) = 1$ et $\chi(T, A/B) = 0$. Par conséquent A/B est nul et donc $A = B$. □

Remarque. Quand $T = \mathbf{G}_{m,k}$ la catégorie $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}$ et le produit de convolution $*_{\mathrm{int}}$ coïncident avec la catégorie des faisceaux pervers ayant la propriété $\mathscr{P}$ et la "middle convolution" considérées dans [K3, § 2.6].

3.8. La catégorie $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$

Définition 3.8.1. On note $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ la classe des faisceaux pervers sur T qui sont sous-objets d'un objet de $\mathscr{L}_*(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ et quotients d'un objet de $\mathscr{L}_!(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

Remarque. D'après 3.5.2, $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est stable par dualité.

PROPOSITION 3.8.2. *La catégorie $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est une sous-catégorie strictement pleine de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ stable par $*_{\mathrm{int}}$. La restriction de la convolution intermédiaire $*_{\mathrm{int}}$ à $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ admet la description suivante. Soient A et B des objets de $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Soient A_1 et B_1 (resp., A_2 et B_2) des objets de $\mathscr{L}_!(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ (resp., $\mathscr{L}_*(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$) et soit $\varphi_A \colon A_1 \to A_2$ un morphisme de faisceaux pervers d'image A (resp., $\varphi_B \colon B_1 \to B_2$ un morphisme de faisceaux pervers d'image B). Alors l'image du morphisme de faisceaux pervers déduit de φ_A et φ_B:*

$$A_1 *_! B_1 \to A_2 *_* B_2$$

est isomorphe à $A *_{\mathrm{int}} B$.

Démonstration. Si A est un objet de $\mathscr{L}_*(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, $\mathscr{M}_*(A)$ est isomorphe à un module sans torsion. Par conséquent, $\mathscr{M}_*(A_t)$ est également isomorphe à un module sans torsion, et donc $\mathscr{M}_*(A_t) = 0$. D'après 3.4.6, on a alors $A_t = 0$. Dualement, par 3.5.2 (2), si A est un objet de $\mathscr{L}_!(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a $A/A^t = 0$. Par conséquent, $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est une sous-catégorie strictement pleine de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

Ensuite on remarque que d'après 3.6.4 (iii) le morphisme

$$A_1 *_! B_1 \to {}^pH^0(A *_! B)$$

est un épimorphisme dans $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\mathrm{loc}}$ et

$${}^pH^0(A *_* B) \to A_2 *_* B_2$$

est un monomorphisme dans $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\mathrm{loc}}$. L'image du morphisme de faisceaux pervers

$$A_1 *_! B_1 \to A_2 *_* B_2$$

est donc un objet de $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ isomorphe dans $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\mathrm{loc}}$ à l'image de

$${}^pH^0(A *_! B) \to {}^pH^0(A *_* B).$$

C'est donc un objet isomorphe à $A *_{\mathrm{int}} B$. □

3.9. Localisation en dehors de Δ. Etant donné un fermé Z de $\mathscr{C}(T)$, on note $S(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)_Z$ la sous-catégorie de la catégorie $\operatorname{Perv}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ formée des faisceaux pervers sur T dont le transformé de Mellin $\mathscr{M}_*(A)$ a un support contenu dans Z. C'est une sous-catégorie épaisse de $\operatorname{Perv}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ (la démonstation est identique à celle de 3.6.2).

Si on applique la proposition 3.6.1 à $D = D_c^b(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, $A = \operatorname{Perv}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, et $S = S(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)_Z$, on obtient des catégories notées $\bar{S}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)_Z = \bar{S}$, $\operatorname{Perv}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)_Z = A_{\mathrm{loc}}$ et $D_c^b(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)_Z = D_{\mathrm{loc}}$.

LEMME 3.9.1. (1) *Soit K un objet de $D_c^b(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *K est un objet de $\bar{S}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)_Z$.*

(ii) *Le support de $\mathscr{M}_*(K)$ est contenu dans Z.*

(iii) *Le support de $\mathscr{M}_!(K)$ est contenu dans Z.*

(2) *Les catégories $\bar{S}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)_Z$ et $\bar{S}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\mathrm{inv}(Z)}$ sont échangées par la dualité.*

Démonstration. Pour (1) la démonstration est la même que celle du lemme 3.6.3, à ceci près que pour l'équivalence de (ii) et (iii) on utilise le fait, démontré en 6.1.1 (b), que pour tout objet K de $D_c^b(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, $\mathscr{M}_!K$ et $\mathscr{M}_*K$ ont le même support. L'énoncé (2) résulte directement de (1) et de 3.3.1 (b). □

PROPOSITION 3.9.2. *Soient A et B des objets de $D_c^b(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ et $A \to B$ un morphisme dans $D_c^b(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Si le morphisme $\mathscr{M}_!A \to \mathscr{M}_*B$ qui s'en déduit est un isomorphisme en dehors d'un fermé Z de $\mathscr{C}(T)$, alors $A \to B$ est un isomorphisme dans $D_c^b(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)_Z$ et les fermés $\Delta(A)$ et $\Delta(B)$ sont contenus dans Z.*

Démonstration. Remarquons que le morphisme $\mathscr{M}_!(A) \to \mathscr{M}_*(B)$ se factorisant en

$$\mathscr{M}_!(A) \to \mathscr{M}_*(A) \to \mathscr{M}_*(B),$$

le morphisme $\mathscr{M}_*A \to \mathscr{M}_*B$ a un inverse à droite en dehors de Z. On en tire que, pour tout i, le morphisme $\mathscr{M}_*({}^pH^iA) \to \mathscr{M}_*({}^pH^iB)$ est un épimorphisme en dehors de Z, autrement dit que ${}^pH^iA \to {}^pH^iB$ est un épimorphisme dans $\operatorname{Perv}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)_Z$.

Par dualité (3.3.1 (b)) le morphisme dual $\mathscr{M}_!(DB) \to \mathscr{M}_*(DA)$ est un isomorphisme en dehors de $\mathrm{inv}(Z)$, et donc, pour tout i, le morphisme ${}^pH^i(DB) \to {}^pH^i(DA)$ est un épimorphisme dans $\operatorname{Perv}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\mathrm{inv}(Z)}$. Comme, d'après 3.9.1 (2), les catégories $\bar{S}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)_Z$ et $\bar{S}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\mathrm{inv}(Z)}$ sont échangées par dualité, on en tire, par dualité, que, pour tout i, le morphisme ${}^pH^iA \to {}^pH^iB$ est un monomorphisme dans $\operatorname{Perv}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)_Z$. On a donc démontré que $A \to B$ est un isomorphisme dans $D_c^b(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)_Z$.

Le fait que $\Delta(A)$ (resp., $\Delta(B)$) soit contenu dans Z en découle, vu que les morphismes $\mathscr{M}_*(A) \to \mathscr{M}_*(B)$ (resp., $\mathscr{M}_!(A) \to \mathscr{M}_!(B)$, par 3.9.1) et $\mathscr{M}_!(A) \to \mathscr{M}_*(B)$ sont des isomorphismes en dehors de Z. □

PROPOSITION 3.9.3. *Soient A et B des objets de* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

(i) *Dans* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\Delta(A)}$ *les objets A et A_{int} sont isomorphes.*

(ii) *Les convolés $A *_! B$ et $A *_* B$ sont isomorphes dans $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\Delta(A) \cap \Delta(B)}$ à des objets de* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\Delta(A) \cap \Delta(B)}$.

(iii) *Les $A *_? B$ pour $? = !, *, \mathrm{int}$*[1] *sont tous isomorphes dans $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\Delta(A) \cup \Delta(B)}$.*

(iv) *Le fermé $\Delta(A *_? B)$ est contenu dans $\Delta(A) \cup \Delta(B)$ pour* $? = !, *, \mathrm{int}$.

Démonstration. Démontrons (i). Par le théorème 3.4.3, en dehors de $\Delta(A)$, $\mathscr{M}_*(A)$ est (isomorphe à un module) localement libre et est donc en particulier sans torsion. Par conséquent le support de $\mathscr{M}_*(A_t)$ est contenu dans $\Delta(A)$, autrement dit A_t est un objet de $S(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\Delta(A)}$. Si on remplace A par son dual DA, on obtient que $(DA)_t$ est un objet de $S(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\Delta(DA)}$. Comme $(DA)_t$ est isomorphe à $D(A/A^t)$, on en tire, par 3.9.1 (2), que A/A^t est un objet de $S(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\Delta(A)}$, vu que $\Delta(DA) = \mathrm{inv}(\Delta A)$ (par dualité 3.3.1 (b)). En conclusion, A_t est nul dans $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\Delta(A)}$, tandis que A et A^t sont isomorphes dans $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\Delta(A)}$, ce qui donne l'énoncé recherché.

Pour (ii), il suffit de démontrer l'énoncé concernant $A *_* B$, l'autre s'en déduisant par dualité. Si A et B sont pervers, en dehors de $\Delta(A)$, $\mathscr{M}_*(A)$ est (isomorphe à) un module localement libre et $\mathscr{M}_*(B)$ est (isomorphe à) un module cohérent. Par 3.3.1 (f), on en déduit que, en dehors de $\Delta(A)$, $\mathscr{M}_*(A *_* B)$ est (isomorphe à) un module cohérent. En dehors de $\Delta(A)$ on a donc des isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathscr{M}_*(A *_* B) &\simeq \mathscr{H}^0(\mathscr{M}_*(A *_* B)) \\ &\simeq \mathscr{M}_*({}^pH^0(A *_* B)), \end{aligned}$$

et par conséquent $A *_* B$ est isomorphe au faisceau pervers ${}^pH^0(A *_* B)$ dans $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\Delta(A)}$. On conclut en intervertissant A et B.

D'après 3.3.1 (f), le morphisme canonique

$$\mathscr{M}_!(A *_! B) \to \mathscr{M}_*(A *_* B)$$

est un isomorphisme en dehors de $\Delta(A) \cup \Delta(B)$. Par 3.9.2, on en déduit que $A *_! B$ et $A *_* B$ sont isomorphes dans $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\Delta(A) \cup \Delta(B)}$ et que $\Delta(A *_! B)$ et $\Delta(A *_* B)$ sont contenus dans $\Delta(A) \cup \Delta(B)$, ce qui donne (iii) et (iv) pour $? = !$ et $*$.

Pour terminer la démonstration remarquons que, si Z est un fermé de $\mathscr{C}(T)$ et si X et Y sont des objets de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ qui sont isomorphes dans $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_Z$, on a, directement par 3.9.1, une inclusion $\Delta(X) \subset \Delta(Y) \cup Z$. Comme conséquence de (i), on a donc une inclusion

$$\Delta({}^pH^0(A *_* B)_{\mathrm{int}}) \subset \Delta({}^pH^0(A *_* B)).$$

[1] On convient que $A *_{\mathrm{int}} B = A_{\mathrm{int}} *_{\mathrm{int}} B_{\mathrm{int}}$.

D'autre part, comme en démontrant (ii) on a vu que $A *_* B$ est isomorphe au faisceau pervers ${}^pH^0(A *_* B)$ dans $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\Delta(A)}$, on a les inclusions

$$\Delta({}^pH^0(A *_* B)) \subset \Delta(A *_* B) \cup \Delta(A) \subset \Delta(A) \cup \Delta(B).$$

Vu que, par 3.7.3, $A *_{\text{int}} B$ est isomorphe à ${}^pH^0(A *_* B)_{\text{int}}$, on en déduit l'inclusion $\Delta(A *_{\text{int}} B) \subset \Delta(A) \cup \Delta(B)$ et que $A *_{\text{int}} B$ et $A *_* B$ sont isomorphes dans $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)_{\Delta(A) \cup \Delta(B)}$. □

4. Etude de $\Delta(A)$

4.1. Enoncé des résultats. Cette section est consacrée à la démonstration de l'énoncé suivant qui sera amélioré en 7.2.1.

THÉORÈME 4.1.1. *Soit A un objet de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Pour tout caractère d'ordre fini premier à ℓ, χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)_f$, la réunion des composantes irréductibles de codimension 1 de $\Delta_\chi(A)$ est réunion d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés de codimension un de $\{\chi\} \times \mathscr{C}(T)_\ell$.*

Démonstration. Démontrons que le résultat est conséquence des deux énoncés suivants.

THÉORÈME 4.1.1′. *Soit T un tore de dimension $n \geqslant 0$ sur k. On suppose que la résolution des singularités et la simplification des idéaux*[2] *sont valides pour les variétés de dimension $\leqslant n$ définies sur k. Soit A un objet de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Alors $\Delta(A)$ est contenu dans la réunion d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés de codimension un de $\mathscr{C}(T)$.*

PROPOSITION 4.1.2. *Soit T un tore de dimension $n \geqslant 3$ et soit Z un sous-schéma fermé de $\mathscr{C}(T)_\ell$ purement de codimension 1. On suppose que pour tout isomorphisme $T \simeq T' \times T''$ avec T' un tore de dimension $n-1$, et T'' un tore de dimension 1, pour presque tout point fermé x de $\mathscr{C}(T'')_\ell$, en notant φ la projection $\mathscr{C}(T)_\ell \to \mathscr{C}(T'')_\ell$, le fermé $|\varphi^{-1}(x) \cap Z|$ est réunion d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés de codimension 1 de $\mathscr{C}(T')_\ell$ (via l'identification naturelle $\varphi^{-1}(x) \simeq \mathscr{C}(T')_\ell$). Alors $|Z|$ est réunion d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés de codimension 1 de $\mathscr{C}(T)_\ell$.*

Si $n \leqslant 1$ le résultat est conséquence de la proposition 3.3.4. Si $n = 2$ le résultat est conséquence du théorème 4.1.1′ car la résolution des singularités (d'après Abhyankar) et la simplification des idéaux sont valides pour les variétés de dimension $\leqslant 2$ définies sur k.

Pour $n > 2$, on va raisonner par récurrence. Il suffit de considérer le cas $\chi = 1$. On va appliquer la proposition 4.1.2 en prenant pour Z la réunion des composantes irréductibles de codimension 1 de $\Delta_1(A)$. On fixe un isomorphisme $T \simeq T' \times T''$ avec T'' de dimension 1, et on note p_i les projections. Comme ensemble

[2] Par ceci on entend l'énoncé des "Main Theorem" I et II de [H].

exceptionnel dans $\mathscr{C}(T'')_\ell$ on prend l'ensemble, fini d'après 2.3.1, des points fermés χ de $\mathscr{C}(T'')_\ell$ tels que le morphisme

$$Rp_{1!}(A \otimes p_2^* \mathscr{L}_\chi) \to Rp_{1*}(A \otimes p_2^* \mathscr{L}_\chi)$$

ne soit pas un isomorphisme. Si χ n'est pas exceptionnel, d'après 3.3.4 (iii), on peut identifier $\Delta_1(Rp_{1!}(A \otimes p_2^* \mathscr{L}_\chi))$ à $\varphi^{-1}(\chi) \cap \Delta_1(A)$. En particulier $\Delta_1(A)$ ne contient pas la fibre de χ dans $\mathscr{C}(T)_\ell$ (d'après 3.3.4 (ii)), et on obtient que l'intersection de Z et de $\varphi^{-1}(\chi)$ est un schéma de pure dimension $n-2$ dont toutes les composantes irréductibles figurent parmi les composantes irréductibles de dimension $n-2$ de $\Delta_1(Rp_{1!}(A \otimes p_2^* \mathscr{L}_\chi))$, ce qui, avec l'hypothèse de récurrence, assure que l'hypothèse de la proposition 4.1.2 est vérifiée. □

Le théorème 4.1.1′ sera démontré en 4.5 et la proposition 4.1.2 en 4.6.

4.2. Calculs locaux en un diviseur à croisements normaux

4.2.1. On reprend ici des résultats connus [SGA7, I, Exp. I §3]. Soit $X = \operatorname{Spec}(A)$ le localisé strict d'un schéma lisse de type fini sur k en un point géométrique. Soit $D = \bigcup_{i=1}^s D_i$ un diviseur à croisements normaux dans X et soit $U = X - D$. On a un isomorphisme $\mathscr{O}(U)^\times/\mathscr{O}(X)^\times \simeq \mathbf{Z}^s$. Soit $T_{X,U}$ un tore de groupe des caractères $X(T_{X,U})$ isomorphe à $\mathscr{O}(U)^\times/\mathscr{O}(X)^\times$. Une fois fixée une section du morphisme $\mathscr{O}(U)^\times \to X(T_{X,U})$ on obtient un morphisme $U \to T_{X,U}$ qui induit des isomorphismes

$$\pi_1(U)_\ell \xrightarrow{\sim} \pi_1(T_{X,U})_\ell$$

et

$$\pi_1(U)^t \xrightarrow{\sim} \pi_1(T_{X,U})^t$$

indépendants des choix ($\pi_1(U)^t$ est connu par le lemme d'Abhyankar [SGA1, Exp. XIII, 5.3]). Par la théorie de Kummer on a

$$H^1(U, \mathbf{Z}/\ell^n) \simeq X^*(T_{X,U}) \otimes (\mathbf{Z}/\ell^n(-1)) \simeq (\mathbf{Z}/\ell^n)^s$$

et, en utilisant la pureté cohomologique, on obtient par récurrence sur s que $H^*(U, \mathbf{Z}/\ell^n)$ est isomorphe à l'algèbre extérieure sur $H^1(U, \mathbf{Z}/\ell^n)$.

Pour $(n,p) = 1$, on pose $X_n = X[(t_j^{1/n})]$, avec t_j une équation locale de D_j, et U_n l'image réciproque de U dans X_n. On définit le "revêtement universel modéré" $\tilde{U}^t$ comme la limite projective $\varprojlim_{(n,p)=1} U_n$. De même on définit le "revêtement universel pro-ℓ" $\tilde{U}_\ell$ comme la limite projective $\varprojlim_n U_{\ell^n}$. On déduit par passage à la limite de la description précédente de $H^*(U, \mathbf{Z}/\ell^n)$ que $\tilde{U}^t$ et $\tilde{U}_\ell$ sont acycliques pour les coefficients constants de ℓ-torsion. On obtient ainsi une équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux lisses constructibles de ℓ-torsion modérés sur U (resp., de monodromie pro-ℓ) et celle des $\pi_1(U)^t$-modules (resp., $\pi_1(U)_\ell$-modules) finis de ℓ-torsion. Soit R un anneau local noethérien complet de corps résiduel $R/\mathfrak{M}$ de caractéristique ℓ. On voit R comme un anneau topologique muni de la topologie $\mathfrak{M}$-adique. On déduit de ce qui précède une équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux lisses constructibles de R-modules modérés sur U (resp., de monodromie pro-ℓ) et celle des R-modules de type fini munis d'une action continue de de $\pi_1(U)^t$ (resp., $\pi_1(U)_\ell$).

On a des énoncés similaires en remplaçant partout U par T, pour T un k-tore.

4.2.2. Dans tout ce numéro R désigne un anneau local régulier complet et de corps résiduel de caractéristique ℓ. Soit G un groupe profini isomorphe à $\mathbf{Z}_\ell^n$. On note L_G le R-module $R[[G]]$ muni de l'action canonique, notée can, de G par translation multiplicative sur $R[[G]]$.

PROPOSITION 4.2.2.1. *Pour tout R-module de type fini M, muni d'une action continue de G, on a un isomorphisme canonique de* $R[[G]]$*-modules*

$$R\Gamma(G, M \otimes_R L_G)[n] \simeq M^{\mathrm{op}} \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \left(\bigwedge\nolimits_{\mathbf{Z}_\ell}^n G\right)^\vee,$$

en notant M^{op} le module M muni de l'action opposée de G, et $^\vee$ désignant le dual d'un $\mathbf{Z}_\ell$-module.

Démonstration. Une fois choisis des générateurs topologiques $\gamma_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, de G, on a un isomorphisme

$$R[[G]] \simeq R[[t_1, \dots, t_n]]$$

obtenu en envoyant γ_i sur $t_i + 1$.

On en déduit que le complexe de Koszul $K.((\gamma_i - 1); R[[G]])$ est une résolution du $R[[G]]$-module R. Le complexe $R\Gamma(G, M \otimes_R L_G)$ est donc quasi-isomorphe au complexe de Koszul $K^\cdot((\gamma_i - 1); M \otimes_R L_G)$ (cf. [Laz, V.2.2.3]).

Traitons tout d'abord le cas $n = 1$ et posons $\gamma = \gamma_1$. On a des isomorphismes

$$\begin{aligned} R\Gamma(G, M \otimes_R L_G) &\simeq M \otimes_R L_G \xrightarrow{\gamma - 1} M \otimes_R L_G \\ &\simeq M \otimes_R L_G \xrightarrow{\gamma \otimes \mathrm{can}\, \gamma - 1} M \otimes_R L_G \\ &\simeq M \otimes_R L_G \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{can}\, \gamma - \gamma^{-1} \otimes 1} M \otimes_R L_G \\ &\simeq M^{\mathrm{op}} \otimes_R L_G \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{can}\, \gamma - \gamma \otimes 1} M^{\mathrm{op}} \otimes_R L_G \\ &\simeq M^{\mathrm{op}} \otimes_R R[[t]] \xrightarrow{1 + 1 \otimes t - \gamma \otimes 1} M^{\mathrm{op}} \otimes_R R[[t]], \end{aligned}$$

l'action de γ sur $R[[t]]$ étant l'action triviale. Remarquons que le morphisme

$$M^{\mathrm{op}} \otimes_R R[t] \xrightarrow{1+1\otimes t-\gamma\otimes 1} M^{\mathrm{op}} \otimes_R R[t]$$

est injectif, car il augmente les degrés. Quant au conoyau, il est clairement isomorphe à M^{op} par le morphisme obtenu après passage au quotient du morphisme

$$\mathrm{id} \otimes 1 \colon M^{\mathrm{op}} \to M^{\mathrm{op}} \otimes_R R[t].$$

Par platitude de $R[[t]]$ sur $R[t]$, on en tire que $R\Gamma(G, M \otimes_R L_G)[n]$ est isomorphe à M^{op}. (Un calcul similaire est effectué dans [K1, 7.5.5].)

Pour n général $\geqslant 1$ on a de même que l'opérateur $1 + 1 \otimes t_1 - \gamma_1 \otimes 1$ agissant sur $M^{\mathrm{op}} \otimes_R R[t_1, \dots, t_n]$ est injectif et que $M^{\mathrm{op}} \otimes_R R[t_2, \dots, t_n]$ s'envoie isomorphiquement sur son conoyau. On obtient ainsi par récurrence que la cohomologie de $K^{\cdot}((1 + 1 \otimes t_i - \gamma_i \otimes 1); M \otimes_R R[t_1, \dots, t_n])$ est nulle en degré différent de n et isomorphe à M^{op} en degré n. En appliquant le foncteur $\otimes_{R[t_1,\dots,t_n]} R[[t_1, \dots, t_n]]$ on en déduit, par platitude, que le complexe $K^{\cdot}((1 + 1 \otimes t_i - \gamma_i \otimes 1); M \otimes_R R[[t_1, \dots, t_n]]) \simeq K^{\cdot}((\gamma_i - 1); M \otimes_R L_G)$ a la même cohomologie et donc que $R\Gamma(G, M \otimes_R L_G)[n]$ est isomorphe à M^{op}. Cet isomorphisme dépend du choix des γ_i. En comparant les complexes de Koszul associés à différents choix de générateurs, on obtient que l'isomorphisme devient indépendant des choix si on remplace M^{op} par $M^{\mathrm{op}} \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \left(\bigwedge^n_{\mathbf{Z}_\ell} G\right)^{\vee}$. □

Soit U comme en 4.2.1. On définit comme en 3.1 un caractère canonique

$$\pi_1(U) \to R[[\pi_1(U)_\ell]]^{\times}.$$

Notons $L_{\pi_1(U)}$ le module $R[[\pi_1(U)_\ell]]$ muni de l'action de $\pi_1(U)$ par ce caractère et L_U le $R[[\pi_1(U)_\ell]]$-faisceau lisse constructible libre tordu de rang 1 et modérément ramifié sur U qui lui est associé. On déduit l'énoncé suivant de la proposition 4.2.2.1.

Proposition 4.2.2.2. *Soit U comme en 4.2.1 et soit $\mathscr{F}$ un faisceau lisse constructible modéré de R-modules sur U correspondant à un $R[[\pi_1(U)^t]]$-module M. Alors $R\Gamma(U, \mathscr{F} \otimes^L_R L_U)$ est canoniquement isomorphe au $R[[\pi_1(U)_\ell]]$-module*

$$(M_{\text{pro-}\ell})^{\mathrm{op}} \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \left(\bigwedge^{\max}_{\mathbf{Z}_\ell} \pi_1(U)_\ell\right)^{\vee}$$

concentré en degré s, $M_{\text{pro-}\ell}$ étant la partie pro-ℓ de M. (C'est à dire le plus grand sous-module de M sur lequel l'action de $R[[\pi_1(U)^t]]$ se factorise par $R[[\pi_1(U)_\ell]]$).

Démonstration. On a des isomorphismes canoniques

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad R\Gamma(U, \mathscr{F} \otimes^L_R L_U) \simeq R\Gamma(\pi_1(U)^t, M \otimes_R L_{\pi_1(U)}) \\
&(2) \qquad \simeq R\Gamma(\pi_1(U)_\ell, (M \otimes_R L_{\pi_1(U)})_{\text{pro-}\ell}) \\
&(3) \qquad \simeq R\Gamma(\pi_1(U)_\ell, M_{\text{pro-}\ell} \otimes_R L_{\pi_1(U)_\ell}).
\end{aligned}
$$

L'isomorphisme (1) est conséquence de la suite spectrale de Hochschild-Serre et du fait que $\tilde{U}^t$ est acyclique pour les coefficients constants de ℓ-torsion, (2) de ce que, pour tout R-module de type fini N muni d'une action continue de $\pi_1(U)^t$, on a un isomorphisme canonique

$$R\Gamma(\ker(\pi_1(U)^t \to \pi_1(U)_\ell), N) \simeq N_{\text{pro-}\ell}$$

et (3) de l'égalité $(L_{\pi_1(U)})_{\text{pro-}\ell} = L_{\pi_1(U)}$ et de ce que $L_{\pi_1(U)_\ell}$ est isomorphe à $L_{\pi_1(U)}$ vu comme $\pi_1(U)_\ell$-module. On en tire l'énoncé par la proposition 4.2.2.1. □

L'énoncé suivant de démontre de la même façon.

PROPOSITION 4.2.2.3. *Soit T un tore de dimension n sur k. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau lisse constructible modéré de R-modules sur T correspondant à un $R[[\pi_1(T)^t]]$-module M. Alors $R\Gamma(T, \mathscr{F} \otimes^L_R L_T)$ est canoniquement quasi-isomorphe au Ω_T-module*

$$(M_{\text{pro-}\ell})^{\text{op}} \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \Big(\bigwedge\nolimits^{\max}_{\mathbf{Z}_\ell} \pi_1(T)_\ell\Big)^\vee$$

concentré en degré n. □

On en tire directement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.2.2.4. *Soit T un tore de dimension n sur k et soit $\mathscr{F}$ un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse constructible modéré sur T. Soit R dans $\mathscr{R}$ tel que $\mathscr{F}$ provienne, après extension des scalaires, d'un $R[[\pi_1(T)^t]]$-module M. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$\mathscr{M}_*(\mathscr{F}[n]) \simeq (M^{\text{op}} \otimes_{R[[\pi_1(T)^t]]} \mathscr{O}_{\mathscr{C}(T)}) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \Big(\bigwedge\nolimits^{\max}_{\mathbf{Z}_\ell} \pi_1(T)_\ell\Big)^\vee. \qquad \square$$

4.2.3. Nous utiliserons l'énoncé suivant.

LEMME 4.2.3.1. *Soit R un anneau local noethérien complet de corps résiduel de caractéristique ℓ. Soit $X = \operatorname{Spec}(A)$ le localisé strict d'un schéma lisse de type fini sur k en un point géométrique. Soient $D = \bigcup_{i=1}^s D_i$ et $E = \bigcup_{j=1}^t E_j$ des diviseurs à croisements normaux dans X, sans composante irréductible commune, tels que*

$D \cup E$ soit un diviseur à croisements normaux dans X. On pose $U = X - (D \cup E)$, $V = X - D$, et $u\colon U \to V$ l'inclusion. Alors, si $t > 0$, on a $H^*(V, u_!\mathscr{F}) = 0$ pour tout R-faisceau lisse modéré $\mathscr{F}$ sur U.

Démonstration. Le cas des R-faisceaux se ramène à celui des faisceaux de ℓ-torsion. Quitte à passer à un revêtement fini d'ordre premier à ℓ on peut supposer que la monodromie est pro-ℓ et se ramener à $\mathscr{F} = \mathbf{Z}/\ell$. Pour $s = 0$ le résultat est clair car la cohomologie d'un schéma strictement hensélien se calcule par restriction au point fermé. Supposons $s > 0$ et raisonnons par récurrence sur t. Pour F et G fermés dans X on note $(\mathbf{Z}/\ell)_{X,F,G}$ le faisceau constant $\mathbf{Z}/\ell$ sur $X - F - G$ prolongé par zéro à $X - F$. On a une suite exacte

$$0 \to (\mathbf{Z}/\ell)_{X,D,E} \to (\mathbf{Z}/\ell)_{X,D,E'} \to i_*(\mathbf{Z}/\ell)_{E_1, E_1 \cap D, E_1 \cap E'} \to 0$$

avec $E' = \bigcup_{j=2}^{t} E_j$ et i l'inclusion $E_1 - E_1 \cap D \to X - D$, qui permet de se ramener au cas où $t = 1$. Dans ce dernier cas c'est une conséquence du calcul explicite de la cohomologie de $X - D$ et de $E_1 - E_1 \cap D$.

4.3. Un résultat intermédiaire. Cette section est consacrée à la démonstration de la proposition 4.3.1, qui joue un rôle essentiel dans la preuve du théorème 4.1.1′. Soit T un tore de dimension n sur k, et soit A un objet de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. On fixe une compactification $j\colon T \to \overline{T}$ telle que $\overline{T}$ soit propre et lisse sur k et $\overline{T} - T$ soit un diviseur à croisements normaux. On peut prendre par exemple $\overline{T} = \mathbf{P}^n$ ou $(\mathbf{P}^1)^n$. On note $i\colon \overline{T} - T \to \overline{T}$ l'inclusion.

Soit ξ un point géométrique de $\overline{T} - T$ et soit q un entier. Pour R dans $\mathscr{R}$ et A un objet de $D_c^b(T, R)$, l'objet $R^q j_*(A \otimes_R^L L_T)_\xi$ est un $R[[\pi_1(T)_\ell]]$-module cohérent. On a ainsi un foncteur $D_c^b(T, R) \to \mathrm{M}_{\mathrm{coh}}(R[[\pi_1(T)_\ell]])$. En procédant comme en 3.3, on en déduit un foncteur $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to \mathrm{M}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{C}(T)_\ell)$, et, en tensorisant par $\mathscr{L}_\chi$ pour χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)_f$, un foncteur $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to \mathrm{M}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{C}(T))$, que l'on notera $A \mapsto R^q j_*(A \otimes \mathscr{L}_T)_\xi$.

Proposition 4.3.1. *On suppose que la résolution des singularités et la simplification des idéaux sont valides pour les variétés de dimension $\leqslant n$ définies sur k. Pour tout point géométrique ξ de $\overline{T} - T$, et tout entier q, le $\mathscr{O}_{\mathscr{C}(T)}$-module cohérent $(R^q j_*(A \otimes \mathscr{L}_T))_\xi$ a un support contenu dans la réunion d'un ensemble fini, indépendant de ξ et de q, de cotores algébriques translatés de codimension un de $\mathscr{C}(T)$.*

En fait il est plus commode de démontrer l'énoncé plus général suivant.

Soit $\varphi\colon W \to \overline{T}$ un morphisme de type fini avec $\dim W \leqslant n$. On note

$$i'\colon \varphi^{-1}(\overline{T} - T) \to W$$

et

$$j'\colon \varphi^{-1}(T) \to W$$

les inclusions. On note également φ la restriction de φ à $\varphi^{-1}(T)$. Pour tout objet A de $D_c^b(\varphi^{-1}(T), \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on définit comme précédemment, étant donnés un point géométrique ξ de $W - \varphi^{-1}(T)$ et un entier q, un $\mathcal{O}_{\mathscr{C}(T)}$-module cohérent $(R^q j'_*(A \otimes \varphi^*(\mathscr{L}_T)))_\xi$.

PROPOSITION 4.3.1′. *On suppose que la résolution des singularités et la simplification des idéaux sont valides pour les variétés de dimension $\leqslant n$ définies sur k. Soit φ: $W \to \overline{T}$ un morphisme de type fini avec* dim $W \leqslant n$. *Alors, pour tout objet A de $D_c^b(\varphi^{-1}(T), \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, pour tout point géométrique ξ de $W - \varphi^{-1}(T)$, et tout entier q, le support du module $(R^q j'_*(A \otimes \varphi^*(\mathscr{L}_T)))_\xi$ est contenu dans la réunion d'un ensemble fini, indépendant de ξ et de q, de cotores algébriques translatés de codimension un de $\mathscr{C}(T)$.*

Remarque. La proposition reste vraie en remplaçant n par un entier m quelconque.

Démonstration. Par dévissage, on peut supposer que A est un faisceau lisse sur une sous-variété lisse irréductible localement fermée U de $\varphi^{-1}(T) \subset W$ prolongé par zéro à $\varphi^{-1}(T)$. Il est possible de supposer de plus que U est dense dans W. On peut également supposer que la monodromie de A est pro-ℓ. En effet, soit π: $\bar{U} \to U$ le revêtement étale fini associé au ℓ-sous-groupe de Sylow du groupe de monodromie de A, et soit $\overline{W}$ la normalisation de W dans le corps des fractions de $\bar{U}$. Le faisceau A est alors facteur direct de $\pi_*\pi^*(A)$, et on a l'énoncé similaire après prolongement par zéro et application du foncteur Rj'_*.

Par hypothèse, il existe un morphisme birationnel propre p: $W' \to W$, avec W' lisse, tel que la restriction de p à $p^{-1}(U)$ soit un isomorphisme sur son image, et tel que $p^{-1}(W - U)$ soit un diviseur à croisements normaux. Le diviseur $p^{-1}(\varphi^{-1}(\overline{T} - T))$ est alors réunion de composantes irréductibles de $p^{-1}(W - U)$.

On a par conséquent le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{u'} & (\varphi \circ p)^{-1}(T) & \xrightarrow{j''} & W' \\ \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ U & \xrightarrow{u} & \varphi^{-1}(T) & \xrightarrow{j'} & W. \end{array}$$

En utilisant la suite spectrale de Leray et le théorème de changement de base propre, on est ramené à vérifier l'énoncé analogue pour $(R^q j''_*(u'_! A \otimes (\varphi \circ p)^*(\mathscr{L}_T)))_\xi$ pour tout point géométrique ξ de $p^{-1}\varphi^{-1}(\overline{T} - T)$. On peut donc supposer que W est lisse, que les complémentaires de $\varphi^{-1}(T)$ et de U dans W sont des diviseurs à croisements normaux, et que la monodromie de A sur U est pro-ℓ (en particulier que A est modéré le long de $W - U$). On peut également supposer que $W - U$ est un diviseur à croisements normaux strict, i.e., que les composantes irréductibles de $W - U$ sont lisses. On écrit $\varphi^{-1}(T) = W - D$ et $U = W - (D \cup E)$. D'après le lemme 4.2.3.1, si ξ est un point géométrique de E le module $(R^q j'_*(A \otimes \varphi^*(\mathscr{L}_T)))_\xi$ est nul pour tout entier q. On peut donc supposer que E est vide, c'est à dire que $\varphi^{-1}(T) = U$.

Soit ξ un point géométrique de $W - U$. On note W_ξ (resp., U_ξ) le hensélisé strict de W en ξ (resp., l'image réciproque de U dans W_ξ). Reprenons les notations de 4.2.1: soit T_{W_ξ, U_ξ} un tore, que l'on notera $T_{W,U,\xi}$, de groupe des caractères $X(T_{W,U,\xi})$ isomorphe à $\mathcal{O}(U_\xi)^\times/\mathcal{O}(W_\xi)^\times$. Fixons une section s du morphisme p: $\mathcal{O}(U_\xi)^\times \to X(T_{W,U,\xi})$: on obtient alors un morphisme

$$\varphi_\xi: U_\xi \to T_{W,U,\xi}$$

qui induit un isomorphisme $\pi_1(U_\xi)^t \xrightarrow{\sim} \pi_1(T_{W,U,\xi})^t$ indépendant des choix. Relativement à ce tore, on a un $\mathcal{O}_{\mathscr{C}(T_{W,U,\xi})}$-module cohérent $R^q j_*(A_{U_\xi} \otimes \varphi_\xi^*(\mathscr{L}_{T_{W,U,\xi}}))$, en notant j: $U_\xi \to W_\xi$ l'inclusion. D'après la proposition 4.2.2.2, son support dans $\mathscr{C}(T_{W,U,\xi})$ est un ensemble fini, autrement dit la réunion d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés de dimension 0 de $\mathscr{C}(T_{W,U,\xi})$. En effet, pour R dans $\mathscr{R}$ tel que A provienne par extension des scalaires d'un faisceau lisse modéré A_R de R-modules, on a, d'après la proposition 4.2.2.2, en notant M le $R[[\pi_1(T_{W,U,\xi})^t]]$-module associé à $(A_R)_{U_\xi}$, que $R^q j_*(A_{U_\xi} \otimes \varphi_\xi^*(\mathscr{L}_{T_{W,U,\xi}}))_\xi$ est nul pour $q \neq \dim T_{W,U,\xi}$, et est isomorphe au $\mathcal{O}_{\mathscr{C}(T_{W,U,\xi})}$-module

$$(M^{\mathrm{op}} \otimes_{R[[\pi_1(T_{W,U,\xi})^t]]} \mathcal{O}_{\mathscr{C}(T_{W,U,\xi})}) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \left(\bigwedge\nolimits_{\mathbf{Z}_\ell}^{\max} \pi_1(T_{W,U,\xi})_\ell\right)^\vee$$

pour $q = \dim T_{W,U,\xi}$, qui est clairement un faisceau sur $\mathscr{C}(T_{W,U,\xi})$ à support fini.

On note k: $U_\xi \to U$ le morphisme canonique et λ: $X(T) \to \mathcal{O}(U_\xi)^\times$ le morphisme associé à $\varphi \circ k$. Au composé $p \circ \lambda$: $X(T) \to X(T_{W,U,\xi})$ correspond un morphisme de tores π: $T_{W,U,\xi} \to T$ qui n'est pas trivial. En effet, sinon, le morphisme entre groupes de caractères $X(T) \to X(T_{W,U,\xi})$ serait trivial, et, par définition de $T_{W,U,\xi}$, l'image inverse de toute fonction inversible sur T se prolongerait en une fonction inversible sur W au voisinage de ξ, ce qui est absurde, vu que $\overline{T}$ est séparé et que ξ est un point de $\varphi^{-1}(\overline{T} - T)$.

En général, le diagramme suivant n'est pas commutatif

$$\begin{array}{ccc} U_\xi & \xrightarrow{\varphi_\xi} & T_{W,U,\xi} \\ {\scriptstyle k}\downarrow & & {\scriptstyle \pi}\downarrow \\ U & \xrightarrow{\varphi} & T \end{array}$$

car, a priori, $\lambda \neq s \circ p \circ \lambda$. Par contre, comme $p \circ s = \mathrm{id}$, on a $p \circ \lambda = p \circ s \circ p \circ \lambda$, autrement dit, il existe un morphisme g: $W_\xi \to T$ tel que l'on ait $\pi \circ \varphi_\xi = g_{|U_\xi} \cdot (\varphi \circ k)$. Le choix d'un relèvement de g à $\tilde{T}^t$ permet alors d'identifier $(\varphi \circ k)^*(L_T)$ à $\varphi_\xi^*(L_{T_{W,U,\xi}}) \otimes_{R[[\pi_1(T_{W,U,\xi})_\ell]]} R[[\pi_1(T)_\ell]]$ (cf. 3.1.1 (i)). On en tire, en tordant par $\mathscr{L}_\chi$ pour χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)_f$, que le support du module $(R^q j'_*(A \otimes \varphi^*(\mathscr{L}_T)))_\xi$ est l'image inverse de celui du module $R^q j_*(A_{|U_\xi} \otimes \varphi_\xi^*(\mathscr{L}_{T_{W,U,\xi}}))_\xi$ par le morphisme $\mathscr{C}(T) \to \mathscr{C}(T_{W,U,\xi})$, ce qui entraîne le résultat recherché, excepté la possibilité de choisir l'ensemble fini de cotores algébriques translatés indépendant de ξ.

On note D_i, $i \in J$, les composantes irréductibles de $W - U$ et pour $I \subset J$ on pose $\mathring{D}_I = \bigcap_{i\in I} D_i - \bigcup_{j\notin I} D_j$. On considère la stratification de $W - U$ en sous-variétés connexes localement fermées lisses donnée par les composantes connexes des $\mathring{D}_I$ pour I non vide. Soit R_0 dans $\mathscr{R}$ tel que A provienne d'un faisceau lisse modéré A_0 de R_0-modules. Soit χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)_f$ un caractère d'ordre fini premier à ℓ, et soit R dans $\mathscr{R}$ contenant R_0 et tel que χ se factorise par $R^\times$. On voit $\mathscr{L}_\chi$ comme un R-faisceau. On pose $\mathscr{F}^q := R^q j'_*(A \otimes_R \varphi^*(L_T \otimes_R \mathscr{L}_\chi))$. Il suffit de démontrer que les faisceaux $\mathscr{F}^q$ sont lisses sur chaque strate, ce qui est une conséquence directe du lemme suivant. En effet, on peut alors prendre le même ensemble fini de cotores algébriques translatés pour tous les points d'une même strate, et on obtient un ensemble indépendant de ξ en prenant la réunion des ensembles associés à chaque strate. □

LEMME 4.3.2. *Soit R un anneau local noethérien complet de corps résiduel de caractéristique ℓ. Soit $X = \operatorname{Spec}(A)$ le localisé strict d'un schéma lisse de type fini sur k en un point géométrique. Soit $D = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant r} D_i$ un diviseur à croisements normaux, avec $D_i = \operatorname{div} f_i$, les f_i étant des éléments de l'idéal maximal de A faisant partie d'un système régulier de paramètres. Pour $I \subset \{1, \ldots, r\}$ on pose $\mathring{D}_I = \bigcap_{i\in I} D_i - \bigcup_{j\notin I} D_j$. On pose $U = X - D$ et on note $j\colon U \to X$ l'inclusion. Soit B un R-faisceau lisse constructible modéré sur U. Alors, pour tout entier q, les faisceaux $R^q j_*(B)$ sont lisses sur les $\mathring{D}_I$.*

Démonstration. Commençons par traiter le cas où le groupe de monodromie de B est pro-ℓ. Par réduction modulo les puissances de l'idéal maximal de R et dévissage on se ramène au cas où $B = \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$. D'après le calcul de cohomologie rappelé en 4.2.1, on a $R^q j_*(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \simeq \bigwedge^q R^1 j_*(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \simeq \bigwedge^q (\mu_\ell^{-1} \otimes ((j_*\mathbf{G}_m)/\mathbf{G}_m))$. Comme le faisceau $((j_*\mathbf{G}_m)/\mathbf{G}_m)$ est isomorphe à $\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant r} \mathbf{Z}_{D_i}$, il est localement constant sur les strates, d'où le résultat dans ce cas.

En général, par le lemme d'Abhyankar [SGA 1, Exp. XIII, 5.2], il existe des entiers $n_1, \ldots, n_r > 0$, premiers à p, tels que si on pose $U' = U[T_1, \ldots T_r]/(T_1^{n_1} - f_1, \ldots, T_r^{n_r} - f_r)$, le groupe de monodromie du faisceau π^*B soit pro-ℓ, en notant π le morphisme $U' \to U$. De plus (cf. loc. cit. 5.1) le schéma $X' = X[T_1, \ldots T_r]/(T_1^{n_1} - f_1, \ldots, T_r^{n_r} - f_r)$ est alors régulier et le complémentaire dans X' de U' est le diviseur à croisements normaux $D' = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant r} D'_i$ avec $D'_i = \operatorname{div} T_i$. On notera encore π le morphisme $X' \to X$ et $j'\colon U \to X$ l'inclusion. On peut de plus supposer que les n_i sont premiers à ℓ. Comme B est alors un facteur direct de $\pi_*\pi^*B$, il suffit de démontrer l'énoncé pour les $R^q j_*(\pi_*\pi^*B)$. Les $R^q j'_*(\pi^*B)$ sont lisses sur les strates $\mathring{D}'_I$ associées au diviseur D'. Comme la restriction de π à chaque strate $\mathring{D}'_I$ est un morphisme étale fini vers $\mathring{D}_I$, les faisceaux $\pi_* R^q j'_*(\pi^*B)$ sont lisses sur les strates $\mathring{D}_I$, ce qui donne le résultat car on a des isomorphismes $\pi_* R^q j'_*(\pi^*B) \simeq R^q j_*(\pi_*\pi^*B)$. □

4.4. Supports. Soit R un anneau local régulier complet de corps résiduel de caractéristique ℓ. Soit X un k-schéma de type fini. A tout R-faisceau constructible A sur X, on peut associer un fermé, noté $\mathrm{Supp}_R A$, de $\mathrm{Spec}\, R$, que l'on définit par récurrence sur la dimension du support (naïf) Z de A, de la façon suivante.

Soit U l'ouvert lisse maximal de Z sur lequel A est lisse. Notons $j\colon U \to X$ l'inclusion. On a une suite exacte de R-faisceaux constructibles

$$0 \to j_! j^* A \to A \to A/j_! j^* A \to 0.$$

On définit $\mathrm{Supp}_R(j_! j^* A)$ comme la réunion des supports dans $\mathrm{Spec}\, R$ des R-modules associés à la restriction de A à chaque composante connexe de U. Par hypothèse de récurrence $\mathrm{Supp}_R(A/j_! j^* A)$ est défini, ce qui permet de poser

$$\mathrm{Supp}_R A = \mathrm{Supp}_R(j_! j^* A) \cup \mathrm{Supp}_R(A/j_! j^* A).$$

On vérifie directement que Supp_R est additif sur les suites exactes courtes de R-faisceaux constructibles, et que, pour tout R-faisceau constructible A, on a

$$\mathrm{Supp}_R A = \bigcup\nolimits_\xi \mathrm{Supp}_R A_\xi, \tag{4.4.1}$$

pour ξ parcourant l'ensemble des points fermés de X.

Pour tout objet K de $D^b_c(X,R)$, on pose $\mathrm{Supp}_R K = \bigcup_i \mathrm{Supp}_R \mathscr{H}^i K$. On aura besoin du lemme suivant.

Lemme 4.4.2. *Soient R et T des anneaux locaux réguliers et complets de corps résiduel de caractéristique ℓ. On se donne un morphisme local $R \to T$ et on note φ le morphisme correspondant* $\mathrm{Spec}\, T \to \mathrm{Spec}\, R$. *Pour tout objet K de $D^b_c(X,R)$, on a*

$$\mathrm{Supp}_T(T \otimes^L_R K) = \varphi^{-1}(\mathrm{Supp}_R K).$$

Démonstration. Par dévissage on peut supposer que tous les objets de cohomologie de K sont lisses et on est ramené au cas usuel des modules. □

4.5. Démonstration du théorème 4.1.1′. On reprend les notations de 4.3. Soit A un objet de $D^b_c(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Soit R dans $\mathscr{R}$ tel qu'il existe un objet A_R de $D^b_c(T,R)$ dont A provienne par extension des scalaires. On associe à A_R le fermé $\mathrm{Supp}_{R[[\pi_1(T)_\ell]]}(i^* Rj_*(A_R \otimes^L_R L_T))$ de $\mathrm{Spec}\, R[[\pi_1(T)_\ell]]$. L'image inverse dans $\mathscr{C}(T)_\ell$ de ce fermé est indépendante du choix de R et A_R; en tordant par $\mathscr{L}_\chi$, pour χ dans $\mathscr{C}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)_f$, on obtient un fermé de $\mathscr{C}(T)$ que l'on note $\mathrm{Supp}_{\mathscr{C}(T)}(i^* Rj_*(A \otimes \mathscr{L}_T))$.

Proposition 4.5.1. *Soit A un objet de $D^b_c(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.*

(1) *Le fermé* $\mathrm{Supp}_{\mathscr{C}(T)}(i^* Rj_*(A \otimes \mathscr{L}_T))$ *est contenu dans la réunion d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés de codimension un de $\mathscr{C}(T)$.*

(2) *Un point fermé χ de $\mathscr{C}(T)$ n'appartient pas à* $\mathrm{Supp}_{\mathscr{C}(T)}(i^* Rj_*(A \otimes \mathscr{L}_T))$ *si et seulement si l'objet $i^* Rj_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi)$ est nul dans $D^b_c(\overline{T} - T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.*

Démonstration. Démontrons (1). Le fermé $\mathrm{Supp}_{\mathscr{C}(T)}(i^*Rj_*(A\otimes\mathscr{L}_T))$ est contenu, d'après (4.4.1), dans la réunion des supports des modules $(R^qj_*(A\otimes\mathscr{L}_T))_\xi$, avec ξ décrivant l'ensemble des points fermés de $\overline{T}-T$, ce qui donne le résultat, d'après la proposition 4.3.1.

Démontrons (2). Il suffit d'effectuer la démonstration dans le cas où χ est un point fermé de $\mathscr{C}(T)_\ell$. Fixons R appartenant à $\mathscr{R}$ tel que A provienne par extension des scalaires d'un objet A_R de $D_c^b(T,R)$, et tel que χ soit associé à un caractère continu, que l'on notera également χ, $\chi\colon \pi_1(T)_\ell\to R^\times$. A ce caractère est associé un morphisme d'anneaux locaux $\mathrm{ev}_\chi\colon R[[\pi_1(T)_\ell]]\to R$, donné par l'évaluation en χ. On notera i_χ le morphisme correspondant $i_\chi\colon \mathrm{Spec}\,R\to \mathrm{Spec}\,R[[\pi_1(T)_\ell]]$. Pour simplifier les notations, on pose $M=i^*Rj_*(A_R\otimes_R^L L_T)$. C'est un objet de $D_c^b(T,R[[\pi_1(T)_\ell]])$. On a des isomorphismes canoniques

$$R\otimes^L_{\mathrm{ev}_\chi} M\simeq i^*Rj_*(A_R\otimes^L_R(R\otimes^L_{\mathrm{ev}_\chi}L_T)) \tag{1}$$

$$\simeq i^*Rj_*(A\otimes\mathscr{L}_\chi). \tag{2}$$

L'isomorphisme (1) est conséquence de A.1.4 et A.1.5, et l'isomorphisme (2) provient de l'isomorphisme canonique $R\otimes^L_{\mathrm{ev}_\chi}L_T\simeq\mathscr{L}_\chi$. Ici $\mathscr{L}_\chi$ est vu comme un R-faisceau constructible.

Le point χ n'appartient pas au fermé $\mathrm{Supp}_{\mathscr{C}(T)}(i^*Rj_*(A\otimes\mathscr{L}_T))$ si et seulement si le point correspondant de $\mathrm{Spec}\,R[[\pi_1(T)_\ell]]$ n'appartient pas à $\mathrm{Supp}_{R[[\pi_1(T)_\ell]]}M$, autrement dit, si et seulement si $i_\chi^{-1}(\mathrm{Supp}_{R[[\pi_1(T)_\ell]]}(M))$ est contenu dans le point fermé de $\mathrm{Spec}\,R$. D'après 4.4.2, ceci est équivalent à ce que le fermé $\mathrm{Supp}_R(R\otimes^L_{\mathrm{ev}_\chi}M)$ soit contenu dans le point fermé de $\mathrm{Spec}\,R$, ou encore, d'après les isomorphismes (1) et (2), à ce que le fermé $\mathrm{Supp}_R(i^*Rj_*(A\otimes\mathscr{L}_\chi))$ soit contenu dans le point fermé de $\mathrm{Spec}\,R$. Comme cette dernière condition est équivalente à la nullité de $i^*Rj_*(A\otimes\mathscr{L}_\chi)$ dans $D_c^b(\overline{T}-T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, ceci termine la démonstration. □

Pour terminer la démonstration du théorème 4.1.1′, il suffit, compte tenu de la proposition 4.5.1, d'établir l'énoncé suivant.

PROPOSITION 4.5.2. *Pour tout objet A de $D_c^b(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, le fermé $\Delta(A)$ est contenu dans* $\mathrm{Supp}_{\mathscr{C}(T)}(i^*Rj_*(A\otimes\mathscr{L}_T))$.

Démonstration. Soit χ un point fermé de $\mathscr{C}(T)$ n'appartenant pas au fermé $\mathrm{Supp}_{\mathscr{C}(T)}(i^*Rj_*(A\otimes\mathscr{L}_T))$. D'après 4.5.1 (2), l'objet $i^*Rj_*(A\otimes\mathscr{L}_\chi)$ de $D_c^b(\overline{T}-T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est alors nul. En particulier, le complexe $R\Gamma(\overline{T}-T,\ i^*Rj_*(A\otimes\mathscr{L}_\chi))$, qui est isomorphe au cône du morphisme canonique

$$R\Gamma_c(T,A\otimes\mathscr{L}_\chi)\to R\Gamma(T,A\otimes\mathscr{L}_\chi),$$

est nul, et donc, par 3.3.4 (i), χ n'appartient pas à $\Delta(A)$. □

4.6. Démonstration de la proposition 4.1.2. Soit Z un sous-schéma fermé de

$\mathscr{C}(T)_\ell$ vérifiant les hypothèses de la proposition. Comme $\mathscr{C}(T)_\ell$ est noethérien d'après la proposition 3.2.2, il existe R, anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbf{Q}_\ell$, tel que Z provienne par extension des scalaires d'un sous-schéma fermé $\tilde{Z}$ de $\operatorname{Spec} R[[\pi_1(T)_\ell]]$, plat sur R.

On note $\mathbf{G}_{m,k}^{(i)}$ le i-ème terme du produit $(\mathbf{G}_{m,k})^n$, $T^{(i)}$ le produit $\prod_{j\neq i}\mathbf{G}_{m,k}^{(i)}$. Pour tout isomorphisme $\varrho\colon T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$, on a des immersions fermées

$$\operatorname{Spec} R[[\pi_1(T^{(i)})_\ell]] \to \operatorname{Spec} R[[\pi_1(T)_\ell]].$$

On dit qu'un isomorphisme $\varrho\colon T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$ est général pour $\tilde{Z}$ si le schéma $\tilde{Z}_0$ obtenu par réduction modulo l'idéal maximal $\mathfrak{M}$ de R ne contient aucun des $\operatorname{Spec}(R/\mathfrak{M})[[\pi_1(T^{(i)})_\ell]]$. Il est clair qu'il existe toujours de tels isomorphismes.

On peut supposer que Z est réduit et irréductible. On utilise alors le lemme suivant.

LEMME 4.6.1. *On suppose que Z est réduit et irréductible et vérifie les conditions précédentes, et que $\varrho\colon T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$ est général pour $\tilde{Z}$. Alors, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, si Z n'est pas contenu dans une fibre de $\mathscr{C}(T) \to \mathscr{C}(\mathbf{G}_{m,k}^{(i)})$, il existe un tore quotient $S^{(i)}$ de $T^{(i)}$ de dimension $n-2$, tel que Z soit invariant par translation par l'image de $\mathscr{C}(S^{(i)})_\ell$.*

Démonstration. Pour tout tore quotient S de dimension $n-2$ de $T^{(i)}$ on considère l'ensemble

$$Z_S(\overline{\mathbf{Q}}_\ell) = \{p \in Z(\overline{\mathbf{Q}}_\ell) \mid (p \cdot \operatorname{im} \mathscr{C}(S)_\ell(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)) \subset Z(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)\}.$$

On vérifie par descente galoisienne que $Z_S(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est l'ensemble des points $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-rationnels d'un sous-schéma fermé Z_S de Z défini sur K, le corps des fractions de R. D'après les hypothèses de la proposition et du lemme, $Z(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est réunion des $Z_S(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, S parcourant l'ensemble dénombrable des tores quotients de dimension $n-2$ de $T^{(i)}$, et d'un ensemble fini de fibres exceptionnelles. Quand le schéma Z_S n'est pas vide, $\tilde{Z}_0$ contient l'image isomorphe du schéma $\operatorname{Spec}(R/\mathfrak{M})[[\pi_1(S)_\ell]]$, qui est de dimension $n-2$. Par conséquent, si une infinité de Z_S étaient non vides, $\tilde{Z}_0$ contiendrait $\operatorname{Spec}(R/\mathfrak{M})[[\pi_1(T^{(i)})_\ell]]$, ce qui contredit l'hypothèse. Comme Z est irréductible et $Z(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est dense dans Z par A.2.2.3, Z est donc soit égal à l'un des schémas Z_S, soit contenu dans une fibre. Cette dernière possibilité étant interdite par hypothèse, on en déduit l'énoncé cherché. □

On est maintenant en mesure de démontrer la proposition. Supposons que Z ne soit pas un cotore algébrique translaté. D'après le lemme 4.6.1, si $\varrho\colon T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$ est général pour $\tilde{Z}$, alors pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, il existe un tore quotient $S^{(i)}$ de $T^{(i)}$ de dimension $n-2$ tel que $Z = Z_{S^{(i)}}$. Comme les noyaux des projections $T \to S^{(i)}$ engendrent T, les cotores algébriques images des $\mathscr{C}(S^{(i)})_\ell$ engendrent un cotore algébrique de dimension au moins $n-1$ laissant Z invariant par translation, ce qui contredit l'hypothèse. □

4.7. Variantes relatives. Soit $p\colon T \to T'$ un morphisme de tores.

Définition 4.7.1. A tout objet A de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ on associe un fermé $\Delta_p(A)$ de $\mathscr{C}(T)$ défini de la façon suivante. Soit R dans $\mathscr{R}$ tel qu'il existe un objet A_R de $D_c^b(T, R)$ dont A provienne par extension des scalaires. On associe à A_R le fermé

$$\operatorname{Supp}_{R[[\pi_1(T)_\ell]]}\text{Cône}(Rp_!(A \otimes_R^L L_T) \to Rp_*(A \otimes_R^L L_T))$$

de Spec $R[[\pi_1(T)_\ell]]$. L'image inverse dans $\mathscr{C}(T)_\ell$ de ce fermé est indépendante du choix de R et A_R; en tordant par $\mathscr{L}_\chi$, pour χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)_f$, on obtient le fermé $\Delta_p(A)$ de $\mathscr{C}(T)$.

Si l'on voulait être consistant avec les notations de 4.5, on pourrait noter

$$\Delta_p(A) = \operatorname{Supp}_{\mathscr{C}(T)}\text{Cône}(Rp_!(A \otimes \mathscr{L}_T) \to Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_T)).$$

Lorsque p est la projection sur un point, on a $\Delta_p(A) = \Delta(A)$.

Proposition 4.7.2. *Soit A un objet de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.*

(i) *Un point fermé χ de $\mathscr{C}(T)$ appartient à $\Delta_p(A)$ si et seulement si le morphisme canonique*

$$Rp_!(A \otimes \mathscr{L}_\chi) \to Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi)$$

n'est pas un isomorphisme.

(ii) *Soit $T \simeq T' \times T''$ un isomorphisme de tores. On note p_i les projections et on identifie $\mathscr{C}(T)(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ à $\mathscr{C}(T')(\overline{\mathbf{Q}}_\ell) \times \mathscr{C}(T'')(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Un point fermé $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ de $\mathscr{C}(T)$ appartient à $\Delta_{p_1}(A)$ si et seulement si le morphisme canonique*

$$Rp_{1!}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_{\chi_2})) \to Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_{\chi_2}))$$

n'est pas un isomorphisme.

(iii) *Soient $T \xrightarrow{p_1} T' \xrightarrow{p_2} T''$ des morphismes de tores. On suppose que le morphisme canonique $Rp_{1!}(A) \to Rp_{1*}(A)$ est un isomorphisme. On a alors l'égalité*

$$\Delta_{p_2}(Rp_{1!}(A)) = p_1^{\vee -1}(\Delta_{p_2 \circ p_1}(A)).$$

(iv) *Le fermé $\Delta_p(A)$ est d'intérieur vide dans toutes les composantes connexes du schéma $\mathscr{C}(T)$.*

(v) *Soit $j\colon T \to \overline{T}$ une compactification comme en 4.3 dont on reprend les notations. On suppose que $\overline{T}$ contient un ouvert Ω contenant T tel que p se prolonge en un morphisme propre $\Omega \to T'$. (Il existe de telles compactifications: par exemple la compactification $T \hookrightarrow (\mathbf{P}^1)^n$ associée à une base de $X_*(T)$ qui contient une base de* $\operatorname{Ker}(X_*(T) \to X_*(T'))$.*) Le fermé $\Delta_p(A)$ est contenu dans* $\operatorname{Supp}_{\mathscr{C}(T)}(i^*Rj_*(A \otimes \mathscr{L}_T))$.

Démonstration. La démonstration de (i) est toute pareille à celle de 4.5.1 (2). Soit $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ un point fermé de $\mathscr{C}(T)$. Comme on a un isomorphisme canonique $\mathscr{L}_\chi \simeq p_1^*(\mathscr{L}_{\chi_1}) \otimes p_2^*(\mathscr{L}_{\chi_2})$, on déduit (ii) de (i) en utilisant la formule de projection. Pour démontrer l'énoncé (iii), on remarque que, d'après (i), un point fermé χ de $\mathscr{C}(T')$ appartient à $\Delta_{p_2}(Rp_{1!}(A))$ si et seulement si le morphisme canonique $Rp_{2!}(Rp_{1!}(A) \otimes \mathscr{L}_\chi) \to Rp_{2*}(Rp_{1!}(A) \otimes \mathscr{L}_\chi)$ n'est pas un isomorphisme, et appartient à $p_1^{\vee-1}(\Delta_{p_2 \circ p_1}(A))$ si et seulement si le morphisme canonique $R(p_2 \circ p_1)_!(A \otimes p_1^* \mathscr{L}_\chi) \to R(p_2 \circ p_1)_*(A \otimes p_1^* \mathscr{L}_\chi)$ n'est pas un isomorphisme, et on conclut par la formule de projection.

Pour démontrer (iv), commençons par supposer que $p \colon T \to T'$ est un quotient. Fixons un isomorphisme de tores $T \simeq T' \times (\mathbf{G}_{m,k})^r$, et notons p_i les projections. D'après 2.3.2, pour presque tout point fermé χ de $\mathscr{C}((\mathbf{G}_{m,k})^r)$, le morphisme canonique $Rp_{1!}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_{\chi_2})) \to Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_{\chi_2}))$ est un isomorphisme, ce qui, avec (ii), permet de conclure. En général, on écrit $p = p_2 \circ p_1$, avec p_1 un morphisme fini de tores et p_2 un morphisme quotient de tores. Comme alors $Rp_{1!} \simeq Rp_{1*}$, on déduit le résultat du cas précédent, grâce à (iii).

Démontrons (v). Soit χ un point fermé de $\mathscr{C}(T)$ n'appartenant pas au fermé $\mathrm{Supp}_{\mathscr{C}(T)}(i^* Rj_*(A \otimes \mathscr{L}_T))$. D'après 4.5.1 (2), l'objet $i^* Rj_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi)$ est nul. Par conséquent, le morphisme canonique $Rj_!(A \otimes \mathscr{L}_\chi) \to Rj_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi)$ est un isomorphisme, ainsi que le morphisme canonique $Rp_!(A \otimes \mathscr{L}_\chi) \to Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi)$, ce qui donne l'énoncé recherché, par (i). $\square$

Les théorèmes 4.1.1 et 4.1.1′ admettent les variantes relatives suivantes. Compte tenu de la proposition 4.7.2, leur démonstration est identique à celle des théorèmes 4.1.1 et 4.1.1′.

THÉORÈME 4.7.3. *Soit $p \colon T \to T'$ un morphisme de tores. Soit A un objet de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Pour tout caractère d'ordre fini premier à ℓ, χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)_f$, la réunion des composantes irréductibles de codimension 1 de $\Delta_p(A) \cap \{\chi\} \times \mathscr{C}(T)_\ell$ est réunion d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés de codimension un de $\{\chi\} \times \mathscr{C}(T)_\ell$.* $\square$

THÉORÈME 4.7.3′. *Soit $p \colon T \to T'$ un morphisme de tores, avec T de dimension n sur k. On suppose que la résolution des singularités et la simplification des idéaux sont valides pour les variétés de dimension $\leqslant n$ définies sur k. Soit A un objet de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Alors $\Delta_p(A)$ est contenu dans la réunion d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés de codimension un de $\mathscr{C}(T)$.* $\square$

Remarque. Soit $T \simeq T' \times T''$ un isomorphisme de tores. On note p_i les projections et j_i les immersion canoniques. D'après 4.7.2 (ii), pour tout objet A de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, le fermé $\Delta_{p_1}(A)$ est de la forme $j_2^{\vee-1} Z$, avec Z un fermé de $\mathscr{C}(T'')$, que l'on notera $\Delta'_{p_1}(A)$. Un point fermé χ de $\mathscr{C}(T'')$ appartient à $\Delta'_{p_1}(A)$ si et seulement si le morphisme canonique $Rp_{1!}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi)) \to Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi))$ n'est pas un isomorphisme. On déduit directement des théorèmes 4.7.3 et 4.7.3′ les énoncés analogues pour $\Delta'_{p_1}(A)$.

5. Faisceaux pervers de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle

5.1. Caractérisation des faisceaux pervers irréductibles de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle. L'énoncé suivant est le résultat principal de cette section.

THÉORÈME 5.1.1. *Soit T un tore de dimension $n \geqslant 0$ et soit A un faisceau pervers ℓ-adique irréductible sur le tore T, vérifiant $\chi(T, A) = 0$. Alors il existe un tore quotient $p\colon T \to T'$ de dimension $n-1$, un faisceau pervers ℓ-adique A' sur T' et un caractère χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$ tels que*

$$A \simeq \mathscr{L}_\chi \otimes p^*(A'[1]).$$

Nous aurons besoin de la variante relative suivante.

THÉORÈME 5.1.2. *Soit T un tore de dimension $n \geqslant 0$ sur k, soit X un k-schéma, soit $\pi\colon T \times X \to X$ la projection et soit A un objet irréductible de* $\mathrm{Perv}(T \times X, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, *vérifiant $[R\pi_!(A)] = 0$ dans $K(X)$. Alors il existe un k-tore quotient $p\colon T \to T'$ de dimension $n-1$, un faisceau pervers ℓ-adique A' sur $T' \times X$ et un caractère χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$ tels que*

$$A \simeq \pi'^*(\mathscr{L}_\chi) \otimes p^*(A'[1]),$$

en notant p la projection $T \times X \to T' \times X$ et π' la projection $T \times X \to T$.

PROPOSITION 5.1.3. *L'entier n étant fixé le théorème 5.1.1 entraîne le théorème 5.1.2.*

Démonstration. On prend les notations du théorème 5.1.2. Notons Z le support de A dans $T \times X$, ξ le point générique de l'image de Z par projection sur X, et $\bar{\xi}$ un point géométrique localisé en ξ. On note $k(\bar{\xi})$ le corps (algébriquement clos) associé à $\bar{\xi}$. La fibre $\pi^{-1}(\bar{\xi})$ s'identifie naturellement au tore $\tilde{T} := T \otimes k(\bar{\xi})$. Soit r le degré de transcendance de $k(\bar{\xi})$ sur k. Considérons $\tilde{A} := A_{|\pi^{-1}(\bar{\xi})}[-r]$. C'est un faisceau pervers sur le tore $\tilde{T}$ et on a $\chi(\tilde{T}, \tilde{A}) = 0$. Soit $\tilde{A}_1$ un sous-objet irréductible de $\tilde{A}$. On peut lui appliquer le théorème 5.1.1. Il existe donc un $k(\bar{\xi})$-tore quotient

$$\tilde{p}\colon \tilde{T} \to \tilde{T}',$$

un faisceau pervers $\tilde{B}$ sur $\tilde{T}'$, et un caractère χ dans $\mathscr{C}(\tilde{T}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times) \simeq \mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$ tels que

$$\tilde{A}_1 \simeq \mathscr{L}_\chi \otimes \tilde{p}^*\tilde{B}[1].$$

D'après 2.5, $\tilde{B}$ est isomorphe à ${}^pH^{-1}R\tilde{p}_*(\tilde{A}_1 \otimes \mathscr{L}_{\chi^{-1}})$ et $\tilde{A}_1 \otimes \mathscr{L}_{\chi^{-1}}$ est canoniquement isomorphe à $\tilde{p}^*({}^pH^{-1}R\tilde{p}_*(\tilde{A}_1 \otimes \mathscr{L}_{\chi^{-1}}))[1]$. Ceci entraîne, toujours d'après 2.5, que le faisceau pervers ${}^pH^{-1}R\tilde{p}_*(\tilde{A} \otimes \mathscr{L}_{\chi^{-1}})$ n'est pas nul.

Soit $p\colon T \to T'$ un morphisme de k-tores dont $\tilde{p}$ se déduise après extension des scalaires. (Il est clair qu'il existe de tels objets.) Comme ${}^pH^{-1}R\tilde{p}_*(\tilde{A} \otimes \mathscr{L}_{\chi^{-1}})$ n'est pas nul, le faisceau pervers $A' := {}^pH^{-1}Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_{\chi^{-1}})$ n'est pas nul. Comme $p^*A'[1]$ est un sous-objet de $A \otimes \mathscr{L}_{\chi^{-1}}$ par 2.5, et que $A \otimes \mathscr{L}_{\chi^{-1}}$ est irréductible, on a nécessairement $A \simeq \mathscr{L}_\chi \otimes p^*(A'[1])$. □

5.2. Démonstration du théorème 5.1.1. Commençons par établir le lemme suivant.

LEMME 5.2.1. *Soit T un tore de dimension $n > 0$ sur k et soit A un faisceau pervers ℓ-adique sur le tore T, vérifiant $\chi(T, A) = 0$. Soit $p\colon T \to T'$ un tore quotient de dimension $n - 1$. Si A n'a pas de sous-quotient de la forme $p^*A'[1]$ avec A' pervers non nul, alors $\Delta(A)$ et $p^\vee(\mathscr{C}(T'))$ n'ont pas de composante irréductible commune dans $\mathscr{C}(T)$.*

Démonstration. D'après 2.5, l'hypothèse faite sur A garantit que les objets de cohomologie pervers ${}^pH^{-1}Rp_*A$ et ${}^pH^1Rp_!A$ sont nuls. Ceci entraîne que Rp_*A et $Rp_!A$ sont pervers et donc, d'après 3.4.3, que $\mathscr{M}_!(Rp_!A)$ et $\mathscr{M}_*(Rp_*A)$ sont génériquement nuls sur toutes les composantes irréductibles de $\mathscr{C}(T')$. Par conséquent le support du cône du morphisme canonique

$$\mathscr{M}_!(Rp_!A) \to \mathscr{M}_*(Rp_*A)$$

est génériquement vide sur toutes les composantes irréductibles de $\mathscr{C}(T')$. On en tire le résultat voulu, car, d'après 3.3.1 (c), on a les égalités

$$\begin{aligned} &\mathrm{Supp}\,(\text{Cône}\ \mathscr{M}_!(Rp_!A) \to \mathscr{M}_*(Rp_*A)) \\ &\quad = \mathrm{Supp}(\text{Cône}(Lp^{\vee *}(\mathscr{M}_!A) \to Lp^{\vee *}(\mathscr{M}_*A))) \\ &\quad = \mathrm{Supp}(Lp^{\vee *}\ (\text{Cône}(\mathscr{M}_!A \to \mathscr{M}_*A))) \\ &\quad = p^{\vee -1}(\Delta(A)). \end{aligned}$$ □

L'énoncé étant clair si $n = 0$, on suppose maintenant que $n \geqslant 1$. Le théorème sera conséquence des deux propositions suivantes.

PROPOSITION 5.2.2. *Soit T un tore de dimension $n > 0$ sur k et soit A un faisceau pervers ℓ-adique irréductible sur le tore T, vérifiant $\chi(T, A) = 0$. On suppose que $\Delta(A)$ possède une composante irréductible de codimension 1 dans $\mathscr{C}(T)$. Alors la conclusion du théorème 5.1.1 vaut pour A.*

Démonstration. Quitte à tordre A par un faisceau de Kummer, on peut supposer que $\Delta_1(A)$ a une composante irréductible de codimension 1. Quitte à tordre encore A par un faisceau de Kummer, on peut supposer, d'après 4.1.1, que $\Delta_1(A)$ contient un cotore algébrique de dimension $n - 1$. Autrement dit, il existe un tore quotient $p\colon T \to T'$ avec T' de dimension $n-1$, tel que l'image de $\mathscr{C}(T')_\ell$ dans $\mathscr{C}(T)_\ell$ soit une composante irréductible de $\Delta_1(A)$. D'après le lemme 5.2.1, ceci entraîne que A a un sous-quotient de la forme $p^*A'[1]$ avec A' pervers non nul. Comme A est irréductible, on a $A = p^*A'[1]$ avec A' pervers, ce qui donne bien le résultat désiré.

PROPOSITION 5.2.3. *Soit T un tore de dimension $n > 0$ sur k et soit A un faisceau pervers ℓ-adique irréductible sur le tore T, vérifiant $\chi(T, A) = 0$. On suppose que toutes les composantes irréductibles de $\Delta(A)$ sont de codimension au moins 2 dans $\mathscr{C}(T)$. On suppose de plus que le théorème 5.1.2 est vérifié en dimension $n-1$. Alors la conclusion du théorème 5.1.1 vaut pour A.*

Démonstration. Soit $p\colon T \to T'$ un morphisme quotient avec T' de dimension 1. Comme toutes les composantes irréductibles de $\Delta(A)$ sont de codimension au moins 2 dans $\mathscr{C}(T)$, et que l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathscr{C}(T)$ est dénombrable, il existe, d'après le lemme 5.2.5, un caractère χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$ tel que

$$(\chi \cdot p^\vee(\mathscr{C}(T'))) \cap \Delta(A) = \varnothing.$$

On peut de plus supposer, d'après 2.3.2 et le lemme 5.2.5, que le morphisme canonique

$$Rp_!(A \otimes \mathscr{L}_\chi) \to Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi)$$

est un isomorphisme. Quitte à remplacer A par $A \otimes \mathscr{L}_\chi$, on peut donc supposer que

$$p^\vee(\mathscr{C}(T')) \cap \Delta(A) = \varnothing$$

et que le morphisme canonique $Rp_!(A) \to Rp_*(A)$ est un isomorphisme. Sous ces hypothèses, $Rp_!(A)$ est un faisceau pervers sur T', d'après le lemme 2.4, et, d'après 3.3.4 (iii), le schéma $\Delta(Rp_!(A))$ est vide. D'après le théorème 3.4.3, $\mathscr{M}_*(Rp_!(A))$ est isomorphe à un module localement libre sur tout $\mathscr{C}(T')$, de rang nul. Autrement dit, $\mathscr{M}_*(Rp_!(A))$ est nul, et donc, par 3.4.6, le faisceau pervers $Rp_!(A)$ est nul. On en déduit l'énoncé cherché en appliquant le théorème 5.1.2 à $p\colon T \to T'$ qui est de dimension relative $n-1$. $\square$

Le théorème 5.1.1 est maintenant obtenu par récurrence sur n comme conséquence directe des propositions 5.1.3, 5.2.2 et 5.2.3 et du cas trivial $n = 0$. $\square$

Remarque. Comme le lecteur pourra le vérifier, l'énoncé du théorème 5.1.1 reste valide si on considère des $\overline{\mathbf{F}_\ell((T))}$-faisceaux au lieu de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux. En particulier l'énoncé vaut pour les $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-faisceaux. Les démonstrations sont les mêmes, à des changements mineurs près.

5.2.4. Soit T un tore de dimension n sur k. On dit qu'une propriété est vérifiée pour ω-presque tout χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$: pour $n = 0$ si elle est vérifiée, pour $n = 1$ si elle est vérifiée pour χ appartenant au complémentaire d'une partie dénombrable de $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, pour $n \geqslant 2$ si, pour tout isomorphisme de tores $T \simeq T' \times T''$ avec T' de dimension 1, pour ω-presque tout χ' dans $\mathscr{C}(T', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ la propriété est vérifiée pour ω-presque tout χ'' dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

LEMME 5.2.5. *Soit T un tore de dimension n sur k. Soit Z un sous-schéma fermé de $\mathscr{C}(T)$, partout de dimension $\leqslant d < n$. Soit i: $T'' \to T$ l'inclusion d'un sous-tore de dimension r. Alors, pour ω-presque tout χ dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, l'intersection $i^{\vee -1}(\chi) \cap Z$ est partout de dimension $\leqslant d - r$.*

Démonstration. En raisonnant par récurrence sur r, on se ramène au cas où $r = 1$ (le cas $r = 0$ étant trivial). Comme l'ensemble des composantes connexes des schémas $\mathscr{C}(T)$ et $\mathscr{C}(T'')$ est dénombrable, il suffit de vérifier que, si Z est un sous-schéma fermé de $\mathscr{C}(T)_\ell$, partout de dimension $\leqslant d < n$, et i: $T'' \to T$ l'inclusion d'un sous-tore de dimension 1, $i_\ell^\vee \colon \mathscr{C}(T)_\ell \to \mathscr{C}(T'')_\ell$ le morphisme associé, il existe un ensemble fini W de points fermés de $\mathscr{C}(T'')_\ell$, tel que, pour χ n'appartenant pas à W, l'intersection $i_\ell^{\vee -1}(\chi) \cap Z$ soit partout de dimension $\leqslant d - 1$. Il suffit de prendre pour W l'image dans $\mathscr{C}(T'')_\ell$ de l'ensemble fini des fibres de $i_\ell^\vee$ contenant une composante irréductible de Z. $\square$

6. Support et variétés associées de $\mathscr{M}_*$

6.1. Support de $\mathscr{M}_*(A)$. On démontre dans le théorème qui suit que le support de $\mathscr{M}_*(A)$ est toujours une réunion finie de cotores algébriques translatés de $\mathscr{C}(T)$.

THÉORÈME 6.1.1. *Soit T un tore de dimension n sur k.*

(a) *Soit A un objet irréductible de* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. *Il existe un tore quotient p: $T \to T'$, un caractère χ de $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$, et un faisceau pervers irréductible A' sur T', vérifiant $\chi(T', A') > 0$, tels que l'on ait un isomorphisme*

$$A \simeq \mathscr{L}_{\chi^{-1}} \otimes p^*(A')[d]$$

en posant $d = \dim T - \dim T'$. Le support de $\mathscr{M}_*(A)$ et celui de $\mathscr{M}_!(A)$ est alors égal au cotore algébrique translaté $\chi \cdot p^\vee \mathscr{C}(T')$ de $\mathscr{C}(T)$.

(b) *Soit K un objet de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Le support de $\mathscr{M}_*(K)$ est exactement la réunion d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés. Les complexes $\mathscr{M}_!(K)$ et $\mathscr{M}_*(K)$ ont le même support. De plus si on définit le cycle associé d'un objet M de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{C}(T))$ comme $\mathrm{Cyc}(M) := \sum_\xi \chi(M_\xi)\overline{\{\xi\}}$, pour ξ parcourant l'ensemble des points génériques des composantes irréductibles du support de M, on a*

$$\mathrm{Cyc}(\mathscr{M}_!(K)) = \varepsilon(\mathrm{Cyc}(\mathscr{M}_*(K))),$$

en notant ε l'opérateur sur le groupe des cycles localement finis de $\mathscr{C}(T)$ donné par la multiplication par $(-1)^c$ sur les cycles de codimension c.

Démonstration. Démontrons (a). Si $\chi(T, A) > 0$, on prend pour p l'identité, pour χ le caractère trivial, et $A' = A$. Si $\chi(T, A) = 0$, A est de la forme $\mathscr{L}_{\chi_1^{-1}} \otimes p^* A_1[1]$ avec $p \colon T \to T_1$ la projection sur un tore quotient de dimension $n - 1$, d'après le théorème 5.1.1. On obtient par récurrence sur n que A est de la forme désirée. D'après 3.4.3, comme $\chi(T', A') > 0$, le support de $\mathscr{M}_*(A')$ est égal à $\mathscr{C}(T')$. Comme, en dehors de $\Delta(A')$, $\mathscr{M}_*(A')$ et $\mathscr{M}_!(A')$ sont isomorphes, le support de $\mathscr{M}_!(A')$ est aussi égal à $\mathscr{C}(T')$ (d'après 3.3.4 (ii)). On en déduit le calcul du support de $\mathscr{M}_*(A)$ et de $\mathscr{M}_!(A)$ par 3.3.1 (d) et 3.3.1 (g). Remarquons que les mêmes arguments donnent que $\mathrm{Cyc}(\mathscr{M}_!(A)) = (-1)^d \mathrm{Cyc}(\mathscr{M}_*(A))$.

En général, si A est un faisceau pervers sur T, a une filtration de Jordan-Hölder

$$0 = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_m = A$$

et

$$\mathrm{Supp}\, \mathscr{M}_*(A) = \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{Supp}\, \mathscr{M}_*(A_i / A_{i-1}),$$

ce qui donne l'énoncé concernant le support de $\mathscr{M}_*(A)$ dans ce cas. Le cas général d'un objet de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ s'y ramène, par t-exactitude (3.4.1).

Pour achever la démonstration de (b), il suffit, d'après 3.3.1 (b), de démontrer que les complexes $\mathscr{M}_*(K)$ et $\mathrm{inv}^*(\mathscr{M}_*(DK))$ ont le même support et le même cycle associé. Par t-exactitude, on se ramène au cas où K est un faisceau pervers et, en utilisant une filtration de Jordan-Hölder, au cas, déjà traité, où K est un faisceau pervers irréductible. □

THÉORÈME 6.1.2. *Soit T un tore de dimension n sur k. Soit A un objet de* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. *Soit $p \colon T \to T'$ un tore quotient propre de T et soit χ dans* $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$.

(a) *Soit $\mathscr{I}$ le faisceau d'idéaux définissant $\chi \cdot p^\vee \mathscr{C}(T')$ dans $\mathscr{C}(T)$. Il existe un unique sous-objet $A_{\mathscr{I}}$ de A tel que $\mathscr{M}_*(A_{\mathscr{I}})$ soit le sous-module maximal de $\mathscr{M}_*(A)$ annulé par $\mathscr{I}$.*

(b) *Il existe un unique sous-objet $A_{\chi, T'}$ de A tel que $\mathscr{M}_*(A_{\chi, T'})$ soit le sous-module maximal de $\mathscr{M}_*(A)$ de support contenu dans $\chi \cdot p^\vee \mathscr{C}(T')$.*

Démonstration. Pour démontrer (a), on peut se ramener au cas où χ est le caractère trivial. Notons ${}_{\mathscr{I}}\mathscr{M}_*(A)$ le sous-module maximal de $\mathscr{M}_*(A)$ annulé par $\mathscr{I}$ et d la dimension du noyau du morphisme $p : T \to T'$. La t-exactitude (3.4.1) de $\mathscr{M}_*$, jointe à 3.3.1(c), donne que pour $-d \leqslant j \leqslant 0$, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathscr{M}_*({}^p H^j R\pi_* A) \simeq \mathscr{T}\mathrm{or}_{-j}^{\mathscr{O}_{\mathscr{C}(T)}}(\mathscr{O}_{\mathscr{C}(T)}/\mathscr{I}, \mathscr{M}_*(A)).$$

En faisant $j = -d$ et en utilisant la dualité locale entre $\mathscr{T}\mathrm{or}_d^{\mathscr{O}_{\mathscr{C}(T)}}$ et $\mathscr{E}\mathrm{xt}^0_{\mathscr{O}_{\mathscr{C}(T)}}$ on obtient que ${}_{\mathscr{I}}\mathscr{M}_*(A)$ est fonctoriellement isomorphe à $\mathscr{M}_*({}^p H^{-d} R\pi_* A)$. Posons

$U(A) = p^*({}^pH^{-d}Rp_*A)[d]$. C'est naturellement un sous-objet de A par le plongement $i_A\colon U(A) \to A$ rappelé en 2.5. D'après 3.3.1 (d) on a $\mathcal{M}_*(U(A)) = {}_{\mathcal{I}}\mathcal{M}_*(U(A))$. Pour vérifier que le morphisme canonique $\mathcal{M}_*(U(A)) \to \mathcal{M}_*(A)$ induit un isomorphisme $\mathcal{M}_*(U(A)) \to {}_{\mathcal{I}}\mathcal{M}_*(A)$ il suffit donc de vérifier que le morphisme canonique $\mathcal{M}_*({}^pH^{-d}R\pi_*U(A)) \to \mathcal{M}_*({}^pH^{-d}R\pi_*A)$ est un isomorphisme. D'après 3.4.6 ceci équivaut au fait que le morphisme canonique ${}^pH^{-d}R\pi_*U(A) \to {}^pH^{-d}R\pi_*A$ soit un isomorphisme. Comme le foncteur $f^*[d]$ est pleinement fidèle sur les faisceaux pervers [BBD, Proposition 4.2.5], ceci équivaut au fait que le morphisme canonique $U(i_A)\colon U(U(A)) \to U(A)$ soit un isomorphisme, ce qui est clair par la description rappelée en 2.5 de $U(A)$. Posons $A_{\mathcal{I}} = U(A)$ et démontrons l'unicité. Soit B un sous-objet de A tel que $\mathcal{M}_*(B)$ soit annulé par $\mathcal{I}$. D'après ce qui précède le morphisme canonique $\mathcal{M}_*(U(B)) \to \mathcal{M}_*(B)$ est alors un isomorphisme et on déduit de 3.4.6 que $U(B) = B$. Ceci entraîne, d'après 2.5, que B est un sous-objet de $A_{\mathcal{I}}$. Si B est un sous-objet strict de $A_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{M}_*(B)$ est un sous-module strict de ${}_{\mathcal{I}}\mathcal{M}_*(A)$ d'après 3.4.6, ce qui démontre l'unicité.

Démontrons (b). Pour obtenir $A_{\chi,T'}$, on considère la suite croissante de sous-objets $A_{\mathcal{I}^n}$ de A définie par récurrence par $A_{\mathcal{I}^0} = 0$ et

$$A_{\mathcal{I}^n}/A_{\mathcal{I}^{n-1}} = (A/A_{\mathcal{I}^{n-1}})_{\mathcal{I}}$$

pour $n \geqslant 1$. Comme A est de longueur finie cette suite est stationnaire et sa limite donne l'objet $A_{\chi,T'}$. □

Il paraît difficile en général de déterminer l'image essentielle du foncteur $\mathcal{M}_*$. On a néanmoins l'énoncé suivant.

PROPOSITION 6.1.3. (1) *Pour tout objet A de* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, *les deux énoncés suivants sont équivalents:*

(i) $A[-\dim(T)]$ *est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse modéré sur T;*

(ii) *le module $\mathcal{M}_*(A)$ a un support de dimension* 0.

(2) *Le foncteur $\mathcal{M}_*$ induit un foncteur entre la catégorie des faisceaux pervers de la forme $\mathcal{F}[\dim(T)]$ avec $\mathcal{F}$ un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse modéré sur T et celle des faisceaux cohérents de $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}$-modules à support fini qui est une équivalence de catégories.*

Démonstration. Un faisceau pervers sur T est de la forme $\mathcal{F}[\dim(T)]$ avec $\mathcal{F}$ un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse modéré sur T si et seulement si ses facteurs simples sont de la forme $\mathcal{L}_\chi[\dim(T)]$ avec χ un caractère à valeurs dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$. D'autre part, d'après 6.1.1 (a), si A est un faisceau pervers irréductible sur T, le support du module $\mathcal{M}_*(A)$ est de dimension zéro si et seulement si A est de la forme $\mathcal{L}_\chi[\dim(T)]$ avec χ un caractère à valeurs dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$. On déduit directement l'équivalence de (i) et (ii) de ces deux faits; elle peut aussi être établie directement (cf. [La3]).

L'équivalence de catégories (2) en résulte, d'après l'équivalence de catégories entre les $\pi_1(T,1)^t$-modules de type fini sur R, pour R l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbf{Q}_\ell$, et les faisceaux lisses constructibles modérés de R-modules, compte tenu du calcul de $\mathscr{M}_*(\mathscr{F}[\dim(T)])$, pour $\mathscr{F}$ un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse constructible modéré sur T, effectué en 4.2.2.4. $\square$

6.2. Variétés associées de $\mathscr{M}_*(A)$. Sous des hypothèses d'existence de résolution des singularités, on a l'énoncé suivant.

THÉORÈME 6.2. *Soit T un tore de dimension n sur k. On suppose que la résolution des singularités et la simplification des idéaux sont valides pour les variétés de dimension $\leqslant n$ définies sur k. Soit A un objet de* $\operatorname{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

(a) *L'ensemble des variétés associées au module cohérent $\mathscr{M}_*(A)$ est l'ensemble de toutes les composantes connexes d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés de $\mathscr{C}(T)$.*

(b) *Pour tout entier r, il existe un unique sous-objet A_r de A tel que $\mathscr{M}_*(A_r)$ soit le sous-module cohérent maximal de $\mathscr{M}_*$ dont le support est de dimension $\leqslant r$.*

Démonstration. On démontre (a) par récurrence sur n, en commençant par supposer que A est irréductible. Il suffit alors de considérer le cas où $\chi(T, A) > 0$. En effet, quand $\chi(T, A) = 0$, d'après le théorème 5.1.1, A est de la forme $\mathscr{L}_\chi \otimes p^*(A')[1]$ avec $p\colon T \to T'$ un quotient propre, A' un faisceau pervers irréductible sur T', et χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$, et dans ce cas, d'après 3.3.1 (d) et 3.3.1 (g), l'énoncé pour A se déduit de celui pour A'.

Supposons donc que $\chi(T, A) > 0$. Par les théorèmes 3.4.3 et 4.1.1′, $\mathscr{M}_*(A)$ est alors isomorphe à un module qui est localement libre de rang strictement positif en dehors d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés de codimension un de $\mathscr{C}(T)$. Notons $\mathscr{M}_*(A)_{\mathrm{tor}}$ le sous-module de torsion maximal de $\mathscr{M}_*(A)$. Le support de $\mathscr{M}_*(A)_{\mathrm{tor}}$ est donc contenu dans un ensemble fini de cotores algébriques translatés de codimension un de $\mathscr{C}(T)$. Si le module $\mathscr{M}_*(A)_{\mathrm{tor}}$ n'était pas réduit à $\{0\}$, on aurait, par le théorème 6.1.2 (a), un sous-objet non nul A' de A tel que $\mathscr{M}_*(A')$ soit de support contenu dans un cotore algébrique translaté propre de $\mathscr{C}(T)$, ce qui contredirait le fait que A soit irréductible. Par suite, les seules variétés associées à $\mathscr{M}_*(A)$ sont les composantes de $\mathscr{C}(T)$.

Dans le cas général, en utilisant une filtration de Jordan-Hölder de A, on déduit du cas irréductible que l'ensemble des variétés associées à $\mathscr{M}_*(A)$ est contenu dans la réunion des ensembles de composantes des membres d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés de $\mathscr{C}(T)$. Soit $p\colon T \to T'$ un tore quotient propre de T et soit χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$.

Il reste à démontrer que, si l'intersection de $\chi \cdot p^\vee\mathscr{C}(T')$ avec une composante connexe de $\mathscr{C}(T)$ est une variété associée, alors toute composante connexe de $\chi \cdot p^\vee\mathscr{C}(T')$ est une variété associée. Mais, d'après 6.1.1 (a), $\operatorname{Supp}\mathscr{M}_*(A_{\chi,T'})$ est la réunion d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés. Comme $\operatorname{Supp}\mathscr{M}_*(A_{\chi,T'})$ est contenu dans $\chi \cdot p^\vee\mathscr{C}(T')$, et que son intersection avec une composante connexe de $\mathscr{C}(T)$ rencontrant $\chi \cdot p^\vee\mathscr{C}(T')$ est égale à celle de $\chi \cdot p^\vee\mathscr{C}(T')$ avec cette composante connexe, on a nécessairement l'égalité

$$\operatorname{Supp}\mathscr{M}_*(A_{\chi,T'}) = \chi \cdot p^\vee\mathscr{C}(T').$$

Démontrons (b) par récurrence sur la longueur de A. Si $\mathscr{M}_*(A)$ a un sous-module cohérent non nul dont le support est de dimension $\leqslant r$, il a, d'après (a), une variété associée de la forme $\chi \cdot p^\vee \mathscr{C}(T')$ de dimension $\leqslant r$. D'après le théorème 6.1.2 (a), il existe un sous-objet non nul de A dont le transformé de Mellin par $\mathscr{M}_*$ a pour support cette variété, et on conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence au quotient de A par ce sous-objet. □

6.3. Support des fibres

Définition 6.3.1. Soit X un schéma et soit K un complexe parfait sur X. Pour tout entier i, on note Supp fib $\mathscr{H}^i(K)$ le fermé

$$\text{Supp fib } \mathscr{H}^i(K) := \{x \in X \mid H^i(K_x \otimes^L_{\mathscr{O}_x} k(x)) \neq 0\},$$

avec $k(x)$ le corps de x.

L'énoncé suivant est probablement bien connu. Nous en donnons une démonstration en appendice (A.4).

PROPOSITION 6.3.2. *Soit X un schéma régulier et soit K un complexe parfait sur X. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *$K \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)^{\geqslant 0}$ (i.e., pour tout $i < 0$, $\mathscr{H}^i(K) = 0$), resp., $K \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)^{\geqslant 0}$ et $\mathscr{H}^0(K)$ est sans torsion.*

(ii) *Pour tout $i > 0$* codim Supp $\mathscr{E}\mathrm{xt}^i(K, \mathscr{O}) \geqslant i$ *(resp., $i+1$).*

(iii) *Pour tout $i > 0$* codim Supp fib $\mathscr{H}^{-i}(K) \geqslant i$ *(resp., $i+1$).*

(iv) *Pour tout $i > 0$* codim Supp fib $\mathscr{H}^i(DK) \geqslant i$ *(resp., $i+1$).*

THÉORÈME 6.3.3. *Soit T un tore de dimension n sur k. On suppose que la résolution des singularités et la simplification des idéaux sont valides pour les variétés de dimension $\leqslant n$ définies sur k. Soit K un objet de $D^b_c(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Pour tout entier i, le fermé* Supp fib $\mathscr{H}^i(\mathscr{M}_*(K))$ *est la réunion d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés de $\mathscr{C}(T)$.*

Démonstration. Comme Supp fib $\mathscr{H}^i(\mathscr{M}_*(K))$ est fermé, il suffit de démontrer qu'il appartient à la sous-algèbre de Boole des ensembles constructibles engendrée par les cotores algébriques translatés.

D'après 3.4.3 et 3.4.1, le module $\mathscr{H}^i(\mathscr{M}_*(K))$ est localement libre en dehors de $\Delta({}^p\mathscr{H}^i(K))$. D'après 4.1.1′, le fermé $\Delta({}^p\mathscr{H}^i(K))$ est contenu dans un fermé Z_i qui est réunion d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés propres de $\mathscr{C}(T)$. On pose $Z := \bigcup_{a \leqslant j \leqslant b} Z_j$ pour a et b tels que K soit dans ${}^pD^{[a,b]}$. En dehors de Z, l'objet $\mathscr{M}_*(K)$ est localement isomorphe à $\bigoplus_j \mathscr{H}^j(\mathscr{M}_*K)[-j]$, les fermés Supp fib $\mathscr{H}^i(\mathscr{M}_*(K))$ et Supp $\mathscr{H}^i(\mathscr{M}_*(K))$ coïncident, et l'intersection de Supp $\mathscr{H}^i(\mathscr{M}_*(K))$ avec $\mathscr{C}(T) - Z$ est, soit vide, soit égale à $\mathscr{C}(T) - Z$ tout entier, d'après 3.4.3. On peut maintenant terminer la démonstration par récurrence sur n. En effet, soit $\chi \cdot p^\vee \mathscr{C}(T')$ un cotore translaté contenu dans Z. On note $j \colon \mathscr{C}(T') \to \mathscr{C}(T)$ le morphisme d'inclusion $\chi \cdot p^\vee$. Comme, par définition, Supp fib $\mathscr{H}^i$ commute à l'image inverse, on a l'égalité

$$j^{-1} \text{ Supp fib } \mathscr{H}^i(\mathscr{M}_*(K)) = \text{Supp fib } \mathscr{H}^i(Lj^*(\mathscr{M}_*(K))),$$

ce qui permet de conclure par récurrence, car on a un isomorphisme

$$Lj^*(\mathscr{M}_*(K)) \simeq \mathscr{M}_*(Rp_*(K \otimes \mathscr{L}_\chi))$$

d'après 3.3.1 (c) et (g). □

6.4. Compléments sur $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}$ *et stabilité par image directe.* On a la description suivante des objets de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

PROPOSITION 6.4.1. *Soit T un tore de dimension n sur k. Soit A un objet de* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

(1) *Si les modules $\mathscr{M}_*(A)$ et $\mathscr{M}_*(D(A))$ sont sans torsion alors A est un objet de* $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

(2) *Réciproquement, si A est un objet de* $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, *les sous-modules de torsion maximaux de $\mathscr{M}_*(A)$ et de $\mathscr{M}_*(D(A))$ ont un support partout de codimension $\geqslant 2$. Si on suppose de plus que la résolution des singularités et la simplification des idéaux sont valides pour les variétés de dimension $\leqslant n$ définies sur k, alors les modules $\mathscr{M}_*(A)$ et $\mathscr{M}_*(D(A))$ sont sans torsion.*

Démonstration. Démontrons (1). Soit A un objet de $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ tel que $\mathscr{M}_*(A)$ soit sans torsion. Soit B un sous-objet de A appartenant à $S(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$; d'après 3.6.3, $\mathscr{M}_*(B)$ est un sous-module de torsion de $\mathscr{M}_*(A)$. On a donc $\mathscr{M}_*(B) = 0$, ce qui, par 3.4.6, entraîne que B est nul. On a donc $A_t = 0$. Dualement, si $\mathscr{M}_*(D(A))$ est sans torsion, A^t est nul.

Démontrons (2). D'après 4.1.1 et 3.4.3, dans chaque composante irréductible de $\mathscr{C}(T)$, le faisceau cohérent $\mathscr{M}_*(A)$ est localement libre en dehors d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés de codimension un et d'un fermé de codimension au moins 2. Si le support du sous-module de torsion maximal de $\mathscr{M}_*(A)$ n'était pas partout de codimension au moins 2, il existerait un tore quotient propre $p\colon T \to T'$, un point fermé χ de $\mathscr{C}(T)$, et un sous-module non nul $\mathscr{M}$ de $\mathscr{M}_*(A)$ de support contenu dans $\chi \cdot p^\vee \mathscr{C}(T')$. D'après 6.1.2 (b), il existerait alors un sous-objet B non nul de A tel que le support de $\mathscr{M}_*(B)$ soit contenu dans $\chi \cdot p^\vee \mathscr{C}(T')$, ce qui contredirait l'hypothèse. Sous l'hypothèse de résolution des singularités, le sous-objet A_{n-1} de A donné par le théorème 6.2 (b) est nul, ce qui prouve que $\mathscr{M}_*(A)$ est sans torsion. On raisonne de même pour $\mathscr{M}_*(D(A))$. □

LEMME 6.4.2. *Soit $\pi\colon T \to T'$ un morphisme de tores. Soit A un objet de $S(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ tel que le morphisme canonique $R\pi_!(A) \to R\pi_*(A)$ soit un isomorphisme. Alors $R\pi_!(A)$ est un objet de $S(T', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.*

Démonstration. D'après le lemme 2.4, $R\pi_!(A)$ est pervers. L'énoncé résulte donc de ce que, d'après le théorème 3.4.3, un faisceau pervers B est dans $S(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ si et seulement $\chi(T, B) = 0$, et de ce que on a $\chi(T', R\pi_!(A)) = \chi(T, A)$. □

THÉORÈME 6.4.3. *Soit T un tore de dimension n sur k. On considère un isomorphisme de tores $T \simeq T' \times T''$. On note p_i les projections. On suppose que la résolution des singularités et la simplification des idéaux sont valides pour les variétés de dimension $\leqslant n$ définies sur k. Soit A un objet de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Alors, il existe un fermé Z de $\mathscr{C}(T'')$, réunion d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés propres de $\mathscr{C}(T'')$, tel que, pour tout point fermé χ n'appartenant pas à Z, le morphisme canonique $Rp_{1!}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi)) \to Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi))$ soit un isomorphisme et $Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi))$ soit un objet de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.*

Démonstration. Commençons par remarquer qu'il suffit de démontrer qu'il existe un fermé $W(A)$ de $\mathscr{C}(T'')$, réunion d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés propres de $\mathscr{C}(T'')$, tel que, pour tout point fermé χ n'appartenant pas à $W(A)$, le morphisme canonique $Rp_{1!}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi)) \to Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi))$ soit un isomorphisme et tel que $\mathscr{M}_*(Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi))$ soit (isomorphe à) un module sans torsion. En effet, le fermé $Z = W(A) \cup \mathrm{inv}(W(DA))$ convient alors, d'après 6.4.1, vu que, pour χ n'appartenant pas à Z, on a les isomorphismes

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_*(D(Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi)))) &\simeq \mathscr{M}_*(Rp_{1!}D(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi)))\\ &\simeq \mathscr{M}_*(Rp_{1!}(DA \otimes p_2^*(\mathscr{L}_{\chi^{-1}})))\\ &\simeq \mathscr{M}_*(Rp_{1*}(DA \otimes p_2^*(\mathscr{L}_{\chi^{-1}}))),\end{aligned}$$

et que le dernier objet est par hypothèse (isomorphe à) un module sans torsion.

Démontrons l'existence de $W(A)$. D'après le théorème 4.7.3′ et la remarque qui le suit, il existe un fermé W_1, réunion d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés propres de $\mathscr{C}(T'')$, tel que pour tout point fermé χ de $\mathscr{C}(T'')$ n'appartenant pas à W_1, le morphisme canonique

$$Rp_{1!}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi)) \to Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi))$$

soit un isomorphisme. D'après 6.3.2, 6.3.3 et 6.4.1, pour $i > 0$, Supp fib $\mathscr{H}^{-i}(\mathscr{M}_*A)$ est une réunion finie de cotores algébriques translatés de codimension $\geqslant i+1$. (On peut appliquer 6.3.2, car d'après 3.3.2, les composantes connexes de $\mathscr{C}(T)$ sont des schémas réguliers.) Soit W_2 le fermé image par la projection $\varphi\colon \mathscr{C}(T) \to \mathscr{C}(T'')$ de tous ces cotores algébriques translatés, pour i variable, qui ne se projettent pas sur $\mathscr{C}(T'')$. On pose $W(A) = W_1 \cup W_2$. Pour terminer la démonstration, il suffit de vérifier que, pour χ n'appartenant pas à W_2, le complexe $\mathscr{M}_*(Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi))$ vérifie les conditions de 6.3.2.

Soit χ un point fermé de $\mathscr{C}(T'')$ n'appartenant pas à W_2. Soit $j\colon \varphi^{-1}(\chi) \to \mathscr{C}(T)$ l'inclusion de la fibre de χ. On a un isomorphisme naturel $\varphi^{-1}(\chi) \simeq \mathscr{C}(T')$

qui permet d'identifier $\mathcal{M}_*(Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathcal{L}_\chi)$ à $Lj^*(\mathcal{M}_*(A))$, d'après 3.3.1 (c) et 3.3.1 (g). On a

$$\begin{aligned}\text{Supp fib } \mathcal{H}^{-i}(Lj^*(\mathcal{M}_*A)) &= j^{-1}(\text{Supp fib } \mathcal{H}^{-i}(\mathcal{M}_*A)) \\ &= \varphi^{-1}(\chi) \cap \text{Supp fib } \mathcal{H}^{-i}(\mathcal{M}_*A).\end{aligned}$$

Par conséquent, comme au voisinage de $\varphi^{-1}(\chi)$, Supp fib $\mathcal{H}^{-i}(\mathcal{M}_*A)$ est soit vide, soit composé de cotores algébriques translatés qui se projettent sur $\mathscr{C}(T'')$ par φ, on a $\operatorname{codim}_{\mathscr{C}(T'')}\text{Supp fib } \mathcal{H}^{-i}(\mathcal{M}_*(Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathcal{L}_\chi)))) \geqslant \operatorname{codim}_{\mathscr{C}(T)}\text{Supp fib } \mathcal{H}^{-i}(\mathcal{M}_*(A))$, ce qui donne le résultat par 6.3.2. □

Sans hypothèse de résolution des singularités on a un résultat similaire pour ω-presque tout χ dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, au sens de 5.2.4, quand T' est de dimension 1.

PROPOSITION 6.4.4. *Soit T un tore de dimension n sur k. On considère un isomorphisme de tores $T \simeq T' \times T''$ avec T' de dimension 1. On note p_i les projections. Soit A un objet de* $\operatorname{Perv}_{\text{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. *Pour ω-presque tout χ dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, le morphisme canonique $Rp_{1!}(A \otimes p_2^*(\mathcal{L}_\chi)) \to Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathcal{L}_\chi))$ est un isomorphisme et $Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathcal{L}_\chi))$ est un objet de* $\operatorname{Perv}_{\text{int}}(T', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.

Démonstration. Soit Z le complémentaire de l'ouvert maximal sur lequel $\mathcal{M}_*(A)$ et $\operatorname{inv}^*(\mathcal{M}_*(D(A)))$ sont (isomorphes à des modules) localement libres. D'après la proposition 6.4.1, Z est un fermé partout de codimension $\geqslant 2$ dans $\mathscr{C}(T)$, car un module cohérent sans torsion est localement libre en dehors d'un fermé de codimension $\geqslant 2$. D'après la proposition 4.7.2, il existe un fermé Z', partout de codimension $\geqslant 1$ dans $\mathscr{C}(T'')$, formé des χ tels que le morphisme canonique $Rp_{1!}(A \otimes p_2^*(\mathcal{L}_\chi)) \to Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathcal{L}_\chi))$ ne soit pas un isomorphisme. Notons φ le morphisme $\mathscr{C}(T) \to \mathscr{C}(T'')$. Comme Z est partout de codimension $\geqslant 2$ dans $\mathscr{C}(T)$, d'après le lemme 5.2.5, pour ω-presque tout χ dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, l'intersection $\varphi^{-1}(\chi) \cap Z$ est vide, et de plus on peut imposer que χ n'appartient pas à Z'. On en tire, par la proposition 6.4.1, l'énoncé recherché, car pour de tels χ les modules $\mathcal{M}_*(Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathcal{L}_\chi)))$ et $\mathcal{M}_*(D(Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathcal{L}_\chi))))$ sont localement libres. En effet, notons $j\colon \varphi^{-1}(\chi) \to \mathscr{C}(T)$ l'inclusion de la fibre de χ. On a un isomorphisme naturel $\varphi^{-1}(\chi) \simeq \mathscr{C}(T')$ qui permet d'identifier $\mathcal{M}_*(Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathcal{L}_\chi)))$ à $Lj^*(\mathcal{M}_*(A))$, d'après 3.3.1 (c) et 3.3.1 (g), ce qui donne que, pour de tels χ, $\mathcal{M}_*(Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathcal{L}_\chi)))$ est localement libre. De même, pour de tels χ, on a des isomorphismes

$$\begin{aligned}Lj^*(\operatorname{inv}^*(\mathcal{M}_*(D(A)))) &\simeq \operatorname{inv}^*\mathcal{M}_*(Rp_{1*}(D(A \otimes p_2^*(\mathcal{L}_\chi)))) \\ &\simeq \operatorname{inv}^*\mathcal{M}_*(D(Rp_{1!}(A \otimes p_2^*(\mathcal{L}_\chi)))) \\ &\simeq \operatorname{inv}^*\mathcal{M}_*(D(Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathcal{L}_\chi)))),\end{aligned}$$

ce qui donne bien que, pour de tels χ, $\mathscr{M}_*(D(Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi))))$ est localement libre. $\square$

Corollaire 6.4.5. *Soit T un tore de dimension n sur k. On considère un isomorphisme de tores $T \simeq T' \times T''$ avec T' de dimension* 1. *On note p_i les projections. Soit A un objet de* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. *Pour ω-presque tout χ dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a un isomorphisme canonique dans* $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$

$$(Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi)))_{\mathrm{int}} \simeq Rp_{1*}(A_{\mathrm{int}} \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi)).$$

Démonstration. Soit A un objet de $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. D'après 6.4.4, il suffit de démontrer que, pour ω-presque tout χ dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a un isomorphisme

$$(Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi)))_{\mathrm{int}} \simeq (Rp_{1*}(A_{\mathrm{int}} \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi)))_{\mathrm{int}}.$$

D'après le lemme 6.4.2 et le corollaire 2.3.2, si C est un objet de $S(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, pour ω-presque tout χ dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, $Rp_{1*}(C \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi))$ est un objet de $S(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. En utilisant la suite exacte de faisceaux pervers,

$$0 \to A_t \to A \to A/A_t \to 0,$$

on en tire que, pour ω-presque tout χ dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, les objets $Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi))$ et $Rp_{1*}((A/A_t) \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi))$ sont des faisceaux pervers et qu'on a un isomorphisme canonique dans $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$

$$(Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi)))_{\mathrm{int}} \simeq (Rp_{1*}((A/A_t) \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi)))_{\mathrm{int}}.$$

De même, on tire de la suite exacte

$$0 \to A^t/A^t \cap A_t \to A/A_t \to A/A^t + A_t \to 0,$$

que, pour ω-presque tout χ dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, $Rp_{1*}((A^t/A^t \cap A_t) \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi))$ est un faisceau pervers et qu'on a un isomorphisme canonique dans $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$

$$(Rp_{1*}((A/A_t) \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi)))_{\mathrm{int}} \simeq (Rp_{1*}((A^t/A^t \cap A_t) \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi)))_{\mathrm{int}},$$

ce qui donne le résultat par la définition de A_{int}. $\square$

Corollaire 6.4.6. *Soit T un tore de dimension n sur k. On considère un isomorphisme de tores $T \simeq T' \times T''$ avec T' de dimension* 1. *On note p_i les projections. Soient A et B des objets de* $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. *Pour ω-presque tout χ dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a un isomorphisme canonique dans* $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$

$$Rp_{1*}((A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi)) *_{\mathrm{int}} (B \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi)))$$
$$\simeq Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi)) *_{\mathrm{int}} Rp_{1*}(B \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi)).$$

Démonstration. Pour ω-presque tout χ dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, d'après la proposition 6.4.4, les complexes $Rp_{1*}(A \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi))$ et $Rp_{1*}(B \otimes p_2^*(\mathscr{L}_\chi))$ sont des objets de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Le corollaire résulte de ce que, pour ω-presque tout χ dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a les isomorphismes canoniques suivants dans $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$

$$Rp_{1*}(A \otimes p_2^*\mathscr{L}_\chi) *_{\mathrm{int}} Rp_{1*}(B \otimes p_2^*\mathscr{L}_\chi)$$

$$\simeq {}^pH^0(Rp_{1*}(A \otimes p_2^*\mathscr{L}_\chi) *_* Rp_{1*}(B \otimes p_2^*\mathscr{L}_\chi))_{\mathrm{int}} \tag{1}$$

$$\simeq {}^pH^0(Rp_{1*}((A *_* B) \otimes p_2^*\mathscr{L}_\chi))_{\mathrm{int}} \tag{2}$$

$$\simeq {}^pH^0(Rp_{1*}({}^pH^0((A *_* B) \otimes p_2^*\mathscr{L}_\chi)))_{\mathrm{int}} \tag{3}$$

$$\simeq Rp_{1*}({}^pH^0((A *_* B) \otimes p_2^*\mathscr{L}_\chi))_{\mathrm{int}} \tag{4}$$

$$\simeq Rp_{1*}({}^pH^0((A *_* B) \otimes p_2^*\mathscr{L}_\chi)_{\mathrm{int}}) \tag{5}$$

$$\simeq Rp_{1*}({}^pH^0((A \otimes p_2^*\mathscr{L}_\chi) *_* (B \otimes p_2^*\mathscr{L}_\chi))_{\mathrm{int}}) \tag{6}$$

$$\simeq Rp_{1*}((A \otimes p_2^*\mathscr{L}_\chi) *_{\mathrm{int}} (B \otimes p_2^*\mathscr{L}_\chi)). \tag{7}$$

Les isomorphismes (1) et (7) résultent de 3.7.3 et les isomorphismes (2) et (6) résultent de 2.6. L'isomorphisme (3) résulte de ce que le bifoncteur $*_*$ (resp., le foncteur Rp_{1*}) est t-biexact (resp., t-exact) à droite. L'isomorphisme (4) est conséquence de 2.3.2 et 2.4 et (5) de 6.4.5. □

Remarque. En utilisant la théorie des ensembles sous-analytiques rigides développée par L. Lipshitz dans [Li], on peut remplacer "pour ω-presque tout χ dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$" par "pour tout χ dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ dans le complémentaire d'une union dénombrable d'ensembles sous-analytiques rigides partout de codimension $\geqslant 1$" dans 6.4.4, 6.4.5 et 6.4.6.

6.5. *Enveloppe réflexive de $\mathscr{M}_*(A)$*

THÉORÈME 6.5.1. *Soit T un tore de dimension $n \geqslant 0$ sur k. On suppose que la résolution des singularités et la simplification des idéaux sont valides pour les variétés de dimension $\leqslant n$ définies sur k. Soit A un faisceau pervers sur T, tel que $\mathscr{M}_*(A)$ soit (isomorphe à un module) sans torsion. Il existe un monomorphisme de faisceaux pervers $i\colon A \to A'$, avec A' un faisceau pervers sur T, tel que $\mathscr{M}_*(A')$ soit isomorphe à l'enveloppe réflexive de $\mathscr{M}_*(A)$ via le morphisme associé à i.*

Démonstration. Pour tout $\mathscr{O}_{\mathscr{C}(T)}$-module cohérent sans torsion M, on notera $\tilde{M}$ son enveloppe réflexive. Observons que $\tilde{M}$ peut être caractérisé comme étant maximal parmi les $\mathscr{O}_{\mathscr{C}(T)}$-modules cohérents sans torsion N contenant M tels que le support de N/M soit de dimension $\leqslant n-2$.

On utilise le lemme suivant.

LEMME 6.5.2. *Soit T un tore de dimension n sur k. Soit $p\colon T \to T'$ un tore quotient de dimension $n-1$. Soit χ un point fermé de $\mathscr{C}(T)$. Soit f une équation du cotore algébrique translaté $\chi \cdot p^{\vee}\mathscr{C}(T')$ dans $\mathscr{C}(T)$. Pour tout faisceau pervers A sur T il existe un faisceau pervers $f^{-1}A$ et un morphisme $A \to f^{-1}A$ tels que*

$$\mathscr{M}_*(A \to f^{-1}A) \simeq \mathscr{M}_*(A) \to f^{-1}\mathscr{M}_*(A).$$

De plus, on a un isomorphisme

$$\text{Cône}(A \to f^{-1}A) \simeq \text{Cône}(f^{-1}A \to f^{-1}f^{-1}A).$$

Démonstration. Par torsion on se ramène au cas où χ est le caractère trivial. Commençons par considérer le cas $T = \mathbf{G}_{m,k}$ et $A = \delta_{\{1\}}$.

Dans ce cas f est l'équation t de l'origine dans $\mathscr{C}(\mathbf{G}_{m,k})$, et on peut prendre $t^{-1}\delta_{\{1\}} = j_!(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)[1]$ avec $j\colon \mathbf{G}_{m,k} - \{1\} \to \mathbf{G}_{m,k}$ l'inclusion, le morphisme $\delta_{\{1\}} \to t^{-1}\delta_{\{1\}}$ étant le morphisme bord du triangle distingué associé à la suite exacte de faisceaux

$$0 \to j_!(\overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell \to \delta_{\{1\}} \to 0.$$

C'est aussi le premier morphisme de la suite exacte de faisceaux pervers

$$0 \to \delta_{\{1\}} \to j_!(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)[1] \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell[1] \to 0,$$

et on a un isomorphisme

$$\text{Cône}(\delta_{\{1\}} \to t^{-1}\delta_{\{1\}}) \simeq \overline{\mathbf{Q}}_\ell[1].$$

En effet, par 3.4.3 et 3.5.3, $\mathscr{M}_*(j_!(\overline{\mathbf{Q}}_\ell[1]))$ est isomorphe à un module localement libre de rang 1, et, par 3.3.1 (d), $\mathscr{M}_*(\overline{\mathbf{Q}}_\ell[1])$ est isomorphe au module de support l'origine de longueur 1.

Dans le cas général on procède comme suit. On note $i\colon \mathbf{G}_{m,k} \to T$ l'inclusion du noyau de la projection p, et on définit $A \to f^{-1}A$ par

$$A = A *_* i_*(\delta_{\{1\}}) \to f^{-1}A = A *_* i_*(t^{-1}\delta_{\{1\}}),$$

et on obtient le premier énoncé par 3.3.1 (c) et (f).

Pour obtenir le deuxième énoncé, on remarque qu'on a un isomorphisme

$$t^{-1}\delta_{\{1\}} *_* \text{Cône}(\delta_{\{1\}} \to t^{-1}\delta_{\{1\}}) \simeq \text{Cône}(\delta_{\{1\}} \to t^{-1}\delta_{\{1\}})$$

d'après la proposition 6.1.3, les deux termes ayant des transformés isomorphes par $\mathscr{M}_*$. $\square$

Démontrons le théorème 6.5.1. On peut supposer que A n'est pas nul. Par 3.4.3 et 4.1.1′, $\mathscr{M}_*(A)$ est (isomorphe à un module) localement libre en dehors d'un ensemble fini de translatés de cotores algébriques de codimension 1 d'équations $f_1, \ldots, f_m$. D'autre part, d'après 3.4.6, pour tout i, le morphisme $A \to (f_i)^{-1}A$, donné par le lemme 6.5.2, est un monomorphisme. Si, pour tout i, il n'existe pas de sous-module N de $(f_i)^{-1}\mathscr{M}_*(A)$ contenant strictement $\mathscr{M}_*(A)$ et tel que $N/\mathscr{M}_*(A)$ ait un support de dimension $\leqslant n-2$, alors $\mathscr{M}_*(A)$ est égal à son enveloppe réflexive d'après l'observation préliminaire.

On peut donc supposer qu'il existe i et un sous-module N de $(f_i)^{-1}\mathscr{M}_*(A)$ contenant strictement $\mathscr{M}_*(A)$ et tel que $N/\mathscr{M}_*(A)$ ait un support de dimension $\leqslant n-2$. Quitte à agrandir N on peut supposer que N est maximal parmi les modules ayant ces propriétés. D'après le théorème 6.2 (b), il existe un sous-faisceau pervers K de $(f_i)^{-1}A/A$ tel que $\mathscr{M}_*(K) = N/\mathscr{M}_*(A)$. Par produit fibré, on obtient un faisceau pervers $A^{(1)}$ contenant A tel que

$$\mathscr{M}_*(A \to A^{(1)}) \simeq (\mathscr{M}_*(A) \to N).$$

On construit ainsi une suite $A^{(i)}$ dont il reste à montrer qu'elle est stationnaire. Pour cela remarquons que les composants simples des $A^{(i+1)}/A^{(i)}$ sont des composants simples de $(f_{i_1})^{-1} \cdots (f_{i_k})^{-1}A/A$ pour $i_1, \ldots, i_k$ convenables dans $\{1, \ldots, m\}$. On tire de la dernière assertion du lemme 6.5.2 que les composants simples des $(f_{i_1})^{-1} \cdots (f_{i_k})^{-1}A$ appartiennent à l'ensemble fini des composants simples des $(f_{j_1})^{-1} \cdots (f_{j_r})^{-1}A$, $\{j_1, \ldots, j_r\}$ décrivant l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, m\}$. Si la suite des $A^{(i)}$ n'était pas stationnaire, les composants simples des $A^{(i+1)}/A^{(i)}$ prendraient une infinité de fois la même valeur, ce qui contredirait la cohérence de $\tilde{M}$ pour $M = \mathscr{M}_*(A)$, d'après 3.4.6. □

7. Le cône de $\mathscr{M}_! \to \mathscr{M}_*$

7.1. Le foncteur $\Delta\mathscr{M}$. On note $\Delta\mathscr{M}$ le foncteur exact

$$\Delta\mathscr{M}\colon D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to D_{\mathrm{coh}}^b(\mathscr{C}(T))$$

qui, à un objet K de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, associe le cône du morphisme canonique $\mathscr{M}_!(K) \to \mathscr{M}_*(K)$. (En général le cône d'un morphisme dans une catégorie triangulée est défini à isomorphisme non unique près, mais on peut le rigidifier dans les cas considérés ici en travaillant dans les topos de [D1, (4.3.4)]. On a $\Delta\mathscr{M}(K) = R\Gamma(\overline{T} \bmod T, j_!(K \otimes \mathscr{L}_T))[1]$ pour une compactification $j\colon T \hookrightarrow \overline{T}$ et on construit un système transitif d'isomorphismes entre les foncteurs associés aux diverses compactifications.) Par définition, pour tout K dans $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, le support de $\Delta\mathscr{M}(K)$ est égal à $\Delta(K)$.

Proposition 7.1.1. *Soit A un objet de* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. *En dehors d'un fermé partout de codimension $\geqslant 2$ de $\mathscr{C}(T)$, l'objet $\Delta\mathscr{M}(A)$ est concentré en degré* 0 *et est isomorphe à un module de torsion.*

Démonstration. Comme $\mathscr{H}^i(\mathscr{M}_*(A)) = 0$ pour $i \neq 0$ d'après 3.4.2, on a, pour tout $i > 0$, un isomorphisme $\mathscr{H}^i(\Delta\mathscr{M}(A)) \simeq \mathscr{H}^{i+1}(\mathscr{M}_!(A))$. D'autre part, $\mathscr{M}_!(A)$ étant, d'après 3.3.1 (b), isomorphe au dual (total) d'un module cohérent, le support de $\mathscr{H}^{i+1}(\mathscr{M}_!(A))$ est partout de codimension au moins $i+1$ (cf. 6.3.2); de plus, d'après 3.3.4, le support de $\Delta\mathscr{M}(A)$ est partout de codimension $\geqslant 1$. Il reste donc à démontrer que $\mathscr{H}^{-1}(\Delta\mathscr{M}(A)) = 0$. Pour cela on remarque que $\mathscr{H}^{-1}(\Delta\mathscr{M}(A))$ est un sous-objet du faisceau $\mathscr{H}^0(\mathscr{M}_!A)$, qui est sans torsion, étant isomorphe, d'après 3.3.1 (b) au dual (naïf) du faisceau $\mathrm{inv}^*\mathscr{H}^0(\mathscr{M}_*(DA))$. □

Pour A un objet de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, $\Delta\mathscr{M}(A)$ a un support partout de codimension au moins 1, d'après 3.3.4. On note $\mathrm{Div}\,\Delta\mathscr{M}(A)$ le diviseur qui lui est associé (cf. [KnM]) dans $\mathscr{C}(T)$. Quand A est pervers, la proposition précédente donne que le diviseur $\mathrm{Div}\,\Delta\mathscr{M}(A)$ est effectif et que son support est égal à la réunion des composantes irréductibles de codimension 1 du support de $\Delta\mathscr{M}(A)$. De plus, on peut alors parler du type de $\Delta\mathscr{M}(A)$ au point générique η d'une composante irréductible de codimension 1 de son support (i.e., la suite d'entiers $(a_1, \dots, a_k)$ telle que $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_k > 0$ et $\mathscr{H}^0(\Delta\mathscr{M}(A))_\eta \simeq \bigoplus_i \mathscr{O}_{\mathscr{C}(T),\eta}/(\pi^{a_i})$, π étant une uniformisante de $\mathscr{O}_{\mathscr{C}(T),\eta}$).

7.2. *Le résultat principal.* Le résultat principal de cette section est le suivant.

THÉORÈME 7.2.1. *Soit A un objet de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$.*

(1) *Le diviseur* $\mathrm{Div}\,\Delta\mathscr{M}(A)$ *est de la forme*

$$\mathrm{Div}\,\Delta\mathscr{M}(A) = \sum a_{\chi,T'}\chi \cdot p^\vee\mathscr{C}(T')$$

avec $a_{\chi,T'}$ des entiers presque tous nuls, χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$ et $p\colon T \to T'$ des tores quotients de dimension $n-1$ de T. De plus, la réunion des composantes irréductibles de codimension 1 du support de $\Delta\mathscr{M}(A)$ est exactement la réunion d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés de dimension $n-1$ de $\mathscr{C}(T)$.

(2) *Si A est pervers et si $\chi \cdot p^\vee\mathscr{C}(T')$ est un cotore algébrique translaté de codimension 1 contenu dans le support de $\Delta\mathscr{M}(A)$, le type de $\Delta\mathscr{M}(A)$ au point générique d'une composante connexe de $\chi \cdot p^\vee\mathscr{C}(T')$ est indépendant de la composante connexe.*

Démonstration. Pour (1) commençons par remarquer qu'il suffit de traiter le cas où A est pervers. En effet, si on remplace les catégories $\mathrm{M}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{C}(T))$ et $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{C}(T))$ par leurs localisées par rapport à la sous-catégorie épaisse des objets de support de codimension au moins 2 (cf. 3.6), le foncteur $\Delta\mathscr{M}$ devient t-exact d'après la proposition 7.1.1.

Supposons donc que A est pervers. Le point clé est l'énoncé de prolongement suivant qui sera démontré dans le prochain numéro.

PROPOSITION 7.2.2. *Soit A un objet de* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. *Soit χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$ et soit $p\colon T \to T'$ un tore quotient de dimension $n-1$. S'il existe une composante* *connexe C de $\mathscr{C}(T)$ telle que l'intersection du support $\Delta(A)$ de $\Delta\mathscr{M}(A)$ avec C contienne $(\chi \cdot p^\vee\mathscr{C}(T')) \cap C$ et si $(\chi \cdot p^\vee\mathscr{C}(T')) \cap C$ n'est pas vide, alors $\Delta(A)$ contient $\chi \cdot p^\vee\mathscr{C}(T')$. De plus, le type de $\Delta\mathscr{M}(A)$ au point générique d'une composante connexe de $\chi \cdot p^\vee\mathscr{C}(T')$ est indépendant de la composante connexe.*

Pour obtenir le théorème à partir de la proposition, il reste à établir que l'ensemble des translatés de cotores de dimension $n-1$ contenus dans $\Delta(A)$ est fini. On peut supposer que la dimension n de T est strictement positive, le cas $n=0$ étant clair. On fixe un isomorphisme de tores $T \simeq T' \times S$ avec S de dimension 1. On note p_i les projections et φ la projection $\mathscr{C}(T) \to \mathscr{C}(S)$ associée à l'immersion de S dans T. Pour χ un point fermé de $\mathscr{C}(S)$ tel que le morphisme canonique $Rp_{1!}(A \otimes p_2^*\mathscr{L}_\chi) \to Rp_{1*}(A \otimes p_2^*\mathscr{L}_\chi)$ est un isomorphisme, on a $\varphi^{-1}(\chi) \cap \Delta(A) \simeq \Delta(Rp_{1*}(A \otimes p_2^*\mathscr{L}_\chi))$ d'après 3.3.4 (iii). Pour un tel χ, le fermé $\varphi^{-1}(\chi) \cap \Delta(A)$ est de codimension au moins 1 dans toutes les composantes connexes de $\varphi^{-1}(\chi)$, et, en raisonnant par récurrence sur n, on peut supposer que la réunion des composantes irréductibles de dimension $n-2$ de $\varphi^{-1}(\chi) \cap \Delta(A)$ dans $\varphi^{-1}(\chi)$ est contenue dans la réunion d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés de dimension $n-2$ de $\varphi^{-1}(\chi)$. L'ensemble F des χ exceptionnels est fini, d'après 2.3.2. Fixons un χ non exceptionnel. Soit $\psi \cdot p^\vee\mathscr{C}(T'')$ un cotore algébrique translaté de dimension $n-1$ contenu dans $\Delta(A)$. Si $T'' = T'$, alors ψ appartient nécessairement à l'ensemble fini F modulo $\mathscr{C}(T'')$. Si $T'' \neq T'$, alors $\psi \cdot p^\vee\mathscr{C}(T'')$ a une intersection non vide avec $\varphi^{-1}(\chi)$. Par l'hypothèse de récurrence et la proposition 7.2.2, il existe un ensemble fini G de composantes connexes de $\varphi^{-1}(\chi)$ tel que tout cotore algébrique translaté de dimension $n-2$ contenu dans $\varphi^{-1}(\chi) \cap \Delta(A)$ ait une intersection non vide avec une composante connexe appartenant à G. Soit H l'ensemble des composantes connexes de $\mathscr{C}(T)$ contenant les composantes connexes appartenant à G. On obtient donc que tout cotore algébrique translaté de dimension $n-1$ contenu dans $\Delta(A)$ est contenu dans $\varphi^{-1}(F)$ ou a une intersection non vide avec une composante connexe appartenant à H. On conclut en utilisant le théorème 4.1.1. □

7.3. Lien avec les cycles proches. Soit S un sous-tore de dimension 1 de T et soit T/S le tore quotient. On note i_S l'inclusion $S \to T$ et $p\colon T \to T/S$ le morphisme quotient. Soit $\bar{S}$ une compactification propre et lisse de S. (On a $\bar{S} \simeq \mathbf{P}^1_k$ mais on ne choisit pas un tel isomorphisme pour l'instant.) On écrit $\bar{S} - S = \{a, b\}$. On note $\overline{T}$ la compactification partielle associée à $\bar{S}$: on a une projection $\bar{p}\colon \overline{T} \to T/S$ prolongeant p, et $\overline{T} - T$ est la somme disjointe de deux diviseurs lisses isomorphes à T/S notés $\bar{a}$ et $\bar{b}$, correspondant respectivement à a et à b. On note $j\colon T \to \overline{T}$ et $i\colon \overline{T} - T \to \overline{T}$ les morphismes d'inclusion.

A tout objet A de $D^b_c(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, on associe comme en 4.3, un complexe de $\mathscr{O}_{\mathscr{C}(T)}$-modules à cohomologie bornée cohérente noté

$$\Delta\mathscr{M}_S(A) := R\Gamma(\overline{T} - T, i^*Rj_*(A \otimes \mathscr{L}_T)).$$

Plus précisément, pour R dans $\mathscr{R}$ et A un objet de $D^b_c(T, R)$, l'objet $R\Gamma(\overline{T} - T,$

$i^*Rj_*(A \otimes_R^L L_T))$ est un complexe de $R[[\pi_1(T)_\ell]]$-modules à cohomologie bornée cohérente. On a ainsi un foncteur $D_c^b(T,R) \to D_{\mathrm{coh}}^b(R[[\pi_1(T)_\ell]])$. En procédant comme en 3.3, on en déduit un foncteur $D_c^b(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to D_{\mathrm{coh}}^b(\mathscr{C}(T)_\ell)$, et, en tordant par $\mathscr{L}_\chi$ pour χ dans $\mathscr{C}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)_f$, un foncteur $D_c^b(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to D_{\mathrm{coh}}^b(\mathscr{C}(T))$.

Pour $x = a, b$, on définit de même

$$\Delta\mathscr{M}_{S,x}(A) := R\Gamma(\overline{x}, i^*Rj_*(A \otimes \mathscr{L}_T)).$$

On a un isomorphisme canonique

$$\Delta\mathscr{M}_S(A) \simeq \Delta\mathscr{M}_{S,a}(A) \oplus \Delta\mathscr{M}_{S,b}(A).$$

Proposition 7.3.1. *Pour tout objet A de $D_c^b(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, il existe un morphisme canonique $\Delta\mathscr{M}(A) \to \Delta\mathscr{M}_S(A)$, qui est un isomorphisme en dehors d'un sous-schéma fermé d'intérieur vide dans les fibres (au dessus des points fermés) de $i_S^\vee : \mathscr{C}(T) \to \mathscr{C}(S)$.*

Démonstration. Avec des notations similaires aux précédentes, l'objet $\Delta\mathscr{M}_S(A)$ est naturellement isomorphe au cône du morphisme

$$R\Gamma(\overline{T}, Rj_!(A \otimes \mathscr{L}_T)) \to R\Gamma(\overline{T}, Rj_*(A \otimes \mathscr{L}_T)),$$

tandis que d'autre part, on a un morphisme canonique

$$\mathscr{M}_!(A) = R\Gamma_c(T, A \otimes \mathscr{L}_T) \to R\Gamma(\overline{T}, Rj_!(A \otimes \mathscr{L}_T))$$

et un isomorphisme canonique

$$\mathscr{M}_*(A) = R\Gamma(T, A \otimes \mathscr{L}_T) \to R\Gamma(\overline{T}, Rj_*(A \otimes \mathscr{L}_T)).$$

Ceci permet de construire le morphisme canonique $\alpha : \Delta\mathscr{M}(A) \to \Delta_S\mathscr{M}(A)$, qui s'identifie au morphisme de restriction

$$R\Gamma(\overline{\overline{T}} \bmod T, k_!j_!(A \otimes \mathscr{L}_T))[1] \to R\Gamma(\overline{T} \bmod T, j_!(A \otimes \mathscr{L}_T))[1]$$

pour une compactification $k\colon \overline{T} \hookrightarrow \overline{\overline{T}}$. De plus, en considérant le diagramme

$$R\Gamma_c(\overline{T}, Rj_!(A \otimes \mathscr{L}_T)) \xrightarrow{\beta} R\Gamma(\overline{T}, Rj_!(A \otimes \mathscr{L}_T)) \to R\Gamma(\overline{T}, Rj_*(A \otimes \mathscr{L}_T))$$

et en utilisant l'axiome de l'octaèdre, on obtient que le cône du morphisme α est isomorphe à $\mathrm{Cône}(\beta)[1]$.

Il reste à vérifier que, pour tout point fermé χ de $\mathscr{C}(S)$, le support de ce cône est partout d'intérieur vide dans la fibre $i_S^{\vee-1}(\chi)$. Par torsion de A par un faisceau de Kummer, on se ramène à vérifier cela lorsque χ est le caractère trivial. Dans ce cas, la fibre s'identifie canoniquement à $\mathscr{C}(T/S)$, et on a, d'après 3.3.1 (c), un isomorphisme canonique

$$R\Gamma_c(\overline{T}, Rj_!(A \otimes \mathscr{L}_T)) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{C}(T)}}^L \mathscr{O}_{\mathscr{C}(T/S)} \simeq \mathscr{M}_!(Rp_!(A)).$$

On a de même un isomorphisme canonique

$$R\Gamma(\overline{T}, Rj_!(A \otimes \mathscr{L}_T)) \otimes^L_{\mathcal{O}_{\mathscr{C}(T)}} \mathcal{O}_{\mathscr{C}(T/S)} \simeq \mathscr{M}_*(Rp_!(A)).$$

En effet, il sufffit de vérifier que, pour R dans $\mathscr{R}$ et pour A objet de $D^b_c(T, R)$, on a un isomorphisme canonique

$$R\Gamma(\overline{T}, Rj_!(A \otimes^L_R L_T)) \otimes^L_{\Omega_T} \Omega_{T/S} \simeq \mathscr{M}^R_*(Rp_!(A)).$$

Pour cela, on remarque que, comme $\bar{p}$ est propre, on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} R\Gamma(\overline{T}, Rj_!(A \otimes^L_R L_T)) &\simeq R\Gamma(T/S, R\bar{p}_* Rj_!(A \otimes^L_R L_T)) \\ &\simeq R\Gamma(T/S, R\bar{p}_! Rj_!(A \otimes^L_R L_T)) \\ &\simeq R\Gamma(T/S, Rp_!(A \otimes^L_R L_T)), \end{aligned}$$

et on termine comme dans la preuve de 3.1.3 (c). De plus, au morphisme canonique

$$R\Gamma_c(\overline{T}, Rj_!(A \otimes \mathscr{L}_T)) \otimes^L_{\mathcal{O}_{\mathscr{C}(T)}} \mathcal{O}_{\mathscr{C}(T/S)} \to R\Gamma(\overline{T}, Rj_!(A \otimes \mathscr{L}_T)) \otimes^L_{\mathcal{O}_{\mathscr{C}(T)}} \mathcal{O}_{\mathscr{C}(T/S)}$$

correspond le morphisme canonique

$$\mathscr{M}^R_!(Rp_!(A)) \to \mathscr{M}^R_*(Rp_!(A)),$$

et on peut conclure par 3.3.4. □

On choisit un isomorphisme de tores $T \simeq T/S \times S$, et donc un isomorphisme $\overline{T} \simeq T/S \times \overline{S}$, et on note les projections p_1 et p_2. Pour x dans $\{a, b\}$, on peut identifier $\bar{x}$ à T/S. Soit η un point générique du localisé strict de $\overline{S}$ en x. On choisit une clôture séparable $k(\bar{\eta})$ de $k(\eta)$ et un isomorphisme de foncteurs fibres $V_{\bar{\eta}} \simeq V_1$ sur la catégorie des revêtements étales modérés de S.

Soit R un anneau local régulier complet et de corps résiduel de caractéristique ℓ première à p et soit A un objet de $D^b_c(T, R)$. On note $R\psi_{\eta, p_2}(A)$ (resp., $R\psi^{\text{pro-}\ell}_{\eta, p_2}(A)$) le complexe des cycles proches (resp., pro-ℓ) de A en η relativement à p_2. On notera $R\psi^{\text{pro-}\ell, \text{op}}_{\eta, p_2}(A)$ le même objet avec l'action opposée de Gal $(\bar{\eta} | \eta)$.

Soit M un $R[[\pi_1(T/S)_\ell]]$-module de type fini muni d'une action continue de $\pi_1(S)_\ell$. Comme on a un isomorphisme canonique

$$(R[[\pi_1(T/S)_\ell]])[[\pi_1(S)_\ell]] \simeq R[[\pi_1(T)_\ell]]$$

on peut munir M d'une structure de $R[[\pi_1(T)_\ell]]$-module que l'on note $M\tilde{}$.

On note π (resp., q) le morphisme canonique de topos $\bar{x} \times \eta \to \bar{x} \simeq T/S$ (resp., $\bar{x} \times \eta \to \eta$). On considère l'objet $R\psi_{\eta,p_2}^{\text{pro-}\ell,\text{op}}(A) \otimes_R^L \pi^* L_{T/S}$ dans $D_c^b(\bar{x} \times \eta, R[[\pi_1(T/S)_\ell]])$.

Pour tout entier i, $R^i q_*(R\psi_{\eta,p_2}^{\text{pro-}\ell,\text{op}}(A) \otimes_R^L \pi^* L_{T/S})$ est un $R[[\pi_1(T/S)_\ell]]$-module de type fini muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}|\eta)$, et donc aussi d'une action continue de $\pi_1(S)_\ell$ par le choix précédent de l'isomorphisme de foncteurs-fibres. On peut donc considérer les $R[[\pi_1(T)_\ell]]$-modules $(R^i q_*(R\psi_{\eta,p_2}^{\text{pro-}\ell,\text{op}}(A) \otimes_R^L \pi^* L_{T/S}))^{\sim}$.

PROPOSITION 7.3.2. *Soit R un anneau local régulier complet et de corps résiduel de caractéristique ℓ première à p. Soit A un objet de $D_c^b(T, R)$. On a pour tout entier i un isomorphisme canonique de $R[[\pi_1(T)_\ell]]$-modules*

$$H^i(\bar{x}, i^* Rj_*(A \otimes_R^L L_T)) \simeq (R^{i-1} q_*(R\psi_{\eta,p_2}^{\text{pro-}\ell,\text{op}}(A) \otimes_R^L \pi^* L_{T/S}))^{\sim} \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \pi_1(S)_\ell^\vee.$$

Démonstration. Posons $B := A \otimes_R^L p_1^*(L_{T/S})$ et $\Omega_{T/S} = R[[\pi_1(T/S)_\ell]]$. Soit L_S le $R[[\pi_1(S)_\ell]]$-faisceau lisse constructible associé à S et à R (3.1). Posons $L_{\Omega_{T/S},S} := \Omega_{T/S} \otimes_R^L L_S$. C'est aussi le $\Omega_{T/S}[[\pi_1(S)_\ell]]$-faisceau lisse constructible associé à S et à $\Omega_{T/S}$. On a un isomorphisme canonique

$$L_T \simeq p_1^* L_{T/S} \otimes_{\Omega_{T/S}}^L p_2^* L_{\Omega_{T/S},S},$$

d'où l'on tire, par A.1.4, un isomorphisme canonique

$$A \otimes_R^L L_T \simeq B \otimes_{\Omega_{T/S}}^L p_2^* L_{\Omega_{T/S},S}.$$

Comme en 4.2.2 on note $L_{\Omega_{T/S},\pi_1(S)_\ell}$ le $\Omega_{T/S}$-module $\Omega_{T/S}[[\pi_1(S)_\ell]]$ muni de l'action canonique de $\pi_1(S)_\ell$ par translation multiplicative. Il est donc aussi muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}|\eta)$. Pour tout objet C de $D_c^b(T, \Omega_{T/S})$, on a un isomorphisme canonique

$$R\psi_{\eta,p_2}^{\text{pro-}\ell}(C \otimes_{\Omega_{T/S}}^L p_2^* L_{\Omega_{T/S},S}) \simeq R\psi_{\eta,p_2}^{\text{pro-}\ell}(C) \otimes_{\Omega_{T/S}}^L L_{\Omega_{T/S},\pi_1(S)_\ell}.$$

En prenant $C = B$ on en tire un isomorphisme canonique

$$R\psi_{\eta,p_2}^{\text{pro-}\ell}(A \otimes_R^L L_T) \simeq R\psi_{\eta,p_2}^{\text{pro-}\ell}(B) \otimes_{\Omega_{T/S}}^L L_{\Omega_{T/S},\pi_1(S)_\ell}.$$

On a un isomorphisme canonique

$$i^* Rj_*(A \otimes_R^L L_T) \simeq R\Gamma(\mathrm{Gal}(\bar{\eta}|\eta), R\psi_{\eta,p_2}^{\text{pro-}\ell}(A \otimes_R^L L_T))$$

dont on on tire des isomorphismes

$$
\begin{aligned}
R\Gamma(\bar{x}, i^*Rj_*(A \otimes_R^L L_T)) &\simeq R\Gamma(\mathrm{Gal}(\bar{\eta}\,|\,\eta), Rq_*R\psi_{\eta,p_2}^{\text{pro-}\ell}(A \otimes_R^L L_T)) \\
&\simeq R\Gamma(\mathrm{Gal}(\bar{\eta}\,|\,\eta), Rq_*(R\psi_{\eta,p_2}^{\text{pro-}\ell}(B) \otimes_{\Omega_{T/S}}^L L_{\Omega_{T/S},\pi_1(S)_\ell})) \\
&\simeq R\Gamma(\mathrm{Gal}(\bar{\eta}\,|\,\eta), Rq_*(R\psi_{\eta,p_2}^{\text{pro-}\ell}(B)) \otimes_{\Omega_{T/S}}^L L_{\Omega_{T/S},\pi_1(S)_\ell}) \\
&\simeq R\Gamma(I_\ell, Rq_*(R\psi_{\eta,p_2}^{\text{pro-}\ell}(B)) \otimes_{\Omega_{T/S}}^L L_{\Omega_{T/S},\pi_1(S)_\ell}) \\
&\simeq R\Gamma(\pi_1(S)_\ell, Rq_*(R\psi_{\eta,p_2}^{\text{pro-}\ell}(B)) \otimes_{\Omega_{T/S}}^L L_{\Omega_{T/S},\pi_1(S)_\ell})
\end{aligned}
$$

I_ℓ désignant le quotient pro-ℓ maximal de Gal $(\bar{\eta}\,|\,\eta)$. D'après la proposition 4.2.2.1 la suite spectrale

$$
\begin{aligned}
E_2^{i,j} &= H^i(\pi_1(S)_\ell, R^jq_*(R\psi_{\eta,p_2}^{\text{pro-}\ell}(B)) \otimes_{\Omega_{T/S}} L_{\Omega_{T/S},\pi_1(S)_\ell}) \\
&\Rightarrow\ H^{i+j}(\pi_1(S)_\ell, Rq_*(R\psi_{\eta,p_2}^{\text{pro-}\ell}(B)) \otimes_{\Omega_{T/S}}^L L_{\Omega_{T/S},\pi_1(S)_\ell})
\end{aligned}
$$

dégénère en E_2 (on a $E_2^{i,j} = 0$ si $i \neq 1$) et on a, pour tout entier i, un isomorphisme canonique de $R[[\pi_1(T)_\ell]]$-modules

$$
H^i(\bar{x}, i^*Rj_*(A \otimes_R^L L_T)) \simeq (R^{i-1}q_*(R\psi_{\eta,p_2}^{\text{pro-}\ell,\text{op}}(B)))\tilde{}\otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \pi_1(S)_\ell^\vee .
$$

Pour conclure on utilise les isomorphismes canoniques

$$
\begin{aligned}
R\psi_{\eta,p_2}^{\text{pro-}\ell}(B) &= R\psi_{\eta,p_2}^{\text{pro-}\ell}(A \otimes_R^L p_1^*(L_{T/S})) \\
&\simeq R\psi_{\eta,p_2}^{\text{pro-}\ell}(A \otimes_R^L \Omega_{T/S}) \otimes_{\Omega_{T/S}}^L \pi^*L_{T/S} \\
&\simeq R\psi_{\eta,p_2}^{\text{pro-}\ell}(A) \otimes_R^L \pi^*L_{T/S},
\end{aligned}
$$

le dernier isomorphisme étant conséquence de A.1.6. □

Soit A un objet de $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. On note $R\psi_{\eta,p_2}^{t}(A[-1])$ le complexe des cycles proches modérés de $A[-1]$ en η relativement à p_2. On note $R\psi_{\eta,p_2}^{t,\text{op}}(A[-1])$ le même objet avec l'action opposée de Gal $(\bar{\eta}\,|\,\eta)$. C'est un faisceau pervers (cf. [I2, corollaire 4.5]), et on peut l'identifier à un faisceau pervers sur $\bar{x} \simeq T/S$ muni d'une action continue de $\pi_1(S)^t$ par le choix précédent de l'isomorphisme de foncteurs fibres. Pour tout point fermé χ de $\mathscr{C}(S)$, on note $R\psi_{\eta,p_2}^{t,\text{op}}(A[-1])^\chi$ le composant χ-isotypique de $R\psi^{t,\mathrm{op}}_{\eta,p_2}(A[-1])$, c'est à dire le plus grand sous-objet de $R\psi^{t,\mathrm{op}}_{\eta,p_2}(A[-1])$ sur lequel l'action d'un générateur topologique γ de $\pi_1(S,1)^t$ est de la forme $\chi(\gamma)+N_\gamma$ avec N_γ nilpotent. D'après la constructibilité de $R\psi$, on a une décomposition

$$R\psi^{t,\mathrm{op}}_{\eta,p_2}(A[-1]) \simeq \bigoplus_{\chi\in F} R\psi^{t,\mathrm{op}}_{\eta,p_2}(A[-1])^\chi$$

avec F une partie finie de $\mathscr{C}(S,\overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$.

Proposition 7.3.3. *Soit A un objet de $\mathrm{Perv}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Soit S un sous-tore de dimension 1. Soit x dans $\{a,b\}$.*

(1) *Le support de $\Delta\mathscr{M}_{S,x}(A)$ est contenu dans la réunion des $i_S^{\vee-1}(\chi)$, χ décrivant F.*

(2) *Soit χ un point fermé de $\mathscr{C}(S)$. Soit γ un générateur topologique de $\pi_1(S,1)^t$. Il lui correspond, par évaluation, une section globale t_γ de $\mathscr{O}^\times_{\mathscr{C}(S)}$. Soit N_γ la partie nilpotente de l'action de γ sur $R\psi^{t,\mathrm{op}}_{\eta,p_2}(A[-1])^\chi$ et soit n_γ un entier positif tel que $N_\gamma^{n_\gamma}=0$. L'objet $\Delta\mathscr{M}_{S,x}(A)$ est un module placé en degré zéro et on a des isomorphismes*

$$\begin{aligned}\Delta\mathscr{M}_{S,x}(A) &\otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{C}(S)}} \overline{\mathbf{Q}}_\ell[[(t_\gamma - t_\gamma(\chi))]]\\ &\simeq \Delta\mathscr{M}_{S,x}(A)\otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{C}(S)}} \mathscr{O}_{\mathscr{C}(S)}/(t_\gamma - t_\gamma(\chi))^{n_\gamma}\\ &\simeq \mathscr{M}_*(R\psi^{t,\mathrm{op}}_{\eta,p_2}(A[-1])^\chi \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \pi_1(S)^\vee_\ell),\end{aligned}$$

$R\psi^{t,\mathrm{op}}_{\eta,p_2}(A[-1])^\chi$ étant vu comme un faisceau pervers sur T/S, et l'action de $t_\gamma - t_\gamma(\chi)$ sur

$$\mathscr{M}_*(R\psi^{t,\mathrm{op}}_{\eta,p_2}(A[-1])^\chi \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \pi_1(S)^\vee_\ell)$$

correspondant à celle de N_γ sur

$$R\psi^{t,\mathrm{op}}_{\eta,p_2}(A[-1])^\chi.$$

On note, pour χ point fermé de $\mathscr{C}(S)$, $\Delta\mathscr{M}_{S,x}(A)^\chi$ l'objet défini par la formule précédente. On a un isomorphisme

$$\Delta\mathscr{M}_{S,x}(A) \simeq \bigoplus_{\chi\in F} \Delta\mathscr{M}_{S,x}(A)^\chi.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 7.3.2 et du corollaire 3.4.2. $\square$

On en déduit la proposition suivante.

PROPOSITION 7.3.4. *Soit A un objet de* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. *Soit S un sous-tore de dimension* 1. *Soit x appartenant à $\{a, b\}$ et soit χ dans F. Le type de $\Delta\mathscr{M}_{S,x}(A)$ est le même au point générique de toutes les composantes connexes de $i_S^{\vee-1}(\chi)$.*

Démonstration. Si N est un endomorphisme nilpotent d'un objet X d'une catégorie abélienne on note $W.(N)$ la filtration de X associée à N. C'est l'unique filtration finie (exhaustive et séparée) telle que $N\colon W_i(N) \to W_{i-2}(N)$ et telle que, pour tout i, N^i induise un isomorphisme $\mathrm{gr}_i^{W(N)} \simeq \mathrm{gr}_{-i}^{W(N)}$. La filtration $W.(t_\gamma - t_\gamma(\chi))$ sur

$$\Delta\mathscr{M}_{S,x}(A) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathscr{C}(S)}} \overline{\mathbf{Q}}_\ell[[(t_\gamma - t_\gamma(\chi))]]$$

au point générique d'une composante connexe de $i_S^{\vee-1}(\chi)$ détermine le type de $\Delta\mathscr{M}_{S,x}(A)$ au point générique de cette composante connexe. Il suffit donc de vérifier que, pour tout i, le rang de

$$W_i(t_\gamma - t_\gamma(\chi))(\mathscr{M}_*(R\psi_{\eta, p_2}^{t, \mathrm{op}}(A[-1])^\chi \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \pi_1(S)_\ell^\vee))$$

est le même au point générique de chaque composante connexe de $\mathscr{C}(T)$. Mais c'est également le rang de

$$\mathscr{M}_*(W_i(N_\gamma)(R\psi_{\eta, p_2}^{t, \mathrm{op}}(A[-1])^\chi \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \pi_1(S)_\ell^\vee)),$$

qui est le même au point générique de chaque composante connexe de $\mathscr{C}(T)$, d'après 3.4.3. □

Démonstration de la proposition 7.2.2. Soit χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$ et soit $p\colon T \to T'$ un tore quotient de dimension $n-1$. Soit C une composante connexe de $\mathscr{C}(T)$ telle que l'intersection du support $\Delta(A)$ de $\Delta\mathscr{M}(A)$ avec C contienne $(\chi \cdot p^\vee\mathscr{C}(T')) \cap C$ et telle que $(\chi \cdot p^\vee\mathscr{C}(T')) \cap C$ ne soit pas vide. Posons $S = \operatorname{Ker} p$. D'après 7.3.1, $\operatorname{Supp} \Delta\mathscr{M}_S(A)$ contient une composante connexe de $\chi \cdot p^\vee\mathscr{C}(T')$, et donc, d'après 7.3.4, $\operatorname{Supp} \Delta\mathscr{M}_S(A)$ contient $\chi \cdot p^\vee\mathscr{C}(T')$ tout entier. De même, d'après 7.3.1, le type de $\Delta\mathscr{M}(A)$ au point générique d'une composante connexe de $\chi \cdot p^\vee\mathscr{C}(T')$ est égal à celui de $\Delta\mathscr{M}_S(A)$, et on conclut par 7.3.4. □

On a le résultat suivant.

THÉORÈME 7.3.5. *Pour tout objet A de* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, *l'ensemble I des sous-tores S de dimension* 1 *de T tels que le support de $\Delta\mathscr{M}_S(A)$ est de codimension* 1 *est fini. Pour tout ensemble fini J de sous-tores de dimension* 1 *de T contenant I, le morphisme canonique (défini par les morphismes de 7.3.1)*

$$\Delta\mathscr{M}(A) \to \bigoplus_{S \in J} \Delta\mathscr{M}_S(A) \tag{7.3.5}$$

est un isomorphisme en dehors d'un fermé partout de codimension au moins 2.

Démonstration. Si $S \in I$ alors, d'après 7.3.3, 7.3.4 et 7.3.1, $\Delta(A)$ contient un cotore algébrique translaté de la forme $i_S^{\vee -1}(\chi)$, de sorte que la finitude de I provient de 7.2.1. D'après 7.3.3, les composantes irréductibles de codimension 1 du support des $\Delta\mathscr{M}_S(A)$ sont toutes distinctes lorsque S varie et donc d'après 7.3.1 et 7.3.3 la flèche (7.3.5) est un isomorphisme sur un ouvert contenant les points génériques de ces composantes. D'après 4.1.1, toute composante irréductible de codimension 1 de $\Delta(A)$ est composante connexe d'un cotore translaté de codimension 1, disons $\chi \cdot p^{\vee}\mathscr{C}(T')$, et est donc, d'après la proposition 7.3.1, composante irréductible du support de $\Delta\mathscr{M}_S(A)$ pour $S = \operatorname{Ker} p$. □

7.4. *$\Delta\mathscr{M}$ et image directe.* On s'intéresse dans ce numéro au comportement de $\Delta\mathscr{M}$ par image directe.

Proposition 7.4.1. *Soit $p\colon T \to T'$ un morphisme de k-tores. Soit A un objet de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ et soit χ un point fermé de $\mathscr{C}(T)$. On a un morphisme canonique*

$$\Delta\mathscr{M}(A \otimes \mathscr{L}_\chi) \otimes^L_{\mathscr{O}_{\mathscr{C}(T)}} \mathscr{O}_{\mathscr{C}(T')} \to \Delta\mathscr{M}(Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi)) \tag{7.4.1}$$

qui est un isomorphisme si le morphisme canonique

$$Rp_!(A \otimes \mathscr{L}_\chi) \to Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Quitte à remplacer A par $A \otimes \mathscr{L}_\chi$, on peut supposer que χ est le caractère trivial.

D'après 3.3.1 (c), le complexe $\Delta\mathscr{M}(A) \otimes^L_{\mathscr{O}_{\mathscr{C}(T)}} \mathscr{O}_{\mathscr{C}(T')}$ est canoniquement isomorphe au cône du morphisme canonique $\mathscr{M}_!(Rp_!A) \to \mathscr{M}_*(Rp_*A)$, tandis que, par définition, $\Delta\mathscr{M}(Rp_*A)$ est isomorphe au cône du morphisme canonique

$$\mathscr{M}_!(Rp_*A) \to \mathscr{M}_*(Rp_*A).$$

Le morphisme (7.4.1) est donc obtenu à partir du morphisme canonique

$$\mathscr{M}_!(Rp_!A) \to \mathscr{M}_!(Rp_*A).$$

Il est clair que c'est un isomorphisme si le morphisme canonique

$$Rp_!A \to Rp_*A$$

est un isomorphisme. □

Soit $p\colon T \to T'$ un quotient et soit S un sous-tore de dimension 1 du tore T tel que $S \cap \operatorname{Ker} p$ soit fini. Le morphisme p induit une isogénie de tores

$$p\colon S \to S' := p(S)$$

et un morphisme de tores $T/S \to T'/S'$ permettant de voir T'/S' comme un quotient de T/S. On choisit des décompositions en produit $T \simeq T' \times T''$ et $T/S \simeq T'/S' \times T'''$. Le morphisme $T \to T/S$ induit une isogénie $T'' \to T'''$. On note $\overline{T}$ et $\overline{T}'$ les compactifications partielles associées à S et à S' et $\bar{p}\colon \overline{T} \to \overline{T}'$ le morphisme prolongeant p. Pour x dans $\overline{S} - S$, on pose $x' = \bar{p}(x)$. On a $\bar{p}^{-1}(\overline{T}' - T') = \overline{T} - T$, ce qui permet d'écrire $\bar{a}' = \bar{p}(\bar{a})$ et $\bar{b}' = \bar{p}(\bar{b})$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} T & \overset{j}{\hookrightarrow} & \overline{T} & \overset{i}{\hookleftarrow} & \overline{T} - T \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{p}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{p}} \\ T' & \overset{j'}{\hookrightarrow} & \overline{T}' & \overset{i'}{\hookleftarrow} & \overline{T}' - T' . \end{array}$$

PROPOSITION 7.4.2. *Soit A un objet de* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *et soit χ dans $\mathscr{C}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Avec les notations précédentes, on a, pour x dans $\{a, b\}$, un morphisme*

$$(7.4.2) \qquad \Delta \mathscr{M}_{S',x'}(Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi)) \to \Delta \mathscr{M}_{S,x}(A \otimes \mathscr{L}_\chi) \otimes^L_{\mathscr{O}_{\mathscr{C}(T)}} \mathscr{O}_{\mathscr{C}(T')} .$$

De plus, il existe un ouvert U de $\mathscr{C}(T)$, invariant par translation par $\mathscr{C}(T'/S')$, dont l'intersection avec chaque fibre en un point fermé du morphisme $\mathscr{C}(T) \to \mathscr{C}(S)$ est dense, tel que pour tout χ (7.4.2) soit un isomorphisme sur l'ouvert $p^{\vee -1}(\chi^{-1} \cdot U)$ de $\mathscr{C}(T')$.

Démonstration. Quitte à remplacer A par $A \otimes \mathscr{L}_\chi$, on peut supposer pour la construction de (7.4.2) que χ est le caractère trivial. Pour définir (7.4.2), il suffit de définir, pour R dans $\mathscr{R}$, et A objet de $D^b_c(T, R)$, un morphisme canonique

$$(7.4.2.1) \qquad R\Gamma(\bar{x}', i'^* Rj'_*(Rp_*(A) \otimes^L_R L_{T'})) \to R\Gamma(\bar{x}, i^* Rj_*(A \otimes^L_R L_T)) \otimes^L_{\Omega_T} \Omega_{T'} .$$

Comme on a des isomorphismes canoniques

$$R\Gamma(\bar{x}, i^* Rj_*(A \otimes^L_R L_T)) \otimes^L_{\Omega_T} \Omega_{T'}$$

$$(7.4.2.2) \qquad \simeq R\Gamma(\bar{x}, i^* Rj_*(A \otimes^L_R (L_T \otimes^L_{\Omega_T} \Omega_{T'})))$$

$$(7.4.2.3) \qquad \simeq R\Gamma(\bar{x}, i^* Rj_*(A \otimes^L_R p^* L_{T'}))$$

$$(7.4.2.4) \qquad \simeq R\Gamma(\bar{x}', R\bar{p}_* i^* Rj_*(A \otimes^L_R p^* L_{T'})) ,$$

(7.4.2.2) étant conséquence de A.1.4 et A.1.5, et (7.4.2.3) de 3.1.1 (i), il suffit de construire un morphisme canonique

$$i'^*Rj'_*(Rp_*(A)\otimes^L_R L_{T'}) \to R\bar{p}_*i^*Rj_*(A\otimes^L_R p^*L_{T'}) \tag{7.4.2.5}$$

Comme on a des isomorphismes canoniques

$$i'^*Rj'_*(Rp_*(A)\otimes^L_R L_{T'}) \simeq i'^*Rj'_*Rp_*(A\otimes^L_R p^*L_{T'}) \tag{7.4.2.6}$$

$$\simeq i'^*R\bar{p}_*Rj_*(A\otimes^L_R p^*L_{T'}), \tag{7.4.2.7}$$

(7.4.2.6) étant conséquence de A.1.5, et (7.4.2.7) de l'égalité $\bar{p}\circ j = j'\circ p$, on obtient le morphisme (7.4.2.5) à partir du morphisme de changement de base

$$i'^*R\bar{p}_* \to R\bar{p}_*i^*.$$

Notons W le $\Omega_{T'}$-support (au sens de 4.4) du cône du morphisme (7.4.2.1). D'après ce qui précède, W est contenu dans le $\Omega_{T'}$-support du cône du morphisme canonique

$$i'^*R\bar{p}_*Rj_*(A\otimes^L_R p^*L_{T'}) \to R\bar{p}_*i^*Rj_*(A\otimes^L_R p^*L_{T'}).$$

Comme on a un isomorphisme de foncteurs $R\bar{p}_*i^* \simeq i'^*R\bar{p}_*Ri_*i^*$, on en déduit, en considérant le triangle associé à $Rj_! \to Rj_* \to Ri_*i^*Rj_*$, que W est contenu dans le $\Omega_{T'}$-support de

$$i'^*R\bar{p}_*Rj_!(A\otimes^L_R p^*L_{T'}).$$

Comme $i'^*R\bar{p}_!Rj_! = 0$, on obtient que W est contenu dans le $\Omega_{T'}$-support du cône du morphisme canonique

$$R\bar{p}_!Rj_!(A\otimes^L_R p^*L_{T'}) \to R\bar{p}_*Rj_!(A\otimes^L_R p^*L_{T'}).$$

D'après A.1.4, A.1.5 et 3.1.1 (i), ce cône est isomorphe à

$$\text{Cône}(R\bar{p}_!Rj_!(A\otimes^L_R L_T) \to R\bar{p}_*Rj_!(A\otimes^L_R L_T))\otimes^L_{\Omega_T}\Omega_{T'}.$$

Par conséquent, d'après 4.4.2, si on note ψ le morphisme $\operatorname{Spec}\Omega_{T'} \to \operatorname{Spec}\Omega_T$, et si V désigne le Ω_T-support de $\text{Cône}(R\bar{p}_!Rj_!(A\otimes^L_R L_T) \to R\bar{p}_*Rj_!(A\otimes^L_R L_T))$, le fermé W est contenu dans $\psi^{-1}(V)$.

Considérons maintenant un objet A de $D^b_c(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. On associe à A, par la procédure déjà utilisée en 4.5, un fermé

$$Z = \operatorname{Supp}_{\mathscr{C}(T)}\text{Cône}(R\bar{p}_!Rj_!(A\otimes\mathscr{L}_T) \to R\bar{p}_*Rj_!(A\otimes\mathscr{L}_T))$$

dans $\mathscr{C}(T)$. Notons U l'ouvert complémentaire de Z dans $\mathscr{C}(T)$. Remarquons qu'un point fermé χ_0 de $\mathscr{C}(T)$ appartient à U si et seulement si le morphisme canonique

$$R\bar{p}_! Rj_!(A \otimes \mathscr{L}_{\chi_0}) \to R\bar{p}_* Rj_!(A \otimes \mathscr{L}_{\chi_0})$$

est un isomorphisme. La preuve de ce fait est toute similaire à celle de 4.5.1 (2). D'après ce qui précède, le morphisme (7.4.2) est un isomorphisme sur l'ouvert $p^{\vee-1}(U)$ lorsque $\chi = 1$. Comme $U(A \otimes \mathscr{L}_\chi) = \chi^{-1} \cdot U(A)$, on en déduit que, en général, le morphisme (7.4.2) est un isomorphisme sur l'ouvert $p^{\vee-1}(\chi^{-1} \cdot U)$. Le fait que U soit invariant par translation par les points de $\mathscr{C}(T'/S')$ est clair. Il reste à vérifier que l'intersection de U avec chaque fibre en un point fermé du morphisme $\mathscr{C}(T) \to \mathscr{C}(S)$ est partout dense.

Comme l'ouvert U est invariant par translation par $\mathscr{C}(T'/S')$, il lui correspond, via les isomorphismes

$$T \simeq S \times T/S \simeq S \times (T'/S') \times T''',$$

un ouvert V de $\mathscr{C}(S \times T''')$. Il suffit donc de vérifier que l'intersection de V avec chaque fibre en un point fermé du morphisme $\mathscr{C}(S \times T''') \to \mathscr{C}(S)$ est partout dense. Notons p_1 et p_3 les projections de T sur S et T''', respectivement. Un point fermé (χ_1, χ_3) de $\mathscr{C}(S \times T''')$ appartient à V si et seulement si le morphisme canonique

$$R\bar{p}_! Rj_!(A \otimes p_1^*\mathscr{L}_{\chi_1} \otimes p_3^*\mathscr{L}_{\chi_3}) \to R\bar{p}_* Rj_!(A \otimes p_1^*\mathscr{L}_{\chi_1} \otimes p_3^*\mathscr{L}_{\chi_3}) \tag{7.4.2.8}$$

est un isomorphisme. Comme le morphisme $\bar{p}\colon \overline{T} \to \overline{T}'$ est le composé d'un morphisme fini $f\colon \overline{T} \to \overline{T}' \times T'''$ et d'une projection $g\colon \overline{T}' \times T''' \to \overline{T}'$, le morphisme (7.4.2.8) est un isomorphisme si et seulement si le morphisme canonique

$$\begin{aligned} &Rg_! R(f \circ j)_!(A \otimes p_1^*\mathscr{L}_{\chi_1} \otimes p_3^*\mathscr{L}_{\chi_3}) \\ &\qquad \to Rg_* R(f \circ j)_!(A \otimes p_1^*\mathscr{L}_{\chi_1} \otimes p_3^*\mathscr{L}_{\chi_3}) \end{aligned} \tag{7.4.2.9}$$

est un isomorphisme. Soit h la projection $\overline{T}' \times T''' \to T'''$. D'après la formule de projection, le morphisme (7.4.2.9) est un isomorphisme si et seulement si le morphisme canonique

$$Rg_!((R(f \circ j)_!(A \otimes p_1^*\mathscr{L}_{\chi_1})) \otimes h^*\mathscr{L}_{\chi_3}) \to Rg_*((R(f \circ j)_!(A \otimes p_1^*\mathscr{L}_{\chi_1})) \otimes h^*\mathscr{L}_{\chi_3})$$

est un isomorphisme, et le corollaire 2.3.2 permet maintenant de conclure. □

7.5. *Définition des entiers $n_{S,x,\chi}$ et comportement par image directe.* Soit A un objet de $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ et soit S un sous-tore de dimension 1 de T. On reprend les notations de 7.3. Pour x dans $\bar{S}-S$ et χ un point fermé de $\mathscr{C}(S)$, on note $n_{S,x,\chi}(A)$ la longueur de $\Delta\mathscr{M}_{S,x}(A)$ au point générique des composantes connexes de $i_S^{\vee -1}(\chi)$ (cf. 7.3.4). D'après 7.3.3, on a l'égalité

$$n_{S,x,\chi}(A)=\chi(\bar{x},R\psi_{x,p_2}^{t,\mathrm{op}}(A[-1])^{\chi}).$$

On note $\mathscr{S}(A)$ (resp., $\mathscr{S}_1(A)$, resp., $\mathscr{S}_2(A)$) l'ensemble des S (resp., des (S,x), resp., des (S,x,χ)) tels que $n_{S,x,\chi}(A)$ ne soit pas pas nul pour tout (x,χ) (resp., ne soit pas nul pour tout χ, resp., ne soit pas nul).

Proposition 7.5.1. *Soit T un k-tore et soit A un objet de* $\mathrm{Perv}(T,\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. *On considère un isomorphisme de tores $T\simeq T'\times T''$ avec T' de dimension 1. On note p_i les projections. On suppose que, pour tout S dans $\mathscr{S}(A)$, l'intersection $S\cap\ker p_1$ est finie. Pour de tels S, on note $p\colon S\to T'$ la restriction de p_1 à S et $\bar{p}\colon\bar{S}\to\bar{T}'$ son prolongement aux compactifications. Alors, pour ω-presque tout χ_0 dans $\mathscr{C}(T'',\overline{\mathbf{Q}}_\ell^{\times})$, l'objet $Rp_{1*}(A\otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0})$ est un faisceau pervers, et les entiers $n_{T',x',\chi'}(Rp_{1*}(A\otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0}))$ s'obtiennent de la façon suivante à partir des $n_{S,x,\chi}(A\otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0})$. Pour que $n_{T',x',\chi'}(Rp_{1*}(A\otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0}))$ soit non nul, il est nécessaire et suffisant qu'il existe (S,x,χ) dans $\mathscr{S}_2(A\otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0})$ avec $x'=\bar{p}(x)$ et $\chi=p^{\vee}(\chi')$, et on a alors*

$$n_{T',x',\chi'}(Rp_{1*}(A\otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0}))=n_{S,x,\chi}(A\otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0}).$$

Démonstration. Pour (S,x) dans $\mathscr{S}_1(A)$, on note $Z_{S,x}$ la réunion des cotores algébriques translatés de codimension 1 de la forme $i_S^{\vee -1}(\chi)$, pour (S,x,χ) dans $\mathscr{S}_2(A)$. On pose $Z_S=\bigcup_{x\in\bar{S}-S}Z_{S,x}$. D'après le théorème 7.3.5, il existe un fermé Z de $\mathscr{C}(T)$, partout de codimension au moins 2, tel que

$$\Delta(A)=\left(\bigcup_{S\in\mathscr{S}(A)}Z_S\right)\cup Z.$$

Notons U_S l'ouvert U fourni par la proposition 7.4.2. D'après la proposition 7.4.2, l'intersection $U_S\cap Z_S$ est dense dans Z_S. D'autre part, d'après 7.3.5, il existe un ouvert dense W_S dans $U_S\cap Z_S$ tel que, sur W_S, les objets $\Delta\mathscr{M}(A)$ et $\Delta\mathscr{M}_S(A)$ sont isomorphes. Quitte à rétrécir l'ouvert W_S, on peut supposer que, sur W_S, $\Delta\mathscr{M}_S(A)$ est un module localement isomorphe à une somme directe de modules de la forme $\mathscr{O}_{\mathscr{C}(T)}/(\ell^m)$ avec ℓ une équation locale de $i_S^{\vee -1}(\chi)$. Quitte à rétrécir encore W_S, on peut supposer que, pour $S\neq S'$ dans $\mathscr{S}(A)$, on a $W_S\cap W_{S'}=\varnothing$.

Notons i_1 et i_2 les morphismes d'inclusion de T' et T'' dans T. Remarquons que, comme l'intersection $S\cap\ker p_1$ est un ensemble fini, la restriction de $i_2^{\vee}$ à Z_S est un morphisme fini surjectif $Z_S\to\mathscr{C}(T'')$, et que, pour tout point fermé α de $\mathscr{C}(T'')$, les sous-schémas Z_S et $i_2^{\vee -1}(\alpha)$ s'intersectent transversalement dans $\mathscr{C}(T)$ (et donc $\mathscr{T}\mathrm{or}_q^{\mathscr{O}_{\mathscr{C}(T)}}(\mathscr{O}_{Z_S},\mathscr{O}_{i_2^{\vee -1}(\alpha)})=0$ pour $q>0$). Soit K_S le fermé complémentaire de W_S dans Z_S. Par la remarque précédente, $i_2^{\vee}(K_S)$ est fermé dans $\mathscr{C}(T'')$. Soit

Ω_S l'ouvert complémentaire dans $\mathscr{C}(T'')$. C'est un ouvert partout dense dans $\mathscr{C}(T'')$. D'après 4.7.2, la remarque qui suit 4.7.3 et 2.4, il existe un ouvert V partout dense dans $\mathscr{C}(T'')$, tel que, pour tout point fermé χ_0 de V, le morphisme canonique $Rp_{1!}(A \otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0}) \to Rp_{1*}(A \otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0})$ soit un isomorphisme de faisceaux pervers. On pose $\Omega = (\bigcap_{S \in \mathscr{S}(A)} \Omega_S) \cap V$. C'est un ouvert partout dense dans $\mathscr{C}(T'')$. D'après le lemme 5.2.5, il existe un sous-ensemble Γ' de $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$ tel que ω-presque tout χ_0 dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$ appartienne à Γ', et telle que si χ_0 appartient à Γ', alors l'intersection $i_2^{\vee -1}(\chi_0) \cap Z$ est vide. Soit Γ l'intersection de Γ' et de l'ensemble des points fermés de Ω. D'après les propositions 7.4.1 et 7.4.2, si χ_0 appartient à Γ, alors l'énoncé de la proposition vaut pour χ_0. Comme ω-presque tout élément de $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$ appartient à Γ, ceci termine la démonstration. □

8. Faisceaux pervers de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à 1 et faisceaux pervers hypergéométriques

8.1. Complexes hypergéométriques. Soit T un tore de dimension n sur k. Pour tout point fermé λ de T, on note $m_\lambda \colon T \to T$ la multiplication par λ, i_λ l'inclusion $\{\lambda\} \hookrightarrow T$, et $\delta_{\{\lambda\}}$ le faisceau ponctuel $i_{\lambda *}\overline{\mathbf{Q}}_\ell$. On fixe un caractère additif non trivial $\psi \colon \mathbf{F}_p \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell$. On note $\mathscr{L}_\psi$ le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau correspondant sur $\mathbf{A}_k^1$. C'est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1, de conducteur de Swan 1 à l'infini. On note

$$j \colon \mathbf{G}_{m,k} = \operatorname{Spec} k[x, x^{-1}] \to \mathbf{A}_k^1 = \operatorname{Spec} k[x]$$

l'inclusion et inv l'automorphisme $x \mapsto x^{-1}$ de $\mathbf{G}_{m,k}$.

Pour tout χ dans $\mathscr{C}(\mathbf{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$, on pose

$$H(\psi; \chi) := \mathscr{L}_\chi \otimes (j^*\mathscr{L}_\psi[1]).$$

C'est un faisceau pervers sur $\mathbf{G}_{m,k}$.

LEMME 8.1.1. *Les faisceaux pervers $H(\psi;\chi)$ et $\delta_{\{\lambda\}}$ vérifient les propriétés suivantes.*

(i) *Le faisceau pervers $H(\psi;\chi)$ appartient à $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(\mathbf{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ $(= \mathscr{L}_*(\mathbf{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell) \cap \mathscr{L}_!(\mathbf{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell))$.*

(ii) *On a un isomorphisme canonique*

$$D(H(\psi;\chi)) \simeq \delta_{\{-1\}} *_* H(\psi; \chi^{-1}).$$

(iii) *Pour tout morphisme de tores $\pi \colon \mathbf{G}_{m,k} \to T$, $R\pi_!(H(\psi;\chi))$ et $R\pi_*(H(\psi;\chi))$ sont des faisceaux pervers isomorphes et appartiennent à $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Si π est le morphisme constant, ils sont isomorphes à $\delta_{\{1\}}$. Si π est non constant, le morphisme canonique*

$$R\pi_!(H(\psi;\chi)) \to R\pi_*(H(\psi;\chi))$$

est un isomorphisme.

(iv) *Les faisceaux pervers* $\delta_{\{\lambda\}}$ *appartiennent à* $\mathscr{L}_?(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *pour* ? *dans* $\{!, *, \mathrm{int}\}$, *sont autoduaux et vérifient*

$$\delta_{\{\lambda\}} *_? \delta_{\{\lambda'\}} \simeq \delta_{\{\lambda\cdot\lambda'\}}$$

pour ? *dans* $\{!, *, \mathrm{int}\}$. *Pour tout objet* A *de* $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *(resp., de* $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$*) on a* $\delta_{\{\lambda\}} *_? A \simeq m_{\lambda *} A$ *pour* ? *dans* $\{!, *\}$ *(resp.,* ? *dans* $\{!, *, \mathrm{int}\}$*).*

Démonstration. L'énoncé (iv) est de vérification immédiate. L'assertion (i) est conséquence directe de la proposition 3.5.3. En effet, le faisceau pervers $H(\psi; \chi)$ est simple et est sauvagement ramifié à l'infini. L'énoncé (ii) est conséquence de (iv) et des isomorphismes canoniques $D\mathscr{L}_\psi \simeq \mathscr{L}_{\bar{\psi}}$ et $D\mathscr{L}_\chi \simeq \mathscr{L}_{\chi^{-1}}$. Quant à (iii), remarquons si π est non constant, π est un morphisme fini et donc $R\pi_! \simeq R\pi_*$. Le fait que $R\pi_!(H(\psi;\chi))$ et $R\pi_*(H(\psi;\chi))$ appartiennent à $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est alors conséquence directe de (i) et de la proposition 3.5.2. Quand π est constant, les faisceaux pervers $R\pi_!(H(\psi;\chi))$ et $R\pi_*(H(\psi;\chi))$ sont isomorphes à $\delta_{\{1\}}$, car on a $\chi(\mathbf{G}_{m,k}, H(\psi;\chi)) = 1$ d'après la formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevich, vu que $H(\psi;\chi)[-1]$ est un faisceau lisse de rang 1 sur $\mathbf{G}_{m,k}$, modéré à l'origine et de conducteur de Swan 1 à l'infini. □

Définition 8.1.2. (i) Etant donnés un entier positif m, un point fermé λ de T, des caractères χ_i dans $\mathscr{C}(\mathbf{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$, et des morphismes de tores $\pi_i \colon \mathbf{G}_{m,k} \to T$, pour $1 \leqslant i \leqslant m$, on pose

$$\mathrm{Hyp}(!, \lambda, (\chi_i), (\pi_i)) := \delta_{\{\lambda\}} *_! R\pi_{1!}(H(\psi;\chi_1)) *_! \cdots *_! R\pi_{m!}(H(\psi;\chi_m)),$$

$$\mathrm{Hyp}(*, \lambda, (\chi_i), (\pi_i)) := \delta_{\{\lambda\}} *_* R\pi_{1*}(H(\psi;\chi_1)) *_* \cdots *_* R\pi_{m*}(H(\psi;\chi_m)),$$

et

$$\mathrm{Hyp}(\mathrm{int}, \lambda, (\chi_i), (\pi_i)) := \delta_{\{\lambda\}} *_{\mathrm{int}} R\pi_{1*}(H(\psi;\chi_1)) *_{\mathrm{int}} \cdots *_{\mathrm{int}} R\pi_{m*}(H(\psi;\chi_m)),$$

la dernière expression étant bien définie d'après 8.1.1 (iii) et (iv).

(ii) Un objet de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est dit !-hypergéométrique (resp., $*$-hypergéométrique, resp., int-hypergéométrique) si il est isomorphe à un des complexes $\mathrm{Hyp}(!, \lambda, (\chi_i), (\pi_i))$ (resp., $\mathrm{Hyp}(*, \lambda, (\chi_i), (\pi_i))$, resp., $\mathrm{Hyp}(\mathrm{int}, \lambda, (\chi_i), (\pi_i))$).

Dans cette définition on pourrait supposer que les π_i sont tous non constants d'après 8.1.1 (iii). On note $\mathrm{Hyp}_?(T)$ la catégorie des complexes ?-hypergéométriques sur T pour ? dans $\{!, *, \mathrm{int}\}$. Remarquons que les faisceaux ponctuels $\delta_{\{\lambda\}}$ appartiennent à $\mathrm{Hyp}_?(T)$ (prendre $m = 0$ ou les π_i constants dans la définition). Par ailleurs les catégories $\mathrm{Hyp}_?(T)$ ne dépendent pas du choix de ψ. En effet les autres caractères additifs non triviaux de $\mathbf{F}_p$ sont de la forme $\psi_a \colon x \mapsto \psi(ax)$ avec a dans $\mathbf{F}_p^\times$, et on a $H(\psi_a;\chi) \simeq \delta_{\{a^{-1}\}} *_? H(\psi;\chi)$.

On note $\mathbf{H}_?(T)$ l'ensemble des classes d'équivalence d'objets de $\mathrm{Hyp}_?(T)$.

PROPOSITION 8.1.3. (1) *Les complexes !-hypergéométriques vérifient les propriétés suivantes.*

(i) *Si* $\pi\colon T \to T'$ *est un morphisme de tores et* A *est un objet de* $\mathrm{Hyp}_!(T)$, *alors* $R\pi_!(A)$ *est un objet de* $\mathrm{Hyp}_!(T')$.

(ii) *Si* A *est un objet de* $\mathrm{Hyp}_!(T)$ *et* B *est un objet de* $\mathrm{Hyp}_!(T)$, *alors* $A *_! B$ *est un objet de* $\mathrm{Hyp}_!(T)$.

(iii) *Si* T *est de dimension* 0, $\mathbf{H}_!(T) = \{\delta_{\{1\}}\}$

(iv) *Si* A *est un objet de* $\mathrm{Hyp}_!(T)$, *alors* $\mathscr{M}_!(A)$ *est un module localement libre de rang* 1. *En particulier,* A *est un faisceau pervers vérifiant* $\chi(T, A) = 1$.

(2) *Un objet de* $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *est !-hypergéométrique si et seulement si son dual est* $*$*-hypergéométrique.*

(3) *Les complexes* $*$*-hypergéométriques vérifient les propriétés analogues à (i)–(iv) obtenues en remplaçant ! par* $*$.

(4) *Si* A *est un objet de* $\mathrm{Hyp}_{\mathrm{int}}(T)$ *et* B *est un objet de* $\mathrm{Hyp}_{\mathrm{int}}(T)$, *alors* $A *_{\mathrm{int}} B$ *est un objet de* $\mathrm{Hyp}_{\mathrm{int}}(T)$.

(5) *La catégorie* $\mathrm{Hyp}_{\mathrm{int}}(T)$ *est stable par dualité.*

Démonstration. Dans (1) on déduit (i) et (ii) directement des définitions et (iii) est conséquence de 8.1.1 (iii). On déduit alors (iv) de 3.5.2 et 8.1.1. Quant à (2) on le déduit de 8.1.1 (ii), (iv). L'énoncé (3) se déduit alors de (1) par dualité, (4) est conséquence directe des définitions et de 8.1.1, et (5) est conséquence de 3.7.4 (i) et de 8.1.1 (ii) et (iii). □

PROPOSITION 8.1.4. *Soit* A *un objet de* $\mathrm{Hyp}_!(T)$ *(resp.,* $\mathrm{Hyp}_*(T)$*).*

(i) *Tout quotient (resp., sous-objet) non nul* B *du faisceau pervers* A *est de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à* 1.

(ii) *Le faisceau pervers* A *admet un unique quotient (resp., sous-objet) irréductible* A^0 *qui admet la description suivante: si* A *est de la forme* $\mathrm{Hyp}(!, \lambda, (\chi_i), (\pi_i))$ *(resp.,* $\mathrm{Hyp}(*, \lambda, (\chi_i), (\pi_i))$*) avec les* π_i *non constants,* A^0 *est isomorphe au faisceau pervers* $\mathrm{Hyp}(\mathrm{int}, \lambda, (\chi_i), (\pi_i))$*: c'est l'image du morphisme canonique donné par l'oubli des supports*

$$\mathrm{Hyp}(!, \lambda, (\chi_i), (\pi_i)) \to \mathrm{Hyp}(*, \lambda, (\chi_i), (\pi_i)).$$

Démonstration. On va traiter le cas où A est un objet de $\mathrm{Hyp}_*(T)$, l'autre cas s'en déduisant par dualité. Soit B un sous-objet non nul du faisceau pervers A. Comme $\mathscr{M}_*(A)$ est localement libre de rang 1 d'après la proposition précédente, $\mathscr{M}_*(B)$ (qui est non nul d'après 3.4.6) est sans torsion. Le rang générique de $\mathscr{M}_*(B)$, qui est égal à $\chi(T, B)$, est donc strictement positif et inférieur ou égal à celui de $\mathscr{M}_*(A)$ qui est égal à 1. De même si B_1 et B_2 étaient deux sous-modules irréductibles distincts de A, $\mathscr{M}_*(B_1 \oplus B_2)$ serait un sous-module de $\mathscr{M}_*(A)$, de rang générique 2, ce qui est absurde. Pour la description de A^0 on remarque que, d'après 3.8.2 et 8.1.1, l'image du morphisme canonique

$$\mathrm{Hyp}(!, \lambda, (\chi_i), (\pi_i)) \to \mathrm{Hyp}(*, \lambda, (\chi_i), (\pi_i))$$

est le faisceau pervers $B = \mathrm{Hyp}(\mathrm{int}, \lambda, (\chi_i), (\pi_i))$. Ce faisceau pervers n'est pas nul car on a $\chi(T, B) = 1$ d'après 3.8.2. Supposons que B admette un sous-objet propre non nul C. D'après (i), on aurait $\chi(T, B) = \chi(T, C) = 1$. Comme B/C serait un quotient non nul de $\mathrm{Hyp}(!, \lambda, (\chi_i), (\pi_i))$, on aurait aussi, d'après (i), $\chi(T, B/C) = 1$, ce qui est absurde. □

COROLLAIRE 8.1.5. *Les objets de* $\mathrm{Hyp}_{\mathrm{int}}(T)$ *sont irréductibles et de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à 1. Un objet de* $\mathrm{Hyp}_!(T)$ *ou de* $\mathrm{Hyp}_*(T)$ *est irréductible si et seulement si il appartient à* $\mathrm{Hyp}_{\mathrm{int}}(T)$. □

COROLLAIRE 8.1.6. *Le monoïde* $(\mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T), *_{\mathrm{int}})$ *est un groupe abélien.*

Démonstration. Pour tout objet A de $\mathrm{Hyp}_{\mathrm{int}}(T)$, on a un isomorphisme

$$\mathrm{inv}^*(DA) *_{\mathrm{int}} A \simeq \delta_{\{1\}}$$

d'après 3.7.6 et 8.1.5. L'énoncé est donc conséquence de 8.1.3 (5) (et de l'isomorphisme $\mathrm{inv}^* \simeq \mathrm{inv}_*$): l'élément neutre est la classe de $\delta_{\{1\}}$ et l'inverse de la classe d'un objet A est la classe de l'objet $\mathrm{inv}^*(DA)$. □

LEMME 8.1.7. *Pour* $? = !, *, \mathrm{int}$, *on a l'inclusion*

$$\Delta(\mathrm{Hyp}(?, \lambda, (\chi_i), (\pi_i))) \subset \bigcup_{i \in I} \pi_i^{\vee -1}(\chi_i^{-1}),$$

pour I l'ensemble des i tels que π_i n'est pas constant.

Démonstration. Par la proposition 3.9.3 (iv), il suffit de traiter le cas de $R\pi_!(H(\psi; \chi))$ et $R\pi_*(H(\psi; \chi))$ pour $\pi\colon \mathbf{G}_{m,k} \to T$ un morphisme non constant. D'après 3.3.4(iii) et 8.1.1(iii), on a

$$\Delta(R\pi_!(H(\psi; \chi))) = \Delta(R\pi_*(H(\psi; \chi))) = \pi^{\vee -1}(\Delta(H(\psi; \chi))).$$

Comme les cycles proches modérés de $H(\psi; \chi)$ à l'origine sont ceux de $\mathscr{L}_\chi$ et que à l'infini $H(\psi; \chi)$ est complètement sauvage, on a $\Delta(H(\psi; \chi)) = \{\chi^{-1}\}$, d'après 7.3.3 (on peut aussi le vérifier directement). □

8.2. Caractérisation des faisceaux pervers irréductibles de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à 1. Le résultat suivant est un des résultats principaux de l'article.

THÉORÈME 8.2. *Soit T un tore sur k. Un objet A de* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *est irréductible et vérifie* $\chi(T, A) = 1$ *si et seulement si il est isomorphe à un objet de* $\mathrm{Hyp}_{\mathrm{int}}(T)$.

Remarques. (1) Quand T est de dimension 1 ce résultat est dû à N. Katz [K2, Theorem 8.5.3 et Theorem 8.4.2]. Nous utilisons dans la preuve du théorème 8.2 le cas de la dimension 1, ainsi que d'autres résultats du chapitre 8 de [K2].

(2) Dans [LS2] (voir l'énoncé correct dans II) on obtient un énoncé analogue pour les $\mathscr{D}$-modules holonomes sur un tore complexe.

8.3. Début de la démonstration. On commence par établir le résultat suivant.

PROPOSITION 8.3.1. *Soit A un faisceau pervers irréductible sur un tore T tel que $\chi(T, A) = 1$. On suppose que toutes les composantes irréductibles de $\Delta(A)$ sont de codimension au moins 2 dans $\mathscr{C}(T)$. Alors il existe un point fermé λ de T tel que A soit isomorphe à $\delta_{\{\lambda\}}$.*

Le lemme qui suit sera utilisé dans la démonstration.

LEMME 8.3.2. *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau ℓ-adique sur $\mathbf{G}_{m,k}$. Alors $\mathscr{F}$ est complètement sauvage en 0 et en ∞ si et seulement si $\Delta(\mathscr{F})$ est vide.*

Démonstration du lemme 8.3.2. Le cône

$$\text{Cône}(R\Gamma_c(\mathbf{G}_{m,k}, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}_\chi) \to R\Gamma(\mathbf{G}_{m,k}, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}_\chi))$$

est isomorphe à

$$R\Gamma(\eta_0, \mathscr{F}_{|\eta_0} \otimes \mathscr{L}_\chi) \oplus R\Gamma(\eta_\infty, \mathscr{F}_{|\eta_\infty} \otimes \mathscr{L}_\chi)$$

avec η_0 et η_∞ les points génériques des hensélisés de $\mathbf{P}^1$ en 0 et ∞, respectivement. Si $\mathscr{F}_{|\eta_0}$ ou $\mathscr{F}_{|\eta_\infty}$ avaient une partie modérée non nulle, il existerait un caractère χ dans $\mathscr{C}(\mathbf{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$ tel que l'un des objets $R\Gamma(\eta_0, \mathscr{F}_{|\eta_0} \otimes \mathscr{L}_\chi)$ ou $R\Gamma(\eta_\infty, \mathscr{F}_{|\eta_\infty} \otimes \mathscr{L}_\chi)$ soit non nul, et réciproquement. On conclut par 3.3.4 (i). □

Démonstration de la proposition 8.3.1. Soit n la dimension du tore T. Pour $n = 0$, l'énoncé est clair. Pour $n = 1$, c'est une conséquence du lemme suivant.

LEMME 8.3.3. *Soit A un faisceau pervers ℓ-adique sur $\mathbf{G}_{m,k}$. On suppose que $\chi(\mathbf{G}_{m,k}, A) = 1$ et que $\Delta(A)$ est vide. Alors il existe un point fermé λ de $\mathbf{G}_{m,k}$ tel que A soit isomorphe à $\delta_{\{\lambda\}}$.*

Démonstration du lemme 8.3.3. Rappelons qu'un objet B de $D_c^b(\mathbf{G}_{m,k}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est pervers si et seulement si $\mathscr{H}^i B = 0$ est nul pour $i \neq 0, -1$, $\mathscr{H}^0 B$ est ponctuel, et $\mathscr{H}^{-1} B$ est un faisceau sans partie ponctuelle sur $\mathbf{G}_{m,k}$. Par conséquent, si A n'était pas ponctuel, $\mathscr{H}^{-1} A$ serait un faisceau ℓ-adique non nul et sans partie ponctuelle sur $\mathbf{G}_{m,k}$. Comme $\Delta(\mathscr{H}^0 A) = 0$, on aurait aussi $\Delta(\mathscr{H}^{-1} A) = 0$ et d'après le lemme 8.3.2 $\mathscr{H}^{-1} A$ serait complètement sauvage en 0 et en ∞. On a $\chi(\mathbf{G}_{m,k}, A) = \chi(\mathbf{G}_{m,k}, \mathscr{H}^0 A) - \chi(\mathbf{G}_{m,k}, \mathscr{H}^{-1} A)$. Comme $\chi(\mathbf{G}_{m,k}, \mathscr{H}^0 A) \geqslant 0$ et $\chi(\mathbf{G}_{m,k}, A) = 1$, on a $\chi(\mathbf{G}_{m,k}, \mathscr{H}^{-1} A) \geqslant -1$. D'après la formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevich, on a $\chi(\mathbf{G}_{m,k}, \mathscr{H}^{-1} A) \leqslant -\mathrm{Sw}_0 \mathscr{H}^{-1} A - \mathrm{Sw}_\infty \mathscr{H}^{-1} A$, ce qui contredit que le fait que $\mathscr{H}^{-1} A$ soit complètement sauvage en 0 et en ∞. □

On suppose maintenant que $n \geqslant 2$. On fixe un isomorphisme $\varrho\colon T \simeq T_1 \times T_2$ avec T_1 (resp., T_2) un tore de dimension $n - 1$ (resp., 1), et on note p_1 et p_2

les projections. Comme toutes les composantes irréductibles de $\Delta(A)$ sont de codimension au moins 2 dans $\mathscr{C}(T)$, on peut supposer, comme dans la démonstration de la proposition 5.2.3, quitte à remplacer A par $A \otimes \mathscr{L}_\chi$, que l'intersection $p_2^\vee(\mathscr{C}(T_2)) \cap \Delta(A)$ est vide, et que le morphisme canonique $Rp_{2!}(A) \to Rp_{2*}(A)$ est un isomorphisme. Dans ce cas $Rp_{2!}(A)$ est un faisceau pervers sur T_2, d'après le lemme 2.4, et le schéma $\Delta(Rp_{2!}(A))$ est vide, d'après 3.3.4 (iii). D'après le lemme 8.3.3, il existe alors un point fermé λ de T_2 tel que $Rp_{2!}(A)$ soit isomorphe à $\delta_{\{\lambda\}}$.

Notons $U = T_2 - \{\lambda\}$, $T_U = p_2^{-1}(U)$ et j l'inclusion $T_U \to T$; ϱ induit un isomorphisme $T_U \simeq T_1 \times U$. Etant donné un tore quotient $T_1 \to T'$, on note p la projection $T \to T' \times T_2$, p_U sa restriction $T_U \to T' \times U$, et π' la projection $T_U \to T_1$. Si $j^*(A)$ n'est pas nul, il est irréductible, et, d'après le théorème 5.1.2 appliqué à la projection π: $T_1 \times U \to U$, il existe un tore quotient $T_1 \to T'$ de dimension $n-2$, un caractère χ dans $\mathscr{C}(T_1, \mathbf{Q}_\ell^\times)$, et un faisceau pervers ℓ-adique A' sur $T' \times U$, tels que on ait un isomorphisme

$$j^*(A) \simeq \pi'^*(\mathscr{L}_\chi) \otimes p_U^*(A'[1]).$$

Le faisceau pervers $K := j_{!*}j^*A$ est alors de la forme

$$K \simeq \pi'^*(\mathscr{L}_\chi) \otimes p^*(A''[1])$$

avec A'' pervers sur $T' \times T_2$. En particulier on a alors $\chi(T, K) = 0$. Or A étant irréductible, on a $A \simeq K$, ce qui est incompatible avec $\chi(T, A) = 1$. On a donc démontré que, pour tout quotient de tores $\pi : T \to \mathbf{G}_{m,k}$, il existe un point fermé λ de $\mathbf{G}_{m,k}$ tel que le support de A soit contenu dans $\pi^{-1}(\lambda)$. En faisant varier π, on en déduit que A est à support un point fermé de T, ce qui donne le résultat voulu. □

8.4. Faisceaux hypergéométriques associés à un faisceau pervers. Soit S un sous-tore de dimension 1 de T. On reprend les notations de 7.3 et 7.5. On s'est donné en 8.1 une immersion j: $\mathbf{G}_{m,k} \to \mathbf{A}_k^1$. Pour x dans $\bar{S} - S$, on note $\varphi_{S,x}$ l'unique isomorphisme de tores $\varphi_{S,x}$: $\mathbf{G}_{m,k} \to S$ dont le prolongement aux compactifiés envoie 0 sur x.

Soit A un objet de $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. On associe à A l'objet suivant de $\mathrm{Hyp}_*(T)$:

$$H_*(A) := *_*\big((Ri_{S*}(R\varphi_{S,x*}(H(\psi,1)) \otimes \mathscr{L}_{\chi^{-1}}))^{n_{S,x,\chi}(A)}\big),$$

le produit étant pris sur tous les S, x et χ. On note multiplicativement le produit $*_*$ sur $\mathrm{Hyp}_*(T)$ et on convient qu'un produit de convolution indexé par l'ensemble vide est égal à $\delta_{\{1\}}$. De même, on pose

$$H_!(A) := *_!\big((Ri_{S!}(R\varphi_{S,x!}(H(\psi,1)) \otimes \mathscr{L}_{\chi^{-1}}))^{n_{S,x,\chi}(A)}\big)$$

et

$$H_{\mathrm{int}}(A) := *_{\mathrm{int}}\big((Ri_{S!}(R\varphi_{S,x!}(H(\psi,1)) \otimes \mathscr{L}_{\chi^{-1}}))^{n_{S,x,\chi}(A)}\big).$$

On a $H_{\mathrm{int}}(A) \simeq (H_*(A))_{\mathrm{int}} \simeq (H_!(A))_{\mathrm{int}}$, d'après la proposition 8.1.4.

PROPOSITION 8.4.1. *Soit T un k-tore et soit A un objet de* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. *On considère un isomorphisme de tores $T \simeq T' \times T''$ avec T' de dimension* 1. *On note p_i les projections. On suppose que, pour tout S dans $\mathscr{S}(A)$, l'intersection $S \cap \ker p_1$ est finie. Alors, pour ω-presque tout χ_0 dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, l'objet $Rp_{1*}(A \otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0})$ est un faisceau pervers, et il existe un point fermé λ de T' tel que l'on ait un isomorphisme*

$$H_*(Rp_{1*}(A \otimes \mathscr{L}_{\chi_0})) \simeq \delta_{\{\lambda\}} *_* Rp_{1*}(H_*(A \otimes \mathscr{L}_{\chi_0})).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 7.5.1 et du lemme suivant (formule de Davenport-Hasse). □

LEMME 8.4.2. *Soit N un entier non nul. Soit π: $\mathbf{G}_{m,k} \to \mathbf{G}_{m,k}$ le morphisme de tores $x \mapsto x^N$. Il existe un point fermé λ de $\mathbf{G}_{m,k}$ tel que l'on ait un isomorphisme*

$$R\pi_*(H(\psi,\chi)) \simeq \delta_{\{\lambda\}} *_* (*_{*E}(H(\psi,\chi'))),$$

en notant E l'ensemble des caractères χ' vérifiant $\chi'^N = \chi$.

Démonstration. Le cas $N = p$ étant clair, on peut supposer que N est premier à p, et dans ce cas l'énoncé est démontré dans [K1, 5.6.2]. □

PROPOSITION 8.4.3. *Soit T un k-tore et soit A un objet de* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. *On considère un isomorphisme de tores $T \simeq T' \times T''$ avec T' de dimension* 1. *On note p_i les projections. On suppose que, pour tout S dans $\mathscr{S}(A)$, l'intersection $S \cap \ker p_1$ est finie. Alors, pour ω-presque tout χ_0 dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$, l'objet $Rp_{1*}(A \otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0})$ est un faisceau pervers, $Rp_{1*}(H_{\mathrm{int}}(A \otimes \mathscr{L}_{\chi_0}))$ est un objet de* $\mathrm{Hyp}_{\mathrm{int}}(T')$ *et il existe un point fermé λ de T' tel que l'on ait un isomorphisme*

$$H_{\mathrm{int}}(Rp_{1*}(A \otimes \mathscr{L}_{\chi_0})) \simeq \delta_{\{\lambda\}} *_{\mathrm{int}} Rp_{1*}(H_{\mathrm{int}}(A \otimes \mathscr{L}_{\chi_0})).$$

Démonstration. Commençons par remarquer que, pour tout point fermé χ_0 de $\mathscr{C}(T'')$, on a des isomorphismes canoniques $H_*(A \otimes \mathscr{L}_{\chi_0}) \simeq H_*(A) \otimes \mathscr{L}_{\chi_0}$ et $H_{\mathrm{int}}(A \otimes \mathscr{L}_{\chi_0}) \simeq H_{\mathrm{int}}(A) \otimes \mathscr{L}_{\chi_0}$, d'après 2.6. D'après la proposition 8.4.1, pour ω-presque tout χ_0 dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$, l'objet $Rp_{1*}(A \otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0})$ est un faisceau pervers, et il existe un point fermé λ de T' tel que l'on ait un isomorphisme

$$H_*(Rp_{1*}(A \otimes \mathscr{L}_{\chi_0})) \simeq \delta_{\{\lambda\}} *_* Rp_{1*}(H_*(A \otimes \mathscr{L}_{\chi_0})).$$

En appliquant le foncteur int, on en déduit que, pour ω-presque tout χ_0 dans

$\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$, on a des isomorphismes

$$H_{\mathrm{int}}(Rp_{1*}(A \otimes \mathscr{L}_{\chi_0})) \simeq (\delta_{\{\lambda\}} *_* Rp_{1*}(H_*(A \otimes \mathscr{L}_{\chi_0})))_{\mathrm{int}}$$

$$\simeq \delta_{\{\lambda\}} *_{\mathrm{int}} Rp_{1*}(H_*(A \otimes \mathscr{L}_{\chi_0}))_{\mathrm{int}} \tag{8.4.3.1}$$

$$\simeq \delta_{\{\lambda\}} *_{\mathrm{int}} Rp_{1*}(H_*(A) \otimes \mathscr{L}_{\chi_0})_{\mathrm{int}} \tag{8.4.3.2}$$

$$\simeq \delta_{\{\lambda\}} *_{\mathrm{int}} Rp_{1*}(H_{\mathrm{int}}(A) \otimes \mathscr{L}_{\chi_0}) \tag{8.4.3.3}$$

$$\simeq \delta_{\{\lambda\}} *_{\mathrm{int}} Rp_{1*}(H_{\mathrm{int}}(A \otimes \mathscr{L}_{\chi_0})). \tag{8.4.3.4}$$

L'isomorphisme (8.4.3.3) est conséquence du corollaire 6.4.5, et les autres sont clairs. □

8.5. Fin de la démonstration. Le théorème 8.2 est conséquence directe du résultat plus précis suivant et du corollaire 8.1.5.

THÉORÈME 8.5.1. *Soit T un tore de dimension n sur k. Soit A un objet irréductible de* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *vérifiant* $\chi(T, A) = 1$. *Il existe un point fermé λ de T tel que l'on ait un isomorphisme*

$$A \simeq \delta_{\{\lambda\}} *_{\mathrm{int}} H_{\mathrm{int}}(A).$$

Démonstration. Soit $H_{\mathrm{int}}(A)^{-1} = \mathrm{inv}^* D(H_{\mathrm{int}}(A))$ l'inverse de $H_{\mathrm{int}}(A)$ dans le groupe $\mathbf{H}_{\mathrm{int}(T)}$ (cf. 8.1.6). Il suffit de démontrer que le faisceau pervers

$$B = A *_{\mathrm{int}} H_{\mathrm{int}}(A)^{-1}$$

est à support ponctuel. Pour cela, d'après la proposition 8.3.1, il est suffisant d'établir que le fermé $\Delta(B)$ est partout de codimension au moins 2 dans $\mathscr{C}(T)$.

Le fermé $\Delta(B)$ est contenu dans $\Delta(A)$. En effet, d'après 3.9.3 (iv), il suffit de vérifier que $\Delta(H_{\mathrm{int}}(A)^{-1})$ est contenu dans $\Delta(A)$. D'après 8.1.7, $\Delta(H_{\mathrm{int}}(A))$ est contenu dans $\Delta(A)$, et on a $\Delta(H_{\mathrm{int}}(A)^{-1}) = \Delta(H_{\mathrm{int}}(A))$ par 3.3.4 (i).

Fixons un isomorphisme de tores $T \simeq T' \times T''$ avec T' de dimension 1. On note p_i les projections. On suppose que, pour tout S dans $\mathscr{S}(A)$, l'intersection $S \cap \ker p_1$ est finie. Remarquons que, comme $\Delta(B)$ est contenu dans $\Delta(A)$, la condition précédente vaut aussi pour $\mathscr{S}(B)$, d'après 7.3.5.

D'après la proposition 3.7.7 et la proposition 6.4.4, pour ω-presque tout χ_0 dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$, l'objet

$$C = Rp_{1*}(A \otimes p_2^* \mathscr{L}_{\chi_0})$$

est un objet de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. D'après la proposition 3.7.7, C est un faisceau pervers irréductible sur T' de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à 1.

LEMME 8.5.2. *Pour ω-presque tout χ_0 dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$, il existe un point fermé λ de T'' tel que l'on ait un isomorphisme*

$$Rp_{1*}(B \otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0}) \simeq \delta_{\{\lambda\}} *_{\text{int}} (C *_{\text{int}} H_{\text{int}}(C)^{-1}).$$

Démonstration. Pour ω-presque tout χ_0 dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$, on a des isomorphismes

$$Rp_{1*}(B \otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0}) \simeq Rp_{1*}((A \otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0}) *_{\text{int}} (H_{\text{int}}(A)^{-1} \otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0}))$$

$$\simeq Rp_{1*}((A \otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0}) *_{\text{int}} (H_{\text{int}}(A \otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0})^{-1})) \tag{8.5.2.1}$$

$$\simeq Rp_{1*}(A \otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0}) *_{\text{int}} Rp_{1*}(H_{\text{int}}(A \otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0})^{-1}). \tag{8.5.2.2}$$

L'isomorphisme (8.5.2.2) est conséquence du corollaire 6.4.6, et (8.5.2.1) est clair. D'autre part, pour ω-presque tout χ_0 dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$, on a des isomorphismes canoniques

$$Rp_{1*}(H_{\text{int}}(A \otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0})^{-1}) \simeq Rp_{1*}(\text{inv}^*D(H_{\text{int}}(A \otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0})))$$

$$\simeq \text{inv}^*D(Rp_{1!}(H_{\text{int}}(A \otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0}))) \tag{8.5.2.3}$$

$$\simeq \text{inv}^*D(Rp_{1!}(H_{\text{int}}(A) \otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0})) \tag{8.5.2.4}$$

$$\simeq \text{inv}^*D(Rp_{1*}(H_{\text{int}}(A) \otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0})) \tag{8.5.2.5}$$

$$\simeq \text{inv}^*D(Rp_{1*}(H_{\text{int}}(A \otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0}))). \tag{8.5.2.6}$$

L'isomorphisme (8.5.2.5) est conséquence de 4.7.2, les autres sont clairs. La proposition 8.4.3 permet maintenant de conclure. □

Supposons que $\Delta(B)$ ait une composante irréductible de codimension 1. L'ensemble $\mathscr{S}(B)$ serait alors non vide, d'après le théorème 7.3.5. D'après la proposition 7.5.1, ceci entraînerait que, pour ω-presque tout χ_0 dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$, $\Delta(Rp_{1*}(B \otimes p_2^*\mathscr{L}_{\chi_0}))$ serait non vide, et par conséquent, d'après le lemme 8.5.2, pour ω-presque tout χ_0 dans $\mathscr{C}(T'', \overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times)$, le fermé $\Delta(C *_{\text{int}} H_{\text{int}}(C)^{-1})$ serait non vide. Il suffit donc de démontrer l'énoncé du théorème quand $n = 1$.

Soit $\text{Hyp}(!, \lambda, (\chi_i), (\pi_i))$ un objet de $\text{Hyp}_!(\mathbf{G}_{m,k})$. On pose $J_0 = \{i | \pi_i = \text{id}\}$ et $J_\infty = \{i | \pi_i = \text{inv}\}$. On dit que $((\chi_i), (\pi_i))$ est réduit si les π_i sont tous égaux à id ou à inv et si pour tout $(i, j) \in J_0 \times J_\infty$ on a $\chi_i \neq \chi_j^{-1}$.

D'après N. Katz [K2, 8.4.10.1 et 8.5.3], un faisceau pervers A sur $\mathbf{G}_{m,k}$ tel que $\chi(\mathbf{G}_{m,k}, A) = 1$ est irréductible si et seulement si il est isomorphe à un faisceau pervers de la forme $\text{Hyp}(!, \lambda, (\chi_i), (\pi_i))$ avec $((\chi_i), (\pi_i))$ réduit.

De plus, d'après le calcul de la monodromie locale des faisceaux pervers $\mathrm{Hyp}(!, \lambda, (\chi_i), (\pi_i))$ effectué en [K2, 8.4.11], si A est un faisceau pervers sur $\mathbf{G}_{m,k}$ isomorphe à $\mathrm{Hyp}(!, \lambda, (\chi_i), (\pi_i))$ avec $((\chi_i), (\pi_i))$ réduit, on déduit de 7.3.3 (ou on vérifie directement) que le support de $\Delta \mathscr{M}_{\mathbf{G}_{m,k},0}(A)$ est l'ensemble des χ_i^{-1}, avec i dans J_0, que le support de $\Delta \mathscr{M}_{\mathbf{G}_{m,k},\infty}(A)$ est l'ensemble des χ_i, avec i dans J_∞, et que la longueur de $\Delta \mathscr{M}_{\mathbf{G}_{m,k},0}(A)$ (resp., $\Delta \mathscr{M}_{\mathbf{G}_{m,k},\infty}(A)$) au point χ_i^{-1} (resp., χ_i) est égale à la multiplicité de χ_i dans J_0 (resp., J_∞). On a donc $A \simeq \delta_{\{\lambda\}} *_{\mathrm{int}} H_{\mathrm{int}}(A)$, ce qui termine la démonstration du théorème 8.5.1. □

8.6. Le groupe $\mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T)$. Soit T un tore de dimension n sur k.

Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des sous-tores de dimension 1 de T. Pour S dans $\mathscr{S}$ on note $i_S \colon S \to T$ l'inclusion. Pour tout S dans $\mathscr{S}$ on se donne un isomorphisme de tores $\varphi_S \colon \mathbf{G}_{m,k} \to S$.

Soit $\mathscr{H}_{\mathrm{int}}(T)$ le groupe abélien

$$\mathscr{H}_{\mathrm{int}}(T) := T(k) \times \mathbf{Z}^{(\mathscr{S} \times \mathscr{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\overline{\mathbf{Q}}_\ell))}.$$

On définit alors un morphisme de groupes abéliens

$$\Phi \colon \mathscr{H}_{\mathrm{int}}(T) \to \mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T)$$

en associant à (λ, n), pour λ dans $T(k)$ et n une fonction $\mathscr{S} \times \mathscr{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to \mathbf{Z}$ à support fini, la classe de $\delta_{\{\lambda\}} *_{\mathrm{int}} (*_{\mathrm{int}\, S,\chi}(R(i_S \circ \varphi_S)_* H(\psi; \chi))^{n(S,\chi)})$. (On note multiplicativement le produit $*_{\mathrm{int}}$ et on convient qu'un produit de convolution indexé par l'ensemble vide est égal à $\delta_{\{1\}}$.)

THÉORÈME 8.6.1. *Le morphisme* $\Phi \colon \mathscr{H}_{\mathrm{int}}(T) \to \mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T)$ *est un isomorphisme de groupes abéliens.*

Démonstration. La surjectivité de Φ étant claire, démontrons l'injectivité.

Si $x = (\lambda, n)$ appartient à $\mathscr{H}_{\mathrm{int}}(T)$ on note $\mathscr{S}(x)$ la projection du support de n sur $\mathscr{S}$. Il est clair que si $\Phi(x) = 1$ et $|\mathscr{S}(x)| = 0$, alors $x = (1, 0)$. Dans le cas général l'énoncé est conséquence de l'assertion suivante: si $\Phi(x)$ est à support ponctuel, alors $|\mathscr{S}(x)| = 0$. D'après 8.1.7 (ou plutôt sa preuve), le fermé $\Delta(\Phi(x))$ est contenu dans une réunion finie de cotores algébriques translatés de la forme $i_S^{\vee -1}(t)$, avec S dans $\mathscr{S}(x)$ et t point fermé de $\mathscr{C}(S)$.

Si $|\mathscr{S}(x)| = 1$ et si T est de dimension 1, alors $\Phi(x)$ ne peut pas être ponctuel. En effet, soit x dans $\mathscr{H}_{\mathrm{int}}(\mathbf{G}_{m,k})$ avec $|\mathscr{S}(x)| = 1$. Dans ce cas, comme, d'après 8.1.1 (ii), on a $H(\psi, \chi)^{-1} \simeq \mathrm{inv}^*(\delta_{\{-1\}} *_* H(\psi, \chi^{-1}))$, $\Phi(x)$ est de la forme Hyp(int, $\lambda, (\chi_i), (\pi_i))$ avec $((\chi_i), (\pi_i))$ réduit et non vide, ce qui entraîne, d'après 8.1.4 et [K2, 8.4.10.1 et 8.4.11], que $\Phi(x)$ n'est pas ponctuel. En général, si $|\mathscr{S}(x)| = 1$, on a $\Phi(x) = \delta_{\{\lambda\}} *_{\mathrm{int}} Ri_{S*}(A)$ avec λ un point fermé de T, A un objet non ponctuel de $\mathrm{Hyp}_{\mathrm{int}}(S)$ et S de dimension 1, et donc $\Phi(x)$ ne peut pas être ponctuel. Si $|\mathscr{S}(x)| \geqslant 2$, on peut écrire $x = x_1 \cdot x_2^{-1}$ avec $\mathscr{S}(x_1)$ et $\mathscr{S}(x_2)$ non vides disjoints et $|\mathscr{S}(x_1)| = 1$. Si $\Phi(x)$ était ponctuel, il existerait un point fermé λ de T tel que

$\Phi(x_1) = \delta_{\{\lambda\}} *_{\mathrm{int}} \Phi(x_2)$. On aurait alors $\Delta(\Phi(x_1)) = \Delta(\Phi(x_2))$. Mais, par ailleurs, $\Delta(\Phi(x_1)) \cap \Delta(\Phi(x_2))$ est partout de codimension au moins 2, ce qui entraîne, d'après 8.3.1, que $\Phi(x_1)$ est ponctuel, et conduit à une contradiction. $\square$

Remarque. Le théorème 0.2 de l'introduction est conséquence directe des théorèmes 8.2 et 8.6.1.

9. L'analogue pour les $\mathscr{D}$-modules du théorème 5.1.1. Dans cette section on montre comment en utilisant la transformation de Mellin des $\mathscr{D}$-modules on peut obtenir l'analogue pour les $\mathscr{D}$-modules du théorème 5.1.1.

On rappelle brièvement la définition de la transformation de Mellin algébrique et certaines de ses propriétés et on renvoie à [LS1] et [LS2] pour plus de détails. On pose $\mathbf{G}_m = \operatorname{Spec} \mathbf{C}[x, x^{-1}]$ et $(\mathbf{G}_m)^n = \operatorname{Spec} \mathbf{C}[x, x^{-1}]$ avec $x = (x_1, \dots, x_n)$. Pour $n \geqslant 0$, un tore complexe T de dimension n est un $\mathbf{C}$-schéma en groupes isomorphe à $(\mathbf{G}_m)^n$. On note $\mathscr{D}$ l'anneau des opérateurs différentiels algébriques sur le tore $(\mathbf{G}_m)^n$: $\mathscr{D} = \mathbf{C}[x, x^{-1}]\langle D\rangle$ avec $D = (D_1, \dots, D_n)$ et $D_i = x_i \partial_{x_i}$, la définition s'étendant aux tores par transport de structure. On pose $s_i = -D_i$ et $\tau_i = x_i$ de sorte que l'anneau $\mathbf{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ s'identifie à l'anneau $\mathbf{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$ des opérateurs algébriques aux différences finies défini dans l'introduction. Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}$-module (à gauche) holonome. Le transformé de Mellin du $\mathscr{D}$-module $\mathscr{M}$, noté $\mathfrak{M}(\mathscr{M})$, est par définition le module $\mathscr{M}$ vu comme $\mathbf{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$-module.

Il résulte du théorème de Bernstein que $\mathbf{C}(s) \otimes_{\mathbf{C}[s]} \mathfrak{M}(\mathscr{M})$ (noté dans la suite $\mathfrak{M}(\mathscr{M})(s)$) est de dimension finie sur $\mathbf{C}(s)$: on vérifie en effet que

$$\mathfrak{M}(\mathscr{M})(s) = p_+(\mathscr{M} \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}(s)x^s)$$

où $p\colon \operatorname{Spec} \mathbf{C}(s)[x, x^{-1}] \to \operatorname{Spec} \mathbf{C}(s)$ est la projection (cf. [LS1, Théorème 1.2.1]).

Pour tout tore T de dimension n et tout $\mathscr{D}_T$-module holonome $\mathscr{M}$ on note $\chi(T, \mathscr{M})$ la caractéristique d'Euler du complexe de de Rham algébrique

$$\mathrm{DR}(\mathscr{M}) := \Omega_T^{\cdot} \otimes_{\mathscr{O}} \mathscr{M}[n].$$

THÉORÈME 9.1 [LS2]. *Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}$-module holonome sur $(\mathbf{G}_m)^n$, alors $\chi((\mathbf{G}_m)^n, \mathscr{M}) = \dim_{\mathbf{C}(s)} \mathfrak{M}(\mathscr{M})(s)$.*

L'analogue pour les $\mathscr{D}$-modules du théorème 5.1.1 est le résultat suivant.

THÉORÈME 9.2. *Soit T un tore complexe de dimension $n \geqslant 0$ et soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}$-module holonome irréductible sur le tore T, vérifiant $\chi(T, \mathscr{M}) = 0$. Alors il existe une décomposition en produit de tores $T \simeq T' \times \mathbf{G}_m$ telle que via cette décomposition $\mathscr{M}$ soit isomorphe à un module de la forme $p_1^*(\mathscr{M}') \otimes p_2^*(\mathscr{M}_\alpha)$ avec $\mathscr{M}'$ un $\mathscr{D}$-module holonome sur T' et $\mathscr{M}_\alpha$ un $\mathscr{D}$-module de Kummer sur $\mathbf{G}_m$, c'est à dire de la forme $\mathscr{M}_\alpha := \mathscr{D}/\mathscr{D}(x\partial_x - \alpha)$, ($p_1$ et p_2 désignant les projections).*

Démonstration. Comme il n'y a rien a démontrer si $n = 0$, on suppose que $n \geqslant 1$. On choisit un isomorphisme de tores $\varphi\colon T \simeq (\mathbf{G}_m)^n$. D'après [S] théorème 2.2, le $\mathbf{C}[s]$-module $\mathfrak{M}(\mathscr{M})$ est localement libre en dehors des translatés entiers d'un nombre fini d'hyperplans de la forme $\ell(s) - \alpha = 0$ avec $\ell(s)$ une forme linéaire à coefficients entiers premiers entre eux dans leur ensemble et α dans $\mathbf{C}$. D'après le théorème 9.1 l'hypothèse $\chi(T, \mathscr{M}) = 0$ entraîne que $\mathfrak{M}(\mathscr{M})$ est à support dans les translatés entiers d'un nombre fini d'hyperplans de cette forme. Il existe donc une forme linéaire à coefficients entiers premiers entre eux dans leur ensemble $\ell(s)$ et α dans $\mathbf{C}$ tels que le noyau de $\ell(s) - \alpha$ dans $\mathfrak{M}(\mathscr{M})$ ne soit pas réduit à 0. Comme $\mathfrak{M}(\mathscr{M})$ est irréductible, le noyau $\mathrm{Ker}(\ell(s) - \alpha)$ engendre le $\mathbf{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$-module $\mathfrak{M}(\mathscr{M})$. Quitte à changer φ, on peut supposer que $\ell(s)$ est de la forme $\ell(s) = s_n$. Choisissons $T' = (\mathbf{G}_m)^{n-1}$ tel que $p_1\colon T \to T'$ et $p_2\colon T \to \mathbf{G}_m$ correspondent respectivement à la projection sur les $n-1$ premiers facteurs de $(\mathbf{G}_m)^n$ et à la projection sur le dernier facteur. On obtient que $\mathscr{M}$ a la forme requise en posant $\mathscr{M}' = \mathscr{H}^{-1}p_{1+}(\mathscr{M} \otimes p_2^*(\mathscr{M}_{-\alpha}))$. $\square$

Appendice

A.1. Extension des scalaires et formule des coefficients universels. Soient R et T des anneaux locaux réguliers. On note $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ les idéaux maximaux correspondants et, pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $R_n = R/\mathfrak{M}^n$ et $T_n = T/\mathfrak{N}^n$. On suppose que R et T sont complets et que R_1 et T_1 sont des corps de caractéristique $\ell > 0$. On se donne un morphisme local $R \to T$.

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p différente de ℓ. On reprend les notations et définitions de [E] a ceci près que, pour un k-schéma séparé et de type fini X, on notera $D(X, R)$ au lieu de $D(X - R)$, etc. ..., les catégories triangulées définies loc. cit. 2.5 et 3.3, et que, pour éviter les confusions, on notera

$$\pi_R\colon (X^{\mathbf{N}}, R.) \to (X, R)$$

et

$$\pi_T\colon (X^{\mathbf{N}}, T.) \to (X, T)$$

les morphismes de topos annelés comme définis loc. cit., p. 198. De plus, on note $c \subset R_1$-mod (resp., T_1-mod) la sous catégorie des R_1-modules (resp., T_1-modules) constructibles.

Définition-Proposition A.1.1. *Soit X un k-schéma séparé et de type fini.*

(i) *Pour tout objet M de $D^b(X, R)$ on pose*

$$T \otimes_R^L M := L\pi_T^*(T \otimes_R^L R\pi_{R*}M).$$

C'est un objet de $D^b(X, T)$, et on définit ainsi un foncteur exact

$$T \otimes_R^L\colon D^b(X, R) \to D^b(X, T).$$

(ii) *Soit M un objet de $D^b(X, R)$. On a, pour tout $n \geqslant 1$, un isomorphisme canonique*

$$T_n \otimes_T^L (T \otimes_R^L M) \simeq T_n \otimes_{R_n}^L (R_n \otimes_R^L M).$$

(iii) *Le foncteur $T \otimes_R^L$ induit un foncteur exact $D_c^b(X, R) \to D_c^b(X, T)$.*

(iv) *Soit M un objet de $D^b(X, R)$ qui est isomorphe à un R-faisceau constructible. Alors $H^0(T \otimes_R^L M)$ est canoniquement isomorphe au T-faisceau constructible obtenu par extension "naïve" des scalaires.*

Démonstration. Soit M un objet de $D^b(X, R)$. Comme π_R est de dimension cohomologique finie (loc. cit. Lemme 1.3 (i)) et que T a une résolution finie par des R-modules projectifs, le complexe $T \otimes_R^L R\pi_{R*}M$ est un objet de $D^b(X, T)_{\text{lit}}$ et donc, d'après loc. cit. Proposition 2.2 (iii), $L\pi_T^*(T \otimes_R^L R\pi_{R*}M)$ est un complexe borné normalisé, et définit donc un objet de $D^b(X, T)$. Pour démontrer que $T \otimes_R^L$ est un foncteur exact $D^b(X, R) \to D^b(X, T)$, il suffit de vérifier que si M est négligeable, alors $T \otimes_R^L M$ est négligeable. Comme (cf. loc. cit. p. 204), un objet M de $D^b(X, R)$ est négligeable si et seulement si $R_1 \otimes_R^L M = 0$, cela résulte de (ii).

Démontrons (ii). Soit M un objet de $D^b(X, R)$. Par définition on a

$$T_n \otimes_T^L (T \otimes_R^L M) = T_n \otimes_T^L R\pi_{T*}(L\pi_T^*(T \otimes_R^L R\pi_{R*}M)).$$

Comme, d'après loc. cit. p. 203, pour tout objet N de $D^b(X, T)_{\text{lit}}$ on a

$$T_n \otimes_T^L R\pi_{T*}L\pi_T^*N \simeq T_n \otimes_T^L N,$$

on a

$$\begin{aligned} T_n \otimes_T^L (T \otimes_R^L M) &\simeq T_n \otimes_T^L (T \otimes_R^L R\pi_{R*}M) \\ &\simeq T_n \otimes_{R_n}^L (R_n \otimes_R^L R\pi_{R*}M) \\ &\simeq T_n \otimes_{R_n}^L (R_n \otimes_R^L M). \end{aligned}$$

L'énoncé (iii) est une conséquence de (ii), car si $R_1 \otimes_R^L M$ est constructible, alors $T_1 \otimes_{R_1}^L (R_1 \otimes_R^L M)$ est constructible. L'énoncé (iv) est clair. □

Dans les cas où il faudrait garder trace du morphisme $\alpha: R \to T$, on utilisera la notation $T \otimes_\alpha^L M$ au lieu de $T \otimes_R^L M$.

En général, si M est un objet de $D^b(X, R)$ (resp., $D_c^b(X, R)$) et si N est un objet de $D^b(X, T)$ (resp., $D_c^b(X, T)$), on pose

$$M \otimes_R^L N := (T \otimes_R^L M) \otimes_T^L N.$$

C'est un objet de $D^b(X, T)$ (resp., $D_c^b(X, T)$).

PROPOSITION A.1.2. *Soit M un objet de $D^b(X,R)$ et soit N un objet de $D^b(X,T)$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a des isomorphismes canoniques*

$$T_n \otimes^L_T (M \otimes^L_R N) \simeq (R_n \otimes^L_R M) \otimes^L_{R_n} (T_n \otimes^L_T N).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} T_n \otimes^L_T (M \otimes^L_R N) &\simeq (T_n \otimes^L_T (T \otimes^L_R M)) \otimes^L_{T_n} (T_n \otimes^L_T N) \\ &\simeq (T_n \otimes^L_{R_n} (R_n \otimes^L_R M)) \otimes^L_{T_n} (T_n \otimes^L_T N) \\ &\simeq (R_n \otimes^L_R M) \otimes^L_{R_n} (T_n \otimes^L_T N), \end{aligned}$$

le premier isomorphisme étant conséquence de [E, 4.2.(i)], et le second de A.1.1 (ii). □

LEMME A.1.3. *Soient A et B des objets de $D^b_c(X,R)$. A la donnée, pour tout $n \geqslant 1$, d'isomorphismes compatibles*

$$\varphi_n \colon R_n \otimes^L_R A \simeq R_n \otimes^L_R B$$

est canoniquement associé un isomorphisme $A \simeq B$ dans $D^b_c(X,R)$.

Démonstration. On a une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 &\to \varprojlim{}^{(1)} \operatorname{Ext}^{-1}(R_n \otimes^L_R A, R_n \otimes^L_R B) \\ &\to \operatorname{Hom}(R\pi_{R*}A, R\pi_{R*}B) \to \varprojlim \operatorname{Hom}(R_n \otimes^L_R A, R_n \otimes^L_R B) \to 0 \end{aligned}$$

et l'hypothèse de constructibilité assure, par Mittag-Leffler, que $\varprojlim^{(1)} \operatorname{Ext}^{-1}(R_n \otimes^L_R A, R_n \otimes^L_R B)$ est nul. Par conséquent, la donnée des φ_n est équivalente à celle d'un isomorphisme $R\pi_{R*}A \simeq R\pi_{R*}B$, d'où le résultat, car dans $D^b(X,R)$ tout objet C est canoniquement isomorphe à $L\pi^*_R R\pi_{R*}C$ (cf. [E, 2.2.(i)]). □

PROPOSITION A.1.4 (Associativité du produit tensoriel). *Soient R, T, et U des anneaux locaux réguliers, complets et de corps résiduels de caractéristique $\ell > 0$. On se donne des morphismes locaux $R \to T \to U$. Soit M un objet de $D^b_c(X,R)$, N un objet de $D^b_c(X,T)$, et P un objet de $D^b_c(X,U)$. On a un isomorphisme canonique*

$$(M \otimes^L_R N) \otimes^L_T P \simeq M \otimes^L_R (N \otimes^L_T P).$$

Démonstration. C'est une conséquence de l'associativité usuelle du produit tensoriel, compte tenu de la proposition A.1.2 et du lemme A.1.3. □

PROPOSITION A.1.5. *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme entre schémas séparés de type fini sur k.*

(i) *Formule des coefficients universels: Pour tout objet E de $D_c^b(X, R)$, on a un isomorphisme canonique*

$$T \otimes_R^L Rf_*E \simeq Rf_*(T \otimes_R^L E).$$

Plus généralement, si F est un T-faisceau lisse sur Y, on a un isomorphisme canonique

$$(Rf_*E) \otimes_R^L F \simeq Rf_*(E \otimes_R^L f^*F).$$

(ii) *Formule de projection: Pour tout objet E de $D_c^b(X, R)$, (resp., $D_c^b(X, T)$,) et tout objet F de $D_c^b(Y, T)$ (resp., $D_c^b(Y, R)$), on a un isomorphisme canonique*

$$(Rf_!E) \otimes_R^L F \simeq Rf_!(E \otimes_R^L f^*F)$$

(resp., $F \otimes_R^L (Rf_!E) \simeq Rf_!(f^*F \otimes_R^L E)$).

(iii) *Image inverse: Pour tout objet E de $D_c^b(Y, R)$, et tout objet F de $D_c^b(Y, T)$, on a un isomorphisme canonique*

$$f^*(E \otimes_R^L F) \simeq f^*(E) \otimes_R^L f^*(F).$$

Démonstration. Pour démontrer le premier énoncé de (i), il suffit, d'après le lemme A.1.3, de vérifier que, pour tout $n \geqslant 1$, on a un isomorphisme canonique entre

$$\begin{aligned} T_n \otimes_T^L (T \otimes_R^L Rf_*E) &\simeq T_n \otimes_{R_n}^L (R_n \otimes_R^L Rf_*E) \\ &\simeq T_n \otimes_{R_n}^L Rf_*(R_n \otimes_R^L E) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_n \otimes_T^L Rf_*(T \otimes_R^L E) &\simeq Rf_*(T_n \otimes_T^L (T \otimes_R^L E)) \\ &\simeq Rf_*(T_n \otimes_{R_n}^L (R_n \otimes_R^L E)), \end{aligned}$$

ce qui résulte de [SGA4$\frac{1}{2}$, Th. finitude Appendice Remarque 1.2.a]. Le cas où T est remplacé par un T-faisceau lisse sur Y s'en déduit par localisation. Les énoncés de (ii) (resp., (iii)) se ramènent de la même façon au cas de coefficients de torsion, qui résulte de la formule de projection usuelle (resp., qui est connu). □

Soit $S = \operatorname{Spec} A$ un trait strictement hensélien. On note K le corps des fractions de A, k le corps résiduel, et $\overline{K}$ une clôture séparable de K. On pose

$s = \operatorname{Spec} k$, $\eta = \operatorname{Spec} K$, et $\bar{\eta} = \operatorname{Spec} \bar{K}$. Soit $X \to S$ un morphisme séparé et de type fini. Pour tout point x de S on note X_x la fibre de X en x. Avec les notations de [SGA7, II, Exp. XIII] et le formalisme de [E] on a des catégories dérivées $D^b(X_s \times_s \eta, R)$ (resp., $D^b(X_\eta, R)$) et $D^b_c(X_s \times_s \eta, R)$ (resp., $D^b_c(X_\eta, R)$) de faisceaux de R-modules sur X_s munis d'une action continue de $\operatorname{Gal}(\bar{\eta}\,|\,\eta)$ (resp., de faisceaux de R-modules sur X_η). On définit comme précédemment un foncteur $T \otimes^L_R : D^b(X_s \times_s \eta, R) \to D^b(X_s \times_s \eta, T)$ (resp., $T \otimes^L_R : D^b(X_\eta, R) \to D^b(X_\eta, T)$) pour lequel on a les analogues des énoncés précédents avec les mêmes démonstrations. En particulier $T \otimes^L_R$ induit un foncteur $D^b_c(X_s \times_s \eta, R) \to D^b_c(X_s \times_s \eta, T)$ (resp., $T \otimes^L_R : D^b_c(X_\eta, R) \to D^b_c(X_\eta, T)$). On définit comme en [SGA7, II, Exp. XIII] un foncteur cycles proches $R\psi_\eta : D^b(X_\eta, T) \to D^b(X_s \times_s \eta, T)$ qui induit par [SGA4$\frac{1}{2}$, Th. finitude Théorème 3.2] un foncteur $D^b_c(X_\eta, T) \to D^b_c(X_s \times_s \eta, T)$. Si on remplace dans la définition de $R\psi_\eta$ le corps $\bar{K}$ par l'extension modérément ramifiée (resp., pro-ℓ) maximale de K dans $\bar{K}$ on obtient également des foncteurs $R\psi^t_\eta : D^b(X_\eta, T) \to D^b(X_s \times_s \eta, T)$ (resp., $R\psi^{\text{pro-}\ell}_\eta : D^b(X_\eta, T) \to D^b(X_s \times_s \eta, T)$).

Proposition A.1.6 (Cycles proches). *Avec les notations précédentes on a, pour tout objet E de $D^b_c(X_\eta, R)$, un isomorphisme canonique*

$$T \otimes^L_R R\psi_\eta(E) \simeq R\psi_\eta(T \otimes^L_R E).$$

On a l'énoncé analogue pour les foncteurs $R\psi^t_\eta$ et $R\psi^{\text{pro-}\ell}_\eta$.

Démonstration. De façon similaire à A.1.5, on se ramène au cas de coefficients de torsion qui est traité dans [SGA7, II, Exp. XIII, 2.1.13] pour $R\psi_\eta$, la preuve étant la même pour $R\psi^t_\eta$ et $R\psi^{\text{pro-}\ell}_\eta$. □

A.2. L'anneau $\overline{\mathbf{Q}}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Z}_\ell[[X_1, \ldots, X_n]]$

A.2.1. Rappels sur la théorie de Weierstrass. Soit A un anneau et soit $\mathfrak{A}$ un idéal de A.

Suivant l'usage, on pose $A[[X]] = A[[X_1, \ldots, X_n]]$, $A[[X']] = A[[X_1, \ldots, X_{n-1}]]$, et $X' = (X_1, \ldots, X_{n-1})$.

Une série non nulle f dans $A[[X]]$ est dite $\mathfrak{A}$-régulière de degré k si

$$f \equiv v(X_n) X_n^k \mod(\mathfrak{A}, X')$$

avec v dans $A[[X_n]]$ une unité modulo $\mathfrak{A}$.

On dit qu'un élément P de $A[[X]]$ est un polynôme de $\mathfrak{A}$-Weierstrass si

$$P = X_n^k + \sum_{i<k} p_i X_n^i$$

avec p_i dans $(\mathfrak{A}, X')A[[X']]$.

La théorie classique de Weierstrass peut être résumée sous la forme suivante.

Théorème A.2.1. *On suppose que A est séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{A}$-adique et que $\mathfrak{A}$ est un idéal maximal de A.*

(i) *Si f dans $A[[X]]$ est $\mathfrak{A}$-régulière de degré k, alors, pour tout g dans $A[[X]]$, il existe un unique couple (q, r) avec q dans $A[[X]]$ et r dans $A[[X']][X_n]$ tel que $\deg_{X_n} r < k$ et $g = q \cdot f + r$.*

(ii) *Si f dans $A[[X]]$ est $\mathfrak{A}$-régulière de degré k, alors f s'écrit de façon unique $f = u \cdot P$ avec u dans $A[[X]]$ une unité et P dans $A[[X']][X_n]$ un polynôme de $\mathfrak{A}$-Weierstrass.*

(iii) *Si f dans $A[[X]]$ a un coefficient qui est une unité modulo $\mathfrak{A}$, il existe un automorphisme T de $A[[X]]$ de la forme $T(X_i) = X_i + X_n^{c_i}$ pour $i = 1, \dots, n-1$, et $T(X_n) = X_n$, tel que $T(f)$ soit $\mathfrak{A}$-régulier.*

Démonstration. C'est une conséquence de [B, Ch. VII, §3, n° 7, 8]. □

A.2.2. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ de $\mathbf{Q}_\ell$. On considère l'anneau

$$A_n = \left(\varinjlim_{R \in \mathscr{R}} R[[X_1, \dots, X_n]] \right) [\ell^{-1}].$$

On rappelle que $\mathscr{R}$ est l'ensemble ordonné des anneaux d'entiers d'extensions finies de $\mathbf{Q}_\ell$ contenues dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$.

Pour R dans $\mathscr{R}$, on note $\mathfrak{M}_R$ l'idéal maximal de R, et on note W_R l'ensemble des polynômes de $\mathfrak{M}_R$-Weierstrass dans $R[[X_1, \dots, X_n]]$. Si $R \subset R'$, alors $W_R \subset W_{R'}$. On pose $W = \bigcup_{R \in \mathscr{R}} W_R$. On voit W et $A_{n-1}[X_n]$ comme naturellement plongés dans A_n.

Proposition A.2.2.1. *Les propriétés suivantes sont vérifiées:*

(i) *Soient f et g des éléments unitaires de $A_{n-1}[X_n]$. Si le produit $f \cdot g$ appartient à W, alors f et g appartiennent à W.*

(ii) *Pour tout élément P de W, les quotients A_n/PA_n et $A_{n-1}[X_n]/PA_{n-1}[X_n]$ sont isomorphes comme A_{n-1}-algèbres.*

(iii) *Pour tout élément non nul f de A_n, il existe un automorphisme σ de A_n et une unité u de A_n tels que $u \cdot \sigma(f)$ appartient à W.*

Démonstration. L'énoncé (i) est clair, (ii) est conséquence de A.2.1 (i), et (iii) de A.2.1 (ii) et (iii). □

Proposition A.2.2.2. *Pour tout entier $n \geqslant 0$, l'anneau A_n est noethérien.*

Démonstration. La proposition A.2.2.1 assure exactement que, dans la terminologie de [BGR, 5.2.5], A_n est de Rückert sur A_{n-1}. D'après [BGR, 5.2.5], ceci entraîne que A_n est noethérien si A_{n-1} l'est, ce qui donne l'énoncé cherché par récurrence, le cas $n = 0$ étant clair. □

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note P_n l'ensemble des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-points de Spec A_n et P'_n l'ensemble des points fermés de Spec A_n. On note également $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal de $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$. On a des applications canoniques $f_n\colon \mathfrak{M}^n \to P_n$ (donnée par l'évaluation) et $g_n\colon P_n \to P'_n$.

PROPOSITION A.2.2.3. (i) *Pour tout entier $n \geqslant 0$, les applications f_n et g_n sont des bijections.*

(ii) *Pour tout entier $n \geqslant 0$, l'anneau A_n est régulier et de Jacobson.*

Démonstration. Démontrons (i). D'après la proposition A.2.2.1, pour tout élément f non nul de A_n, le quotient A_n/f est un module libre de type fini sur un anneau isomorphe à A_{n-1}. On en déduit par récurrence sur n que, pour tout idéal propre I de A, il existe un entier $r \leqslant n$ et une injection $A_r \to A_n/I$ tels que A_n/I soit fini sur A_r. Quand I est un idéal maximal, le quotient A_n/I est un corps, et donc également A_r. On a alors $r = 0$ et $A_n/I \simeq \overline{\mathbf{Q}}_\ell$. Ceci démontre que g_n est une bijection. Soit $\varphi\colon A_n \to \overline{\mathbf{Q}}_\ell$ un homomorphisme. On pose $c_i = \varphi(t_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Si l'un des c_i vérifiait $|c_i| \geqslant 1$, $t_i - c_i$ serait inversible dans A_n et on ne pourrait avoir $\varphi(t_i - c_i) = 0$. On a donc $|c_i| < 1$ pour tout i. D'après A.2.2.1 (ii) tout élément f de A_n peut alors s'écrire $f = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (t_i - c_i)g_i + f(c_1, \ldots, c_n)$ avec les g_i dans A_n. On a donc $\varphi(f) = f(c_1, \ldots, c_n)$, ce qui termine la preuve de (i). On déduit de (i) que en tout point fermé de $\operatorname{Spec} A_n$ le complété de A_n est isomorphe à $\overline{\mathbf{Q}}_\ell[[x_1, \ldots, x_n]]$. Comme l'anneau A_n est noethérien d'après A.2.2.2, il est donc régulier. De plus on vérifie facilement que l'intersection des idéaux maximaux de A_n est (0) et on démontre que A_n est de Jacobson par récurrence sur n comme dans [BGR, 5.2.6]. □

A.3. Démonstration de la proposition 3.6.1. Démontrons (i). Le fait que $\bar{S}$ soit une sous-catégorie triangulée de D est clair: en effet si deux sommets d'un triangle distingué de D appartiennent à $\bar{S}$, on voit en considérant la suite exacte longue de cohomologie associée au triangle qu'il en est de même du troisième.

Considérons un morphisme $f\colon X \to Y$ dans D se factorisant par un objet W de $\bar{S}$ et contenu dans un triangle distingué $X \to Y \to Z$ avec Z objet de $\bar{S}$. Pour tout entier i, on a une suite exacte

$$H^i(W) \to H^i(Y) \to H^i(Z).$$

Comme $H^i(W)$ et $H^i(Z)$ sont des objets de S, il en est de même de $H^i(Y)$, et donc Y est un objet de $\bar{S}$. On en déduit que X est également un objet de $\bar{S}$ en utilisant la suite exacte longue de cohomologie associée au triangle $X \to Y \to Z$.

Démontrons (ii). Le seul point à vérifier est que si X est un objet de $D^{\leqslant 0}_{\mathrm{loc}}$ et Y de $D^{\geqslant 1}_{\mathrm{loc}}$ on a $\operatorname{Hom}_{D_{\mathrm{loc}}}(X, Y) = 0$.

On note $\tau^{\leqslant n}$ (resp., $\tau^{\geqslant n}$) l'adjoint à droite (resp., à gauche) de l'inclusion de $D^{\leqslant n}$ (resp., $D^{\geqslant n}$) dans D. On dit qu'un morphisme dans D est un S-isomorphisme si son cône est un objet de $\bar{S}$. Par définition de D_{loc}, tout élément de $\operatorname{Hom}_{D_{\mathrm{loc}}}(X, Y)$ est représenté par un diagramme

$$X \xleftarrow{f} X' \xrightarrow{g} Y$$

avec f dans $\operatorname{Hom}_D(X', X)$ un S-isomorphisme et g dans $\operatorname{Hom}_D(X', Y)$. Il suffit de démontrer que si X est un objet de $D_{\mathrm{loc}}^{\leqslant 0}$ et Y de $D_{\mathrm{loc}}^{\geqslant 1}$, l'image de g dans $\mathrm{Hom}_{D_{\mathrm{loc}}}(X', Y)$ est nulle. Pour cela on remarque que les morphismes canoniques dans D,

$$\tau^{\leqslant 0}X' \to X' \quad \text{et} \quad Y \to \tau^{\geqslant 1}Y$$

sont des S-isomorphismes et que, par définition d'une t-structure, le morphisme composé

$$\tau^{\leqslant 0}X' \longrightarrow X' \xrightarrow{g} Y \longrightarrow \tau^{\geqslant 1}Y$$

est nul. Le morphisme g devient donc nul dans D après composition avec des S-isomorphismes, autrement dit l'image de g dans $\mathrm{Hom}_{D_{\mathrm{loc}}}(X', Y)$ est le morphisme nul.

Démontrons (iii). Notons C le coeur de D_{loc} et $\tau_{\mathrm{loc}}^{\leqslant n}$, $\tau_{\mathrm{loc}}^{\geqslant n}$, les foncteurs de troncature relatifs à la t-structure sur D_{loc}. Remarquons que, pour tout objet X de D_{loc}, les objets $\tau^{\leqslant n}(A)$ et $\tau_{\mathrm{loc}}^{\leqslant n}(A)$ (resp., $\tau^{\geqslant n}(A)$ et $\tau_{\mathrm{loc}}^{\geqslant n}(A)$) sont canoniquement isomorphes dans D_{loc}. Par conséquent, les objets

$$H^0X := \tau^{\geqslant 0}\tau^{\leqslant 0}X \quad \text{et} \quad H_{\mathrm{loc}}^0X := \tau_{\mathrm{loc}}^{\geqslant 0}\tau_{\mathrm{loc}}^{\leqslant 0}X$$

sont canoniquement isomorphes dans D_{loc}, ce qui prouve que le foncteur canonique

$$\Phi \colon A_{\mathrm{loc}} \to C$$

est essentiellement surjectif.

Démontrons que Φ est fidèle. Soient X et Y des objets de A et soit f un élément de $\mathrm{Hom}_{A_{\mathrm{loc}}}(X, Y)$ tel que $\Phi(f)$ est nul. Le morphisme f est représenté par

$$X \xleftarrow{\varphi} X' \xrightarrow{g} Y$$

avec X' objet de A, φ dans $\mathrm{Hom}_A(X', X)$ un S-isomorphisme et g dans $\mathrm{Hom}_A(X', Y)$. Comme $\Phi(\varphi)$ est un isomorphisme, on a $\Phi(g) = 0$. Par conséquent il existe un objet X'' de D et un S-isomorphisme ψ dans $\mathrm{Hom}_D(X'', X')$ tels que $g \circ \psi = 0$ dans $\mathrm{Hom}_D(X'', Y)$. En appliquant le foncteur H^0 on obtient une suite

$$H^0(X'') \xrightarrow{H^0(\psi)} X' \xrightarrow{g} Y$$

avec $g \circ H^0(\psi) = 0$. Comme $H^0(\psi)$ est un S-isomorphisme, on obtient que l'image de g dans $\mathrm{Hom}_{A_{\mathrm{loc}}}(X', Y)$ est nulle et donc que f est nul.

Démontrons que Φ est plein. Soient X et Y des objets de A et soit f un élément de $\mathrm{Hom}_{D_{\mathrm{loc}}}(X, Y)$. Le morphisme f est représenté par

$$X \xleftarrow{\varphi} X' \xrightarrow{g} Y$$

avec X' objet de D, g dans $\mathrm{Hom}_D(X', Y)$, et φ dans $\mathrm{Hom}_D(X', X)$ un S-isomorphisme. Comme X' est S-isomorphe à un objet de A, le morphisme canonique $\tau^{\leqslant 0}X' \to X'$ est un S-isomorphisme. On peut donc remplacer X' par $\tau^{\leqslant 0}X'$ et supposer que X' est un objet de $D^{\leqslant 0}$. Comme, de même, le morphisme canonique $X' \to \tau^{\geqslant 0}X'$ est un S-isomorphisme, et que tout morphisme $X' \to Z$ dans D, avec Z objet de $D^{\geqslant 0}$, se factorise canoniquement en un morphisme $\tau^{\geqslant 0}X' \to Z$, on peut remplacer X' par $\tau^{\geqslant 0}X'$ et supposer que X' est un objet de A, ce qui prouve que Φ est plein. □

A.4. Démonstration de la proposition 6.3.2. Pour tout point x de X, on note $d(x)$ la codimension de x dans X.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Soit K un objet de $D^b_{\mathrm{coh}}(X)^{\geqslant 0}$ et soit x un point du support de $\mathscr{E}\mathrm{xt}^i(K, \mathscr{O})$. On a $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{O}_x}(K_x, \mathscr{O}_x) \neq 0$; comme la dimension injective de $\mathscr{O}_x$ est égale à $d(x)$, on a $i \leqslant d(x)$, ce qui donne l'énoncé non respé. Pour l'énoncé respé, comme codim Supp $\mathscr{E}\mathrm{xt}^i(\tau_{\geqslant 1}K, \mathscr{O}) \geqslant i+1$ d'après ce qui précède, on se ramène au cas d'un $\mathscr{O}$-module cohérent sans torsion M (placé en degré 0). Pour tout point x de X on a une suite exacte

$$0 \to M_x \to \mathscr{O}_x^N \to M'_x \to 0$$

d'où l'on tire des isomorphismes $\mathrm{Ext}^i(M_x, \mathscr{O}_x) \simeq \mathrm{Ext}^{i+1}(M'_x, \mathscr{O}_x)$ pour $i \geqslant 1$, d'où le résultat.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Soit M un $\mathscr{O}$-module cohérent et soit x le point générique d'une composante irréductible de codimension d du support de M. Comme $H^0_{\{x\}}M_x \neq 0$, on a $\mathrm{Ext}^d(M_x, \mathscr{O}_x) \neq 0$ par dualité locale. Par conséquent, si codim Supp $M = d$, on a

$$\text{codim Supp } \mathscr{E}\mathrm{xt}^d(M, \mathscr{O}) = d.$$

Soit K un objet de $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ tel que codim Supp $\mathscr{E}\mathrm{xt}^i(K, \mathscr{O}) \geqslant i+1$ pour tout $i > 0$. Soit n le plus grand entier tel que $\mathscr{H}^{-n}K \neq 0$. Supposons que $n > 0$ et notons d la codimension du support de $\mathscr{H}^{-n}K$. On a alors

$$\text{codim Supp } \mathscr{E}\mathrm{xt}^{d+n}((\mathscr{H}^{-n}K)[n], \mathscr{O}) = d.$$

On arrive à une contradiction en considérant le triangle

$$(\mathscr{H}^{-n}K)[n] \to K \to \tau_{\geqslant -n+1}K$$

et en appliquant (i) $\Rightarrow$ (ii) à $(\tau_{\geqslant -n+1})K[-n+1]$. Pour l'énoncé respé, il suffit de traiter le cas d'un $\mathscr{O}$-module cohérent M (placé en degré 0). Soit M_t le sous-module de torsion de M. Si M_t est non nul, soit $d > 0$ la codimension de son support. On a alors

$$\operatorname{codim} \operatorname{Supp} \mathscr{E}\mathrm{xt}^d(M_t, \mathscr{O}) = d$$

et, en considérant la suite exacte longue associée à

$$0 \to M_t \to M \to M/M_t \to 0,$$

on obtient que

$$\operatorname{codim} \operatorname{Supp} \mathscr{E}\mathrm{xt}^d(M, \mathscr{O}) = d,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii). Soit K un objet de $D^b_{\mathrm{coh}}(X)^{\geqslant 0}$. Soit x un point de X tel que l'on ait

$$H^{-i}(K_x \otimes^L_{\mathscr{O}_x} k(x)) \neq 0.$$

Comme $k(x)$ est de dimension projective égale à $d(x)$, on a $i \leqslant d(x)$. D'autre part, si M est un $\mathscr{O}$-module cohérent et x est le point générique d'une composante irréductible de codimension d du support de M, on a

$$H^{-d}(M_x \otimes^L_{\mathscr{O}_x} k(x)) \neq 0$$

(utiliser une résolution de Koszul de $k(x)$).

Par conséquent, si $\operatorname{codim} \operatorname{Supp} M = d$, on a $\operatorname{codim} \operatorname{Supp} \operatorname{fib} H^{-d}(M) = d$. On termine la démonstration comme pour (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Si K est un objet de $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ et x un point de X, $H^{-i}(K_x \otimes^L_{\mathscr{O}_x} k(x))$ est le dual de $H^i((DK)_x \otimes^L_{\mathscr{O}_x} k(x))$. $\square$

A.5. Démonstration du théorème 3.7.5. Il est clair que $\operatorname{End}(\delta_{\{1\}})$ est canoniquement isomorphe à $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$. Pour démontrer que la catégorie $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-tensorielle, il reste à vérifier (cf. [D2]) que, pour tout objet A de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, les morphismes composés

$$s_A := (\beta_A *_{\mathrm{int}} A) \circ (A *_{\mathrm{int}} \alpha_A) \colon A \to A *_{\mathrm{int}} A^\vee *_{\mathrm{int}} A \to A \tag{A.5.1}$$

et

$$t_A := (A^\vee *_{\mathrm{int}} \beta_A) \circ (\alpha_A *_{\mathrm{int}} A^\vee) \colon A^\vee \to A^\vee *_{\mathrm{int}} A *_{\mathrm{int}} A^\vee \to A \tag{A.5.2}$$

sont égaux respectivement à Id_A et $\mathrm{Id}_{A^\vee}$.

Soit A un objet de $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. On pose $U = \mathscr{C}(T) - \Delta(A)$. Sur l'ouvert U, le morphisme canonique $\mathscr{M}_!(A) \to \mathscr{M}_*(A)$ est un isomorphisme, et on peut voir, d'après le théorème 3.4.3, $\mathscr{M}_*(A)_{|U}$ comme un module localement libre. De même, comme, d'après 3.3.1 (b), on a $\mathscr{M}_*(A^\vee) \simeq D(\mathscr{M}_!(A))$, on peut voir $\mathscr{M}_*(A^\vee)_{|U}$ comme un module localement libre, ainsi que $\mathscr{M}_*(A^\vee *_* A)_{|U}$, qui est isomorphe à $\mathscr{M}_*(A^\vee)_{|U} \otimes \mathscr{M}_*(A)_{|U}$ d'après 3.3.1 (f).

On définit un isomorphisme canonique

$$\Psi\colon \mathscr{H}\mathrm{om}(\mathscr{O}_U, \mathscr{M}_*(A^\vee *_* A)_{|U}) \to \mathscr{H}\mathrm{om}(\mathscr{M}_*(A)_{|U}, \mathscr{M}_*(A)_{|U})$$

par composition des isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathscr{H}\mathrm{om}(\mathscr{O}_U, \mathscr{M}_*(A^\vee *_* A)_{|U}) &\simeq \mathscr{M}_*(A^\vee *_* A)_{|U} \\ &\simeq \mathscr{M}_*(A^\vee)_{|U} \otimes \mathscr{M}_*(A)_{|U} \\ &\simeq D(\mathscr{M}_!(A)_{|U}) \otimes \mathscr{M}_*(A)_{|U} \\ &\simeq D(\mathscr{M}_*(A)_{|U}) \otimes \mathscr{M}_*(A)_{|U} \\ &\simeq \mathscr{H}\mathrm{om}(\mathscr{M}_*(A)_{|U}, \mathscr{M}_*(A)_{|U}). \end{aligned}$$

Proposition A.5.3. *Soit A un objet de* $\mathrm{Perv}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. *On pose* $U = \mathscr{C}(T) - \Delta(A)$. *Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\delta_{\{1\}}, A^\vee *_* A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathscr{M}_*(\delta_{\{1\}})_{|U}, \mathscr{M}_*(A^\vee *_* A)_{|U}) \\ {\scriptstyle \Phi_A}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Psi} \\ \mathrm{Hom}(A, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathscr{M}_*(A)_{|U}, \mathscr{M}_*(A)_{|U}), \end{array}$$

les morphismes horizontaux étant donnés par application du foncteur $\mathscr{M}_*(\text{——})_{|U}$. *(On utilise l'isomorphisme canonique* $\mathscr{M}_*(\delta_{\{1\}})_{|U} \simeq \mathscr{O}_U$.*)*

Admettons provisoirement cet énoncé et terminons la démonstration du théorème.

Pour M un $\mathscr{O}$-module localement libre de type fini sur U, on a des morphismes canoniques $a_M\colon \mathscr{O}_U \to D(M) \otimes M$ et $b_M\colon M \otimes D(M) \to \mathscr{O}_U$ qui vérifient les relations analogues à (A.5.1) et (A.5.2). De plus b_M est obtenu par dualité à partir de a_M.

Soit A un objet de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. D'après la proposition A.5.3, le morphisme canonique

$$\mathscr{M}_*(\alpha_A)_{|U}\colon \mathscr{O}_U \to \mathscr{M}_*(A^\vee *_{\mathrm{int}} A)_{|U}$$

composé avec les isomorphismes

$$\mathscr{M}_*(A^\vee *_{\mathrm{int}} A)_{|U} \simeq \mathscr{M}_*(A^\vee *_* A)_{|U} \simeq \mathscr{M}_*(A^\vee)_{|U} \otimes \mathscr{M}_*(A)_{|U}$$

$$\simeq D\mathscr{M}_!(A))_{|U} \otimes \mathscr{M}_*(A)_{|U} \simeq D\mathscr{M}_*(A)_{|U} \otimes \mathscr{M}_*(A)_{|U}$$

coïncide avec $a_{\mathscr{M}_*(A)_{|U}}$. On a l'énoncé dual pour $\mathscr{M}_*(\beta_A)_{|U}$.

On tire de cela que la restriction du morphisme $\mathscr{M}_*(s_A): \mathscr{M}_*(A) \to \mathscr{M}_*(A)$ à l'ouvert U est égale à l'identité de $\mathscr{M}_*(A)_{|U}$. Par conséquent, le support du module $\mathscr{M}_*(\mathrm{Im}(s_A - \mathrm{Id}_A))$ est contenu dans $\Delta(A)$, ce qui entraîne que l'on a $s_A = \mathrm{Id}_A$. On obtient de même que $t_A = \mathrm{Id}_{A^\vee}$, et on a donc démontré que $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est une catégorie $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-tensorielle. Soit ξ le point générique d'une composante connexe de $\mathscr{C}(T)$. Il résulte directement de l'analyse précédente que le foncteur $A \mapsto \mathscr{M}_*(A)_{|\xi}$ est un foncteur fibre sur $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$, ce qui termine la démonstration du théorème.

Démonstration de la proposition A.5.3. On note p le morphisme structural $T \to \mathrm{Spec}\, k$. Il suffit de vérifier que, pour tout point fermé χ de U, le diagramme obtenu par restriction des objets de la colonne de droite à χ est commutatif. Ceci est conséquence directe, d'après 3.3.2, du lemme suivant.

Soit A un objet de $D^b_c(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Soit χ un point fermé de $\mathscr{C}(T)$. On note λ le morphisme

$$\lambda: \mathrm{Hom}(Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi), Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi)) \to \mathrm{Hom}(Rp_*\delta_{\{1\}}, Rp_*((A^\vee *_* A) \otimes \mathscr{L}_\chi))$$

obtenu en composant le morphisme canonique

$$\mathrm{Hom}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell, D(Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi)) \otimes^L Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi))$$

$$\to \mathrm{Hom}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell, D(Rp_!(A \otimes \mathscr{L}_\chi)) \otimes^L Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi))$$

avec les isomorphismes

$$\mathrm{Hom}(Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi), Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi))$$

$$\simeq \mathrm{Hom}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell, D(Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi)) \otimes^L Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi))$$

et

$$\mathrm{Hom}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell, D(Rp_!(A \otimes \mathscr{L}_\chi)) \otimes^L Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi))$$

$$\simeq \mathrm{Hom}(Rp_*\delta_{\{1\}}, Rp_*((A^\vee *_* A) \otimes \mathscr{L}_\chi)).$$

Ce dernier isomorphisme étant obtenu à partir des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} D(Rp_!(A \otimes \mathscr{L}_\chi)) \otimes^L Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi) &\simeq Rp_*(D(A \otimes \mathscr{L}_\chi)) \otimes^L Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi) \\ &\simeq Rp_*((A \otimes \mathscr{L}_\chi)^\vee) \otimes^L Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi) \\ &\simeq Rp_*(A^\vee \otimes \mathscr{L}_\chi) \otimes^L Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi) \\ &\simeq Rp_*((A^\vee \otimes \mathscr{L}_\chi) *_* (A \otimes \mathscr{L}_\chi)) \\ &\simeq Rp_*((A^\vee *_* A) \otimes \mathscr{L}_\chi). \end{aligned}$$

LEMME A.5.4. *Soit A un objet de $D^b_c(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Soit χ un point fermé de $\mathscr{C}(T)$. Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\delta_{\{1\}}, A^\vee *_* A) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_A"'] & \mathrm{Hom}(Rp_*(\delta_{\{1\}}), Rp_*((A^\vee *_* A) \otimes \mathscr{L}_\chi)) \arrow[d, "\lambda"] \\ \mathrm{Hom}(A, A) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi), Rp_*(A \otimes \mathscr{L}_\chi)), \end{tikzcd}$$

les morphismes horizontaux étant donnés par application du foncteur $Rp_*(\text{——} \otimes \mathscr{L}_\chi)$.

Démonstration. Pour $\chi = 1$, l'énoncé résulte de la commutativité manifeste des diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\delta_{\{1\}}, A^\vee *_* A) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Hom}(Rp_*(\delta_{\{1\}}), Rp_*(A^\vee *_* A)) \\ \mathrm{Hom}(\delta_{\{1\}}, Rn_*(DA \boxtimes A)) \arrow[r, "(2)"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Hom}(Rp_*(\delta_{\{1\}}), Rp_*Rn_*(DA \boxtimes A)) \arrow[u, "\wr"'] \\ \mathrm{Hom}(n^*\delta_{\{1\}}, DA \boxtimes A) \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Hom}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell, Rp_*DA \otimes^L Rp_*A) \arrow[u, "\wr"'] \\ \mathrm{Hom}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell, Ri^!(DA \boxtimes A)) \arrow[r, "(3)"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Hom}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell, Rp_!DA \otimes^L Rp_*A) \arrow[u] \\ \mathrm{Hom}(A, A) \arrow[r, "(4)"] & \mathrm{Hom}(Rp_*A, Rp_*A). \arrow[u, "\wr"'] \end{tikzcd}$$

Les morphismes verticaux ont déjà été définis. Les morphismes (1), (2) et (4) sont obtenus en appliquant le foncteur Rp_*. Il reste à définir le morphisme (3). Soit $p_2\colon T \times T \to T$ la projection sur le deuxième facteur. Remarquons que l'on a l'égalité $p_2 \circ i = \mathrm{Id}_T$.

Par adjonction, on a un isomorphisme canonique (car $\overline{\mathbf{Q}}_\ell \simeq p^*\overline{\mathbf{Q}}_\ell$),

$$\mathrm{Hom}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell, Ri^!(DA \boxtimes A)) \simeq \mathrm{Hom}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell, Rp_*Ri^!(DA \boxtimes A)).$$

D'autre part, on a un morphisme canonique

$$Rp_*Ri^!(DA \boxtimes A) \to Rp_*Ri^!((Rp^!Rp_!DA) \boxtimes A)$$

et des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} Rp_*Ri^!((Rp^!Rp_!DA) \boxtimes A) &\simeq Rp_*Ri^!Rp_2^!(p^*Rp_!DA \otimes^L A) \\ &\simeq Rp_*(p^*Rp_!DA \otimes^L A) \\ &\simeq Rp_!DA \otimes^L Rp_*A. \end{aligned}$$

Le morphisme (3) est défini à partir de ces morphismes par composition.

Le cas général du lemme se déduit du cas $\chi = 1$, compte tenu du lemme suivant. □

LEMME A.5.5. *Soit A un objet de $D_c^b(T, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$. Soit χ un point fermé de $\mathscr{C}(T)$. Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\delta_{\{1\}}, A^\vee *_* A) & \xrightarrow{(1)} & \mathrm{Hom}(\delta_{\{1\}}, (A^\vee \otimes \mathscr{L}_\chi) *_* (A \otimes \mathscr{L}_\chi)) \\ {\scriptstyle \Phi_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_{A\otimes\mathscr{L}_\chi}} \\ \mathrm{Hom}(A, A) & \xrightarrow{(6)} & \mathrm{Hom}(A \otimes \mathscr{L}_\chi, A \otimes \mathscr{L}_\chi), \end{array}$$

les morphismes (1) et (6) étant les isomorphismes obtenus par tensorisation avec $\mathscr{L}_\chi$ (et en utilisant l'isomorphisme canonique $(A^\vee *_* A) \otimes \mathscr{L}_\chi \simeq (A^\vee \otimes \mathscr{L}_\chi) *_* (A \otimes \mathscr{L}_\chi)$).

Démonstration. L'énoncé résulte de la commutativité manifeste des diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(\delta_{\{1\}}, A^\vee *_* A) & \xrightarrow{(1)} & \mathrm{Hom}(\delta_{\{1\}}, (A^\vee \otimes \mathscr{L}_\chi) *_* (A \otimes \mathscr{L}_\chi)) \\
\wr\downarrow & & \wr\downarrow \\
\mathrm{Hom}(\delta_{\{1\}}, Rn_*(DA \boxtimes A)) & \xrightarrow{(2)} & \mathrm{Hom}(\delta_{\{1\}}, Rn_*(D(A \otimes \mathscr{L}_\chi) \boxtimes (A \otimes \mathscr{L}_\chi))) \\
\wr\downarrow & & \wr\downarrow \\
\mathrm{Hom}(n^*\delta_{\{1\}}, DA \boxtimes A) & \xrightarrow{(3)} & \mathrm{Hom}(n^*\delta_{\{1\}}, D(A \otimes \mathscr{L}_\chi) \boxtimes (A \otimes \mathscr{L}_\chi)) \\
\wr\downarrow & & \wr\downarrow \\
\mathrm{Hom}(i_! \overline{\mathbf{Q}}_\ell, DA \boxtimes A) & \xrightarrow{(4)} & \mathrm{Hom}(i_! \overline{\mathbf{Q}}_\ell, D(A \otimes \mathscr{L}_\chi) \boxtimes (A \otimes \mathscr{L}_\chi)) \\
\wr\downarrow & & \wr\downarrow \\
\mathrm{Hom}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell, Ri^!(DA \boxtimes A)) & \xrightarrow{(5)} & \mathrm{Hom}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell, Ri^!(D(A \otimes \mathscr{L}_\chi) \boxtimes (A \otimes \mathscr{L}_\chi))) \\
\wr\downarrow & & \wr\downarrow \\
\mathrm{Hom}(A, A) & \xrightarrow{(6)} & \mathrm{Hom}(A \otimes \mathscr{L}_\chi, A \otimes \mathscr{L}_\chi).
\end{array}$$

Le morphisme (2) est l'isomorphisme obtenu par tensorisation avec $\mathscr{L}_\chi$. Les morphismes (3) et (4) sont les isomorphismes obtenus par tensorisation avec $\mathscr{L}_{\chi^{-1}} \boxtimes \mathscr{L}_\chi$. L'isomorphisme (5) est obtenu à partir des isomorphismes

$$\begin{aligned}
Ri^!(DA \boxtimes A) &\simeq Ri^!(DA \boxtimes A) \otimes^L Li^*(\mathscr{L}_{\chi^{-1}} \boxtimes \mathscr{L}_\chi) \\
&\simeq Ri^!((DA \boxtimes A) \otimes (\mathscr{L}_{\chi^{-1}} \boxtimes \mathscr{L}_\chi)) \\
&\simeq Ri^!(D(A \otimes \mathscr{L}_\chi) \boxtimes (A \otimes \mathscr{L}_\chi)). \qquad \square
\end{aligned}$$

Références

[AK] A. Altman et S. Kleiman, *Introduction to Grothendieck Duality Theory*, Lecture Notes in Math. **146**, Springer-Verlag, New York, 1970.

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein et P. Deligne, "Faisceaux pervers" dans *Analyse et topologie sur les espaces singuliers, I*, Astérisque **100** (1982), 7–172.

[BGR] S. Bosch, U. Güntzer et R. Remmert, *Non-Archimedean Analysis*, Grundlehren Math. Wiss. **261**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[B] N. Bourbaki, *Algèbre commutative, Chapitres 5 à 7*, Masson, Paris, 1985.

[D1] P. Deligne, *La conjecture de Weil, II*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **52** (1980), 137–252.

[D2] ———, "Catégories tannakiennes" dans *The Grothendieck Festschrift Vol. II*, Progr. Math. **87**, Birkhäuser, Boston, 1990, 111–195.

[E] T. Ekedahl, "On the adic formalism" dans *The Grothendieck Festschrift Vol. II*, Progr. Math. **87**, Birkhäuser, Boston, 1990, 197–218.

[H] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I*, Ann. of Math. (2) **79** (1964), 109–203; *II*, 205–326.

[I1] L. ILLUSIE, "Théorie de Brauer et caractéristique d'Euler-Poincaré (d'après P. Deligne)" dans *Caractéristique d'Euler-Poincaré*, Astérisque **82–83** (1981), 161–172.

[I2] ———, "Autour du théorème de monodromie locale" dans *Périodes p-adiques*, Astérisque **223** (1994), 9–57.

[K1] N. KATZ, *Gauss Sums, Kloosterman Sums, and Monodromy Groups*, Ann. of Math. Stud. **116**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1988.

[K2] ———, *Exponential Sums and Differential Equations*, Ann. of Math. Stud. **124**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1990.

[K3] ———, *Rigid local systems*, preprint, 1994.

[KLa] N. KATZ ET G. LAUMON, *Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **62** (1985), 361–418.

[KnM] F. KNUDSEN ET D. MUMFORD, *The projectivity of the moduli space of stable curves, I, Preliminaries on "det" and "Div,"* Math. Scand. **39** (1976), 19–55.

[La1] G. LAUMON, *Comparaison de caractéristiques d'Euler-Poincaré en cohomologie ℓ-adique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **292** (1981), 209–212.

[La2] ———, Lettre du 22/12/91.

[La3] ———, *Quelques propriétés des $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux pervers sur les tores*, manuscrit, 8/1/92.

[Laz] M. LAZARD, *Groupes analytiques p-adiques*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **26** (1965), 389–603.

[Li] L. LIPSHITZ, *Rigid subanalytic sets*, Amer. J. Math. **115** (1993), 77–108.

[LS1] F. LOESER ET C. SABBAH, *Equations aux différences finies et déterminants d'integrales de fonctions multiformes*, Comment. Math. Helv. **66** (1991), 458–503.

[LS2] ———, *Caractérisation des $\mathscr{D}$-modules hypergéométriques irreductibles sur le tore I*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **312** (1991), 735–738; *II*, **315** (1992), 1263–1264.

[O] O. ORE, *Sur la forme des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables*, J. Math. Pures Appl. **9** (1930), 311–326.

[S] C. SABBAH, *Lieu des pôles d'un système holonome d'équations aux différences finies*, Bull. Soc. Math. France **120** (1992), 371–396.

[Sa] M. SATO, *Theory of prehomogeneous vector spaces (algebraic part)—the English translation of Sato's lecture from Shintani's note*, Nagoya Math. J. **120** (1990), 1–34.

[SGA1] A. GROTHENDIECK ET M. RAYNAUD, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA 1), Lecture Notes in Math. **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[SGA4] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK ET J.-L. VERDIER, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA 4), Lecture Notes in Math. **269, 270** et **305**, Springer-Verlag, Berlin, 1972 et 1973.

[SGA4$\frac{1}{2}$] P. DELIGNE, J.-F. BOUTOT, A. GROTHENDIECK, L. ILLUSIE ET J.-L. VERDIER, *Cohomologie étale*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA 4$\frac{1}{2}$). Lecture Notes in Math. **569**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[SGA5] A. GROTHENDIECK, I. BUCUR, C. HOUZEL, L. ILLUSIE, J.-P. JOUANOLOU ET J.-P. SERRE, *Cohomologie ℓ-adique et fonctions L*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA 5) Lecture Notes in Math. **589**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[SGA7] A. GROTHENDIECK, M. RAYNAUD ET D. S. RIM, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique, I*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA 7I) Lecture Notes in Math. **288**, Springer-Verlag, Berlin, 1972; P. DELIGNE ET N. KATZ, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique, II*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA 7II) Lecture Notes in Math. **340**, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

GABBER: INSTITUT DES HAUTES ETUDES SCIENTIFIQUES ET CNRS, 35 ROUTE DE CHARTRES, F-91440 BURES-SUR-YVETTE, FRANCE

LOESER: CENTRE DE MATHÉMATIQUES, ECOLE POLYTECHNIQUE, URA 169 DU CNRS, F-91128 PALAISEAU CEDEX, FRANCE; ET INSTITUT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ P. ET M. CURIE, CASE 247, UMR 9994 DU CNRS, 4 PLACE JUSSIEU, F-75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE