

VOLUME DE TUBES AUTOUR DE SINGULARITES

FRANÇOIS LOESER

Introduction. Pour X une sous-variété analytique lisse de \mathbf{C}^N , la formule d'Hermann Weyl exprime le volume $I(\epsilon)$ du tube formé des points situés à une distance inférieure à ϵ de X dans un polydisque fixé dont la frontière est transverse à X comme un polynôme en ϵ^2 , pour ϵ assez petit. Dans le cas où X a des singularités une telle formule n'est plus valide car le tube présentera toujours de l'autointersection.

Cependant nous pouvons montrer que ce volume admet un développement asymptotique de la forme:

$$I(\epsilon) = \sum_{\substack{i < 2N \\ \alpha \in F + \mathbf{N}}} C_{\alpha,i} \epsilon^\alpha (\log \epsilon)^i,$$

F étant un ensemble fini de rationnels. Il est très probable que l'on peut remplacer $2N$ par $2N - 1$.

Comme attendu la partie principale de ce développement correspond à la partie lisse:

$$I(\epsilon) = \frac{\pi^d}{d!} \text{vol}(X \cap P) \epsilon^{2d} + o(\epsilon^{2d}),$$

d étant la codimension de X (supposé équidimensionnel).

Il est donc naturel d'étudier le terme suivant apparaissant dans le développement asymptotique de $I(\epsilon)$ et son lien avec les singularités de X . C'est ce que l'on fait ici dans le cas des courbes planes. Le premier exposant non entier qui apparaît dans ce cas est $2(1 + \kappa^{-1})$ où κ désigne l'exposant de bifurcation maximale introduit par Lê Văn Thành. Cet invariant ne dépend que du type topologique plongé de la courbe et pour une courbe irréductible est égal à β_g/n , le plus grand exposant de Puiseux.

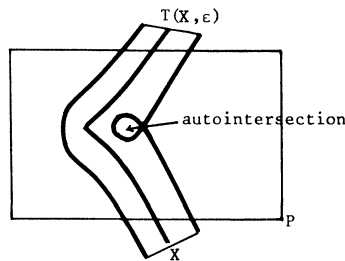


FIGURE 1.

Received October 28, 1985.

Les exposants fractionnaires apparaissant dans $I(\epsilon)$ semblent donc être des invariants intéressants de l'espace singulier X . Nous espérons revenir sur ce sujet dans un prochain travail.

Dans le case (local) d'une hypersurface donnée par $f = 0$, on peut s'intéresser également au volume des tubes $|f^{-1}(x)| \leq \epsilon$. Nous avons étudié les exposants qui apparaissent dans le cas d'une singularité isolée dans un précédent travail ([11]).

Notre travail a été inspiré par des travaux récents dans le cas p -adique ([1], [2], [12]).

Je remercie vivement J. Denef pour les conversations intéressantes que j'ai eues avec lui, en particulier pour son aide dans la démonstration du théorème 1.2.

§1. Existence de développements asymptotiques. On considère \mathbb{C}^N muni de sa structure hermitienne canonique et de la distance associée:

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^N |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} \quad \text{si } x = (x_i)_{1 \leq i \leq N}, \quad y = (y_i)_{1 \leq i \leq N}.$$

Soit X un sous-ensemble analytique de \mathbb{C}^N et P un polydisque compact de \mathbb{C}^N . On pose:

$$T(X, P, \epsilon) = \{ x \in P / \exists y \in X \cap P : d(x, y) \leq \epsilon \}$$

et

$$I(X, P, \epsilon) = \text{vol}(T(X, P, \epsilon)).$$

THÉORÈME 1.1. (a) $I(X, P, \epsilon)$ admet un développement asymptotique du type suivant, pour ϵ proche de zéro:

$$I(X, P, \epsilon) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ \alpha \in F + \mathbb{N}}} C_{\alpha, i}(X, P) \epsilon^\alpha (\log \epsilon)^i, \tag{*}$$

F étant un ensemble fini de rationnels et $k \leq 2N$.

(b) Si X est équidimensionnel de codimension d , alors $2d = \inf\{\alpha \in F + \mathbb{N} / \exists i \in [1, 2N] : C_{\alpha, i}(X, P) \neq 0\}$, $C_{2d, 0}(X, P) = \pi^d / d! \text{vol}(X \cap P)$ et $C_{2d, i}(X, P) = 0$ pour $i > 0$, le volume étant calculé sur la partie lisse de $X \cap P$.

Remarques. La partie a) du théorème 1 est valide pour X sous-ensemble sous-analytique de \mathbb{R}^N (avec $k \leq N$) et l'analogue de la partie b) pour X ensemble sous-analytique réel équidimensionnel. Dans le cas où $X \subset \mathbb{R}^N$ est semi-algébrique, J. Denef m'a communiqué une démonstration de ce qu'on a toujours $k \leq N - 1$. Elle utilise que dans ce cas la fonction $d(x, X)$ est semi-algébrique et que donc le graphe de $d(x, X)$ est inclus dans une variété algébrique de dimension N . Il est très probable que l'on a toujours $k \leq N - 1$ pour X sous-analytique.

Démonstration de (a). On pose $Z = \{(x, y, \epsilon) \in P \times (X \cap P) \times \mathbb{R}^+ / d(x, y) = \epsilon\}$. Il est clair que Z est semi-analytique réel et donc que $W = \{(x, \epsilon) \in P \times \mathbb{R}^+ / \exists y \in X \cap P : d(x, y) = \epsilon\}$ est sous-analytique réel. Soit $\pi : W \rightarrow \mathbb{R}^+$ la projection. On a bien sûr: $\pi^{-1}(\epsilon) \subset T(X, P, \epsilon)$.

Remarquons que P étant fixé, si ϵ est assez petit, on a $T(X, P, \epsilon) = \pi^{-1}(\epsilon)$.

Définition. Soit f une application de $]0, \eta[$ vers \mathbb{R} . On dit que f est de type $\mathcal{N}(n)$ si au voisinage de zéro, f admet un développement asymptotique du type

$$f(t) = \sum_{\substack{0 < i < n-1 \\ \alpha \in F + \mathbb{N}}} C_{\alpha,i} t^\alpha (\log t)^i$$

F étant un ensemble fini de rationnels.

La partie (a) du théorème 1 est maintenant une conséquence immédiate du résultat suivant:

THÉORÈME 1.2. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble sous-analytique compact d'intérieur non vide. Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction analytique réelle (définie sur un voisinage de A dans \mathbb{R}^n) et ψ une forme différentielle C^∞ de degré $n - 1$ (définie sur un voisinage de A), alors

$$I(t) = \int_{f^{-1}(t) \cap A} \psi \text{ est de type } \mathcal{N}(n).$$

Démonstration. On va utiliser le théorème de rectilinéarisation d'Hironaka ([4], p. 71, [5], p. 415).

THÉORÈME (Hironaka). Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble sous-analytique, B la boule unité de \mathbb{R}^n , alors pour tout m de \mathbb{R}^n il existe une famille finie de morphismes analytiques réels:

$$f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad 1 \leq i \leq r$$

tels que:

- (1) $\bigcup_{1 \leq i \leq r} f_i(B)$ est un voisinage de m dans \mathbb{R}^n ;
- (2) pour tout i , $f_i^{-1}(A)$ est une union finie de quadrants;
- (3) pour tout i , f_i induit un plongement ouvert de $\mathbb{R}^n \setminus f_i^{-1}(A)$ dans \mathbb{R}^n ;
- (4) ([4], p. 72) pour tout i , il existe un sous-ensemble analytique réel fermé C_i de \mathbb{R}^n tel que:

- (a) C_i est d'intérieur vide dans \mathbb{R}^n ;
- (b) $f_i | \mathbb{R}^n \setminus C_i$ est un plongement ouvert;
- (c) $f_i(C_i)$ est de mesure nulle.

On posera $U_i = \mathbb{R}^n \setminus C_i$.

Par partition de l'unité il suffit de montrer que $\int_{A \cap (\bigcup_{1 \leq i < r} f_i(B)) \cap f^{-1}(t)} \psi$ est du type $\mathcal{N}(n)$ pour ψ quelconque.

LEMME 1.1. *Le théorème 1.2 est vrai si A est semi-analytique.*

Démonstration. Variante facile du cas analytique traité dans [7], [8].

LEMME 1.2. $\int_{A \cap f_i(B) \cap f^{-1}(t)} \psi$ est de type $\mathcal{N}(n)$.

Démonstration. Pour $t \neq 0$, t petit,

$$\int_{A \cap f_i(B) \cap f^{-1}(t)} \psi = \int_{A \cap f_i(U_i) \cap f^{-1}(t)} \psi = \int_{f^{-1}(A) \cap U_i \cap B \cap (f \circ f_i)^{-1}(t)} f_i^* \psi,$$

et comme $f^{-1}(A)$ est une réunion finie de quadrants, on peut utiliser le lemme 1.1. On écrit maintenant

$$\int_{A \cap (\cup_{1 \leq i \leq r} f_i(B)) \cap f^{-1}(t)} \psi$$

comme une somme finie:

$$\begin{aligned} & \int_{A \cap (\cup_{1 \leq i \leq r} f_i(B)) \cap f^{-1}(t)} \psi \\ &= \sum_{1 \leq i \leq r} \int_{A \cap f_i(B) \cap f^{-1}(t)} \psi - \sum_{1 \leq i < j \leq r} \int_{A \cap f_i(B) \cap f_j(B) \cap f^{-1}(t)} \psi + \dots \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $\int_{A \cap f_{i_1}(B) \cap \dots \cap f_{i_k}(B) \cap f^{-1}(t)} \psi$ est de type $\mathcal{N}(n)$ pour $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq r$, $k \geq 2$. On va traiter le cas $k = 2$, le cas $k > 2$ étant similaire. Soit donc $1 \leq i < j \leq r$. On considère le produit fibré W de $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_i} \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_j} \mathbb{R}^n$:

$$W = \{(x_i, x_j) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid f_i(x_i) = f_j(x_j)\}.$$

On a une application naturelle:

$$\begin{aligned} f_{i,j} : W &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_i, x_j) &\rightarrow f_i(x_i) = f_j(x_j) \end{aligned}$$

et

$$f_{i,j}(W) = f_i(\mathbb{R}^n) \cap f_j(\mathbb{R}^n).$$

Soit:

$$\begin{aligned} U &= (U_i \times U_j) \cap W \\ \bar{B} &= (B \times B) \cap W \\ K &= (C_i \times \mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}^n \times C_j) \cap W. \end{aligned}$$

W est un sous-ensemble analytique fermé de \mathbb{R}^{2n} , K est un sous-ensemble analytique fermé de W et $U = W \setminus K$, $f_{i,j}(\bar{B}) = f_i(B) \cap f_j(B)$, $f_{i,j}(U) = f_i(U_i) \cap$

$f_j(U_j)$. A priori U n'est pas dense dans W , mais la restriction de $f_{i,j}$ à U est un plongement ouvert sur son image. On a

$$\int_{A \cap f_i(B) \cap f_j(B) \cap f^{-1}(t)} \psi = \int_{(f_{i,j})^{-1}(A) \cap U \cap \bar{B} \cap (f \circ f_{i,j})^{-1}(t)} f_{i,j}^* \bar{\psi}$$

et $(f_{i,j})^{-1}(A)$ est un sous-ensemble semi-analytique de W . Comme $U = W \setminus K$ est lisse, $W \supset K$ peut être complétée en une filtration régulière au sens de Hironaka ([6], p. 17). D'après le théorème de désingularisation ([6], p. 18), il existe un espace analytique réel \tilde{W} et un morphisme analytique propre:

$$\pi : \tilde{W} \rightarrow W$$

tels que (a) $\pi^{-1}(K)$ est d'intérieur vide dans \tilde{W} ;

(b) la restriction de π à $\tilde{W} \setminus \pi^{-1}(K)$ est un isomorphisme sur $U = W \setminus K$.

On a donc:

$$\begin{aligned} & \int_{A \cap f_i(B) \cap f_j(B) \cap f^{-1}(t)} \psi \\ &= \int_{(f_{i,j} \circ \pi)^{-1}(A) \cap (\tilde{W} \setminus \pi^{-1}(K)) \cap \pi^{-1}(\bar{B}) \cap (f \circ f_{i,j} \circ \pi)^{-1}(t)} (f_{i,j} \circ \pi)^* \psi. \end{aligned}$$

Comme le domaine d'intégration $(f_{i,j} \circ \pi)^{-1}(A) \cap (\tilde{W} \setminus \pi^{-1}(K)) \cap \pi^{-1}(\bar{B})$ est un sous-ensemble semi-analytique de \tilde{W} contenu dans le compact $\pi^{-1}(\bar{B})$ on peut appliquer le lemme 1.1.

Remarque. On a le résultat suivant analogue du théorème 1.2. et qui se démontre de façon similaire:

THÉORÈME 1.2'. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble sous-analytique relativement compact et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction analytique réelle définie sur un voisinage de \bar{A} . Pour ψ une forme différentielle C^∞ de degré n définie sur un voisinage de \bar{A} , soit $Z(s) = \int_A |f|^s \psi$, pour $\text{Re}(s) > 0$. Alors $Z(s)$ se prolonge analytiquement en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} dont les pôles sont de multiplicité au plus n et sont contenus dans $F - \mathbb{N}$ avec F un ensemble fini de rationnels positifs. De plus il existe $\epsilon > 0$ (dépendant de A et de f) tel que si ψ a son support contenu dans $f^{-1}([-\epsilon, \epsilon])$ alors pour tout polynôme $P(s)$, $P(s) Z(s)$ est bornée dans toute bande $\{s \in \mathbb{C} / \sigma_1 \leq \text{Re}(s) \leq \sigma_2\}$ privée de voisinages des pôles de $Z(s)$.

Démonstration de (b). Soient SX le lieu singulier de X et $X_\eta = (X \cap P) \setminus T(SX, P, \eta)$. D'après la formule des tubes d'Hermann Weyl ([3], [13]) on a:

pour tout $\eta > 0$, il existe $\epsilon(\eta) > 0$ tel que si $0 < \epsilon \leq \epsilon(\eta)$ on a:

$$(\alpha) I(X_\eta, P, \epsilon) = \pi^d / d! \text{vol}(X_\eta) \epsilon^{2d} + \sum_{1 \leq i \leq N-d} C_i(\eta) \epsilon^{2(d+i)},$$

d'autre part, appliquée à $X \cap P \setminus SX$, la formule des tubes donne:

(β) $I(X \setminus SX, P, \epsilon) \leq \pi^d / d! \text{vol}(X \setminus SX) \epsilon^{2d} + \sum_{1 \leq i \leq N-d} B_i \epsilon^{2(d+i)}$ (on n'a qu'une inégalité à cause de l'autointersection du tube), les B_i étant des constantes.

Comme $I(X \setminus SX, P, \epsilon) = I(X, P, \epsilon)$, $\text{vol}(X \setminus SX) = \text{vol } X$ et $I(X_\eta, P, \epsilon) \leq I(X, P, \epsilon)$, on obtient

par (α)

$$\frac{\pi^d}{d!} \text{vol}(X_\eta) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I(X, P, \epsilon)}{\epsilon^{2d}}$$

par (β)

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I(X, P, \epsilon)}{\epsilon^{2d}} \leq \frac{\pi^d}{d!} \text{vol } X,$$

d'où le résultat en faisant tendre η vers zéro.

§2. Le premier exposant non entier pour les courbes planes. Soit $X \subset \mathbb{C}^2$ une courbe plane ayant une singularité isolée à l'origine, et $P = D_\eta \times D_\eta$ un polydisque contenant l'origine comme unique singularité de X , D_η désignant le disque fermé de centre zéro et rayon η .

On choisit (x, y) des coordonnées linéaires sur \mathbb{C}^2 de manière à ce que la projection sur l'axe des x soit finie.

Soit $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ l'équation de X , soient $y_\alpha(x)$ et $y_\beta(x)$ deux racines quelconques de f et soit $y_\alpha(x) - y_\beta(x) = C_{\alpha\beta}x^{\kappa_{\alpha\beta}} + o(|x|^{\kappa_{\alpha\beta}})$ avec $C_{\alpha\beta} \neq 0$.

Suivant Lê Văn Thành ([9], [10]) on appelle $\kappa^x(X) = \max_{\alpha, \beta} \kappa_{\alpha, \beta}$ l'exposant de bifurcation maximale relatif à x de X , $\kappa(X) = \sup_x \kappa^x(X)$ l'exposant de bifurcation maximale de X .

Dans [9] et [10] Lê Văn Thành a démontré les propriétés suivantes de $\kappa(X)$:

(1) $\kappa(X) = \kappa^x(X)$ si x est un paramètre transverse.

(2) On note $X = \bigcup_{1 \leq i \leq r} X_i$ la décomposition de X en composantes analytiquement irréductibles. On dit que X_i et X_j sont équivalentes si et seulement si leurs développements de Puiseux coïncident jusqu'au dernier exposant caractéristique inclus. On note $\{\mathcal{X}_k\}_{1 \leq k \leq r}$ les classes d'équivalence des branches et β_s^i/m_i ($1 \leq s \leq g_i$) les exposants caractéristiques de Luiseux de la classe \mathcal{X}_i avec m_i la multiplicité de \mathcal{X}_i . Alors

$$\kappa(X) = \max_{1 < k < r} \left\{ \frac{\beta_{g_k}^k}{m_k}, \frac{1}{m_k} \left[\max_{X_i, X_j \in \mathcal{X}_k} (X_i, X_j) - \sum_{s=1}^{g_k} (d_s^k - d_{s+1}^k) \beta_s^k \right] \right\}$$

avec $d_1^k = m_k$, $d_{s+1}^k = \text{pgcd}(m_k, \beta_1^k, \dots, \beta_s^k)$.

$$(3) \quad \kappa(X) = \max_{1 < k < r} \left\{ \frac{\beta_{g_k}^k}{m_k}, \frac{\max_{X_i, X_j \in \mathcal{X}_k} (X_i, X_j) - \mu_k + 1}{m_k} - 1 \right\},$$

μ_k désignant le nombre de Milnor des branches de la classe \mathcal{X}_k .

On se propose de démontrer le résultat suivant:

THÉORÈME 2.1. *Si $\kappa(X) > 1$, il existe une constante $C > 0$ telle que:*

$$I(X, P, \epsilon) = \pi \text{vol}(X \cap P)\epsilon^2 - C\epsilon^{2(1+\kappa(X)^{-1})} + o(\epsilon^{2(1+\kappa(X)^{-1})}).$$

Démonstration. On va raisonner par récurrence sur le nombre $t(X)$ de tangentes à X à l'origine.

Si $t(X) > 1$, on écrit $X = X' \cup X''$ avec $t(X') < t(X)$ et $t(X'') < t(X)$.

On a le lemme suivant dont la démonstration très facile est laissée au lecteur:

LEMME 2.1. *Si X' et X'' ont leurs tangentes distinctes, il existe une constante $K_1 > 0$ telle que*

$$\text{vol}(T(X', P, \epsilon) \cap T(X'', P, \epsilon)) \leq K_1 \epsilon^4,$$

pour ϵ suffisamment petit.

Il est alors facile de se ramener au cas $t(X) = 1$: on écrit $I(X, P, \epsilon) = I(X', P, \epsilon) + I(X'', P, \epsilon) - \text{vol}(T(X', P, \epsilon) \cap T(X'', P, \epsilon))$ et on remarque que $\kappa(X) = \max(\kappa(X'), \kappa(X''))$.

On supposera donc désormais que $t(X) = 1$, et on notera n la multiplicité de X en zéro.

Quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées on peut supposer que $y = 0$ est l'équation de la tangente à X en zéro.

Soit $B(r)$ la boule fermée de centre zéro et de rayon r , $X(r) = X \cap B(r)$ et $X[r] = X \cap P \setminus X(r)$.

Comme il n'y a pas d'ambiguïté on se place une fois pour toutes dans P et on écrit $I(X, \epsilon)$ et $T(X, \epsilon)$ au lieu de $I(X, P, \epsilon)$ et $T(X, P, \epsilon)$.

Pour tout $\epsilon > 0$ on note $r(\epsilon)$ la borne inférieure des $r > 0$ tels que le tube $T(X[r], \epsilon)$ n'ait pas d'autointersection (i.e., soit l'image difféomorphe par l'exponentielle du fibré normal à $X[r]$ en disques de rayon ϵ).

PROPOSITION 2.1. *Il existe une constante $K_2 > 0$ telle que*

$$r(\epsilon) = K_2 \epsilon^{\kappa(X)^{-1}} + o(\epsilon^{\kappa(X)^{-1}}).$$

Pour cela nous allons commencer par démontrer le lemme:

LEMME 2.2. *Il existe une constante $K_3 > 0$ telle que*

$$r(\epsilon) \geq K_3 \epsilon^{\kappa(X)^{-1}} + o(\epsilon^{\kappa(X)^{-1}}).$$

Démonstration. Soit $\delta(x)$ la distance minimale de deux points distincts de $X \cap (\{x\} \times \mathbb{C})$.

Il est facile de vérifier que

$$\delta(x) = 2K_4 |x|^{\kappa(X)} + o(|x|^{\kappa(X)}) \quad \text{avec } K_4 > 0.$$

Si $\delta(x) \leq 2\epsilon$ le nombre de composantes connexes de $(\{x\} \times \mathbb{C}) \cap T(X, \epsilon)$ est strictement inférieur à n .

D'autre part il est clair que si ϵ est assez petit, il existe $R(\epsilon)$ avec $0 < R(\epsilon) < \eta$ tel que si $R(\epsilon) < |x| < \eta$, $(\{x\} \times \mathbb{C}) \cap T(X, \epsilon)$ possède n composantes connexes.

Si $\delta(x) \leq 2\epsilon$ on a donc $d(\{x\} \times \mathbb{C} \cap X, 0) \leq r(\epsilon) + 2\epsilon$. Comme $y = 0$ est tangente à X en zéro, on a $d(\{x\} \times \mathbb{C} \cap X, 0) = |x| + o(|x|)$ au voisinage de zéro, d'où le lemme.

Remarque importante. On peut prendre $K_3 = K_4^{-\kappa(X)-1}$.

On va maintenant démontrer le lemme suivant:

LEMME 2.3. *Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout ϵ de $]0, \epsilon_0[$, il existe un point $M(\epsilon)$ de P et des points $M_1(\epsilon)$ et $M_2(\epsilon)$ de X tels que:*

- (1) $d(M(\epsilon), 0) = r(\epsilon)$.
- (2) $d(M_1(\epsilon), M(\epsilon)) \leq \epsilon$, $d(M_2(\epsilon), M(\epsilon)) \leq \epsilon$.
- (3) Les droites $M(\epsilon)M_1(\epsilon)$ et $M(\epsilon)M_2(\epsilon)$ sont normales à X .
- (4) $M_1(\epsilon) \neq M_2(\epsilon)$.

Démonstration. Sinon, par le lemme des petits chemins on aurait pour ϵ_0 assez petit une application analytique:

$$\begin{aligned} \gamma :]0, \epsilon_0[&\rightarrow \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \\ \epsilon &\rightarrow (M(\epsilon), M_1(\epsilon)) \end{aligned}$$

se prolongeant continûment à $[0, \epsilon_0[$ par $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ en une fonction qui admet un développement en serie fractionnaire au voisinage de zéro et telle que pour ϵ dans $]0, \epsilon_0[$ on ait:

- (1') $d(M(\epsilon), 0) = r(\epsilon)$.
- (2') $M_1(\epsilon)$ est l'unique point de X tel que $d(M(\epsilon), X) = d(M_1(\epsilon), M(\epsilon))$.
- (3') $d(M(\epsilon), X) \leq \epsilon$.
- (4') $M(\epsilon)$ est un point focal (i.e. est un point critique de l'exponentielle normale à X en $M_1(\epsilon)$).

On note $\Gamma_1 = \bigcup_{\epsilon \in]0, \epsilon_0[} \{M_1(\epsilon)\}$ et $\Gamma'_1 = \pi_1(\Gamma_1)$ avec π_1 la projection de \mathbb{C}^2 sur $\{y = 0\}$.

Soit U un voisinage simplement connexe de $\Gamma'_1 \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Soit W la composante connexe de $\pi_1^{-1}(U) \cap X$ à laquelle appartient Γ_1 . Choisissons une détermination de $x^{1/n}$ sur U .

Sur $\pi_1^{-1}(U)$, W est donnée par une équation $y = g(x)$ avec $g(x)$ holomorphe. On peut écrire $g(x) = \sum_{j > n} a_j x^{j/n}$ et on pose $\alpha = \inf\{j/n | a_j \neq 0\}$.

La normale complexe à X en (x_0, y_0) de W est donnée par $\{(x_0 - \lambda \overline{g'(x_0)}, y_0 + \lambda)/\lambda \in \mathbb{C}\}$, et le jacobien réel de l'exponentielle normale par:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\bar{\lambda}g'' & g' & 0 \\ -\lambda \overline{g''} & 1 & 0 & \overline{g'} \\ -g' & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -g' & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 + |g'|^2)^2 - |\lambda|^2 |g''|^2.$$

(2') et (4') donnent $M(\epsilon) = (x_1(\epsilon) - \lambda(\epsilon)\overline{g'(x_1(\epsilon))}, g(x_1(\epsilon)) + \lambda(\epsilon))$ avec

$$|\lambda(\epsilon)| = \frac{1 + |g'(x_1(\epsilon))|}{|g''(x_1(\epsilon))|} \quad \text{et} \quad (x_1(\epsilon)), g(x_1(\epsilon))$$

les coordonnées de $M_1(\epsilon)$. D'après (3') on a $|\lambda(\epsilon)|(1 + |\overline{g'}(x_1(\epsilon))|^2)^{1/2} \leq \epsilon$, donc $\lambda(\epsilon) = 0(\epsilon)$ et $|g''(x_1(\epsilon))|^{-1} = 0(\epsilon)$. Ceci n'est possible que si $\alpha < 2$. D'autre part, en utilisant le lemme 2.1 et (1') on obtient $r(\epsilon) \sim |x_1(\epsilon)|$, d'où

$$r(\epsilon)^{2-\alpha} = 0(\epsilon) \quad \text{car} \quad |g''(x_1(\epsilon))|^{-1} = 0(\epsilon).$$

En comparant avec le lemme 2.1 on obtient $2 - \alpha \geq \kappa(X)$, ce qui est absurde, car dès qu'il y a une singularité, on a $\kappa(X) \geq \alpha > 1$. Le lemme 2.3 est démontré.

Par le lemme des petits chemins on peut supposer qu'on a une fonction analytique $\gamma :]0, \epsilon_0[\rightarrow \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$

$$\epsilon \rightarrow (M(\epsilon), M_1(\epsilon), M_2(\epsilon))$$

avec $M(\epsilon), M_1(\epsilon), M_2(\epsilon)$ satisfaisant les conditions du lemme 2.3, et que γ se prolonge continûment à $[0, \epsilon_0[$ par $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ en une fonction qui admet un développement en série fractionnaire au voisinage de zéro.

On en déduit en particulier qu'il existe une constante $K_5 > 0$ et $\beta \in \mathbb{Q}^+$ tels que $r(\epsilon) \sim K_5 \epsilon^\beta$.

On note $(x_i(\epsilon), y_i(\epsilon))$ les coordonnées de $M_i(\epsilon)$

$$\Gamma_i = \bigcup_{\epsilon \in]0, \epsilon_0[} \{M_i(\epsilon)\}, \quad \Gamma'_i = \pi_1(\Gamma_i), \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 2.$$

Soit U un voisinage simplement connexe de $(\Gamma'_1 \cup \Gamma'_2) \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Choisissons une détermination de $x^{1/n}$ sur U .

Γ_i admet une paramétrisation:

$$y_i(\epsilon) = \sum_{n < j} a_j^i x_i^{j/n}(\epsilon).$$

Supposons que $a_j^1 = a_j^2$ quel que soit j (i.e., Γ_1 et Γ_2 appartiennent à la même composante connexe W de $\pi_1^{-1}(U) \cap X$).

Sur $\pi_1^{-1}(U)$ W est donné par l'équation:

$$y = g(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = \sum_{n < j} a_j x^{j/n}.$$

Les coordonnées du point $M(\epsilon)$ sont alors de la forme:

$$\begin{aligned} & (x_1(\epsilon) - \lambda(\epsilon) \overline{g'}(x_1(\epsilon)), y_1(\epsilon) + \lambda(\epsilon)) \\ & = (x_2(\epsilon) - \mu(\epsilon) \overline{g'}(x_2(\epsilon)), y_2(\epsilon) + \mu(\epsilon)). \end{aligned} \quad (*)$$

D'après (2) on a donc $|\lambda(\epsilon)|(1 + |\overline{g'}(x_1(\epsilon))|^2)^{1/2} \leq \epsilon$ et $|\mu(\epsilon)|(1 + |\overline{g'}(x_2(\epsilon))|^2)^{1/2} \leq \epsilon$ donc $|\lambda(\epsilon)| \leq \epsilon + o(\epsilon)$. (*) donne:

$$x_1(\epsilon) - x_2(\epsilon) + (y_1(\epsilon) - y_2(\epsilon)) \overline{g'}(x_2(\epsilon)) = \lambda(\epsilon) (\overline{g'}(x_1(\epsilon)) - \overline{g'}(x_2(\epsilon))). \quad (**)$$

Soit $\alpha = \inf\{j/n | a_j^1 \neq 0\}$:

• si $\alpha \geq 2$, g'' est bornée au voisinage de zéro et il existe une constante $K_6 > 0$ telle que

$$|g'(x_1(\epsilon)) - g'(x_2(\epsilon))| \leq K_6 |x_1(\epsilon) - x_2(\epsilon)|$$

d'après le théorème des accroissements finis.

On aboutit à une contradiction d'après (**) car

$$|x_1(\epsilon) - x_2(\epsilon) + (y_1(\epsilon) - y_2(\epsilon)) \overline{g'}(x_2(\epsilon))| = |x_1(\epsilon) - x_2(\epsilon)| + o(|x_1(\epsilon) - x_2(\epsilon)|)$$

et $|\lambda(\epsilon)|$ a pour limite zéro.

• si $\alpha < 2$, le théorème des accroissements finis donne une constante K_7 telle que:

$$\frac{|\overline{g'}(x_1(\epsilon)) - \overline{g'}(x_2(\epsilon))|}{|x_1(\epsilon) - x_2(\epsilon)|} \leq K_7 r(\epsilon)^{\alpha-2} + o(r(\epsilon)^{\alpha-2})$$

Comme

$$|x_1(\epsilon) - x_2(\epsilon) + (y_1(\epsilon) - y_2(\epsilon)) \overline{g'}(x_2(\epsilon))| = |x_1(\epsilon) - x_2(\epsilon)| + o(|x_1(\epsilon) - x_2(\epsilon)|),$$

on a d'après (**) pour ϵ petit:

$$|\lambda(\epsilon)|^{-1} \leq K_7 r(\epsilon)^{\alpha-2} + o(r(\epsilon)^{\alpha-2}).$$

Comme $|\lambda(\epsilon)| \leq \epsilon$, on obtient, en comparant au lemme 2.1, $2 \geq \kappa(X) + \alpha$, ce qui est impossible dès que la courbe est singulière. Il y a donc contradiction: $\Gamma_1 \setminus \{0\}$ et $\Gamma_2 \setminus \{0\}$ sont incluses dans deux composantes connexes W_1 et W_2 disjointes de $\pi_1^{-1}(U) \cap X$. Sur $\pi_1^{-1}(U)$, W_i est donnée par l'équation $y = g_i(x)$ avec $g_i(x) = \sum_{n < j} a_j^i x^{j/n}$. On note $\alpha_i = \inf\{j/n | a_j^i \neq 0\}$.

On note $M'_2(\epsilon)$ le point d'intersection de $\{x_1(\epsilon)\} \times \mathbb{C}$ avec W_2 et $(x_1(\epsilon), y'_2(\epsilon))$ ses coordonnées.

D'après le calcul de $\delta(x)$ on a:

$$|y_1(\epsilon) - y'_2(\epsilon)| \geq 2K_4 r(\epsilon)^{\kappa(X)} + o(r(\epsilon)^{\kappa(X)}).$$

D'autre part il existe une constante $K_8 > 0$ telle que

$$|y_2(\epsilon) - y'_2(\epsilon)| \leq K_8 |x_2(\epsilon) - x_1(\epsilon)| r(\epsilon)^{\alpha_2-1}.$$

Or $|x_2(\epsilon) - x_1(\epsilon)| \leq 2\epsilon$ (inégalité triangulaire) donc $|y_2(\epsilon) - y'_2(\epsilon)| \leq 2K_8 \epsilon r(\epsilon)^{\alpha_2-1}$. Mais $\epsilon r(\epsilon)^{\alpha_2-1} = o(r(\epsilon)^{\kappa(X)})$ car $\epsilon = o(r(\epsilon)^{\kappa(X)})$ (lemme 2.2) et $\alpha_2 > 1$.

D'où:

$$|y_1(\epsilon) - y_2(\epsilon)| \geq 2K_4 r(\epsilon)^{\kappa(X)} + o(r(\epsilon)^{\kappa(X)}).$$

Mais $|y_1(\epsilon) - y_2(\epsilon)| \leq 2\epsilon$, d'où $\epsilon \geq K_4 r(\epsilon)^{\kappa(X)} + o(r(\epsilon)^{\kappa(X)})$. ce qui achève la démonstration de la proposition.

Remarque 2.2. On a en fait montré que $\epsilon \sim K_4 r(\epsilon)^{\kappa(X)}$, d'après la remarque qui suit le lemme 2.1.

LEMME 2.4. *Il existe une constante $0 < K_9 < n\pi^2$ telle que*

$$I(X(r(\epsilon)), \epsilon) \leq K_9 r^2(\epsilon) \epsilon^2, \quad \text{pour } \epsilon \text{ assez petit.}$$

Démonstration. Commençons par démontrer le résultat suivant: il existe K_{10} , $0 < K_{10} < n\pi^2$ telle que

$$I(X(r(\epsilon)/2), \epsilon) \leq K_{10} \frac{r^2(\epsilon)}{4} \epsilon^2.$$

Soit $x \in D_\eta \setminus \{0\}$. Dans $\{x\} \times \mathbb{C}$ considérons les n disques de rayon ϵ centrés en les points d'intersection avec X : $D_1(\epsilon), \dots, D_n(\epsilon)$.

Supposons $\epsilon \geq C\delta(x)/2$ avec $C > 1$. Soit $H_x = \bigcup_{i \neq j} (D_i(\epsilon) \cap D_j(\epsilon))$. On a

$$\begin{aligned} \text{vol } H_x &\geq 2\epsilon^2 \left[\frac{\pi}{2} - \text{Arc sin } \frac{\delta(x)}{2\epsilon} - \frac{\delta(x)}{2\epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{\delta(x)}{2\epsilon}\right)^2} \right] \\ &\geq 2\epsilon^2 \left[\frac{\pi}{2} - \text{Arc sin } \frac{1}{C} - \frac{1}{C} \sqrt{1 - \frac{1}{C^2}} \right]. \end{aligned}$$

Donc $\text{vol } H_x \geq K_{11} \epsilon^2$ avec $K_{11} > 0$ ne dépendant que de C . Supposons $|x| \leq r(\epsilon)/2$: on a

$$\delta(x) \leq 2K_4 \frac{r(\epsilon)^{\kappa(X)}}{2^{\kappa(X)}} + o(r(\epsilon)^{\kappa(X)}),$$

donc

$$\delta(x) \leq \frac{2\epsilon}{2^{\kappa(X)}} + o(\epsilon)$$

car $\epsilon \sim K_4 r(\epsilon)^{\kappa(X)}$ d'après la remarque 2.2, et on a une constante $C > 1$ telle que si

$$|x| \leq r(\epsilon)/2, \quad \delta(x) \leq 2\epsilon/C \quad (\text{pour } \epsilon \text{ suffisamment petit}).$$

Soit $T'(X, \epsilon)$ l'ensemble des points de $T(X, \epsilon)$ qui sont l'image d'au moins deux points distincts de X par l'exponentielle. On a $H_x \subset T'(X, \epsilon) \cap \{x\} \times \mathbb{C}$, pour ϵ

petit, d'où

$$\text{vol } T'(X, \epsilon) \geq K_{11} \pi \frac{r(\epsilon)^2}{4} \epsilon^2.$$

Soit $W(X, \epsilon)$ le volume donné par la formule des tubes d'Hermann Weyl ([3], [13]):

$$W(X, \epsilon) = \pi \text{vol}(X) \epsilon^2 + B_1 \left(\int_X c_1 \right) \epsilon^4$$

B_1 étant une constante universelle et c_1 la première classe de Chern Weil du fibré tangent à la partie lisse de X pour la structure hermitienne induite (l'intégrale $\int_X c_1$ est finie car le fibré tangent à la partie lisse de X se prolonge sur une modification convenable de X en un fibré hermitien).

On définit de même $W(X(r), \epsilon)$ et $W(X[r], \epsilon)$.

On a $I(X, \epsilon) \leq W(X, \epsilon) - \text{vol } T'(X, \epsilon)$, mais comme $\text{vol}(X(r(\epsilon)/2)) = n\pi(r(\epsilon)^2/2) + o(r^2(\epsilon))$ (cf. [3]) on obtient

$$I(X(r(\epsilon))) \leq K_{12} \left(\frac{r^2(\epsilon)}{4} \right) \epsilon^2 \quad \text{avec } 0 < K_{12} < n\pi^2,$$

et on en déduit le lemme en écrivant

$$\begin{aligned} I(X(r(\epsilon)), \epsilon) &\leq I(X(r(\epsilon)/2), \epsilon) + W(X(r(\epsilon)), \epsilon) - W(X(r(\epsilon)/2), \epsilon) \\ &\leq K_{12} \frac{r(\epsilon)^2}{4} \epsilon^2 + n\pi^2 \left(r(\epsilon)^2 - \frac{r(\epsilon)^2}{4} \right) \epsilon^2 + o(r(\epsilon)^2 \epsilon^2). \end{aligned}$$

Démonstration du Théorème 2.1. Comme $W(X[r(\epsilon)], \epsilon) = I(X[r(\epsilon)], \epsilon)$, $W(X(r(\epsilon)), \epsilon) \geq W(X, \epsilon) - I(X, \epsilon) \geq W(X(r(\epsilon)), \epsilon) - I(X(r(\epsilon)), \epsilon)$. Mais $W(X(r(\epsilon)), \epsilon) = n\pi^2 K_2 \epsilon^{2(1+\kappa(X)^{-1})} + o(\epsilon^{2(1+\kappa(X)^{-1})})$ d'après la proposition, tandis que $W(X(r(\epsilon)), \epsilon) - I(X(r(\epsilon)), \epsilon) \geq (n\pi^2 - K_9) K_2 \epsilon^{2(1+\kappa(X)^{-1})} + o(\epsilon^{2(1+\kappa(X)^{-1})})$ ce qui au vu du lemme 2.4 et du Théorème 1.1 achève la preuve.

§3. Remarques. Soit X un sous-ensemble analytique de \mathbf{C}^N et P un polydisque compact de \mathbf{C}^N dont la frontière est transverse à X .

On pose $Z(s) = \int_P d(x, X)^s d\mu$ pour $\text{Re}(s) > 0$ avec $d\mu$ la mesure de Lebesgue sur \mathbf{C}^N .

Par transformation de Mellin, tous les énoncés obtenus pour $I(X, P, \epsilon)$ peuvent aisément se traduire en des énoncés sur $Z(s)$. Ainsi le théorème 1.1 donne par transformation de Mellin:

THÉORÈME 3.1. $Z(s)$ se prolonge analytiquement à \mathbf{C} en une fonction méromorphe dont l'ensemble des pôles est contenu dans $-(F + \mathbf{N})$, F étant un

ensemble fini de rationnels positifs. De plus, l'ordre des pôles est au plus $2N + 1$. Si X est équidimensionnel de codimension d , le plus grand pôle de $Z(s)$ est $-2d$, c'est un pôle simple et le résidu est $2d\pi^d/d! \text{vol}(X \cap P)$.

De même, le théorème 2.1 donne:

THÉORÈME 3.2. *Sous les hypothèses du théorème 2.1, le plus grand pôle de $Z(s)$ strictement inférieur à -2 est $-2(1 + \kappa(X)^{-1})$. De plus, c'est un pôle simple de résidu strictement négatif.*

Remarque 3.3. Soit X un sous-ensemble analytique de \mathbb{C}^N et x un point singulier isolé de X . Soit P un polydisque dont le bord est transverse à X et dont l'intérieur contient x comme unique singularité de X . Il est clair que le plus petit exposant non entier apparaissant dans le développement asymptotique de $I(X, P, \epsilon)$ ne dépend pas du choix d'un tel P . On le note $\alpha(X, x)$. Dans le cas où X est une courbe plane ($N = 2$), on déduit du théorème 2.1 que $\alpha(X, x)$ ne dépend que du type topologique plongé local de X en x et est donc un invariant analytique local de la singularité. En est-il de même en général?

BIBLIOGRAPHIE

1. D. BOLLAERTS, *On the Poincaré Series associated to the p -adic points on a curve*, Preprint.
2. J. DENEFF, *The rationality of the Poincaré Series associated to the p -adic points on a variety*, Invent. Math. **77** (1984), 1–23.
3. P. GRIFFITHS, *Complex differential and integral geometry and curvature integrals associated to singularities of complex analytic varieties*, Duke Math. Journal **45** (1978), 427–512.
4. H. HIRONAKA, *Introduction to real-analytic sets dans real-analytic maps*, Quaderni dei Gruppi... Istituto Matematico "L. Tonelli" dell' Università di Pisa (1973).
5. ———, *La voûte étoilée*, Singularités à Cargèse, p. 415–440. Astérisque n°7/8 (1973).
6. ———, *Introduction aux ensembles sous-analytiques*, Ibid p. 13–20.
7. J. IGUSA, *Complex powers and asymptotic expansions*, I, Crelle J. Math. **268/269** (1974), 110–130; II *ibid.* **278/279** (1975) 307–321.
8. P. JEANQUARTIER, *Développement asymptotique de la distribution de Dirac attachée à une fonction analytique*, C. R. Acad. Sc. Paris **271** (1970), 1159–1161.
9. LÊ VĂN THÁNH, *Le lemme fondamental de Nilsson dans le cas analytique local*, Ann. Inst. Fourier **32** (1982), 29–37.
10. ———, *Le nombre de Milnor et l'exposant de bifurcation*, C. R. Acad. Sc. Paris **295**, Série I (1982), 265–268.
11. F. LOESER, *Quelques conséquences locales de la théorie de Hodge*, Annales de l'Institut Fourier, **35** (1985), 75–92.
12. J. OESTERLÉ, *Réduction modulo p^n des sous-ensembles analytiques fermés de \mathbb{Z}_p^N* , Invent. Math. **66** (1982), 325–341.
13. H. WEYL, *On the volume of tubes*, Amer. J. of Math. **61** (1939), 461–472.

CENTRE DE MATHÉMATIQUES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, PLATEAU DE PALAISEAU, 91128 PALAISEAU CEDEX, FRANCE