Opérateurs aléatoires dans le régime localisé

F. Klopp

IMJ - UPMC

Colloque ”Interactions EDPs/Probas :
modèles probabilistes pour la simulation molèculaire”
GdR CHANT
Grenoble, 23-25/11/2011

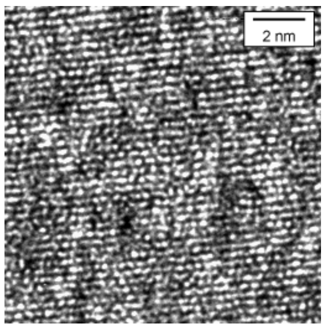
Plan du mini-cours

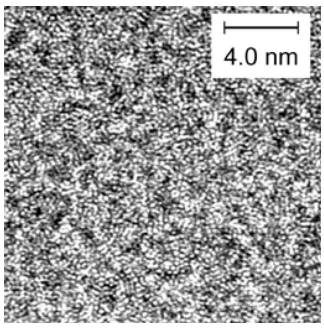
Première partie I

Opérateurs de Schrödinger aléatoires : les bases

Modèles de la physique de la matière condensée

- Étude des propriétés physiques (transport électronique, transport de la chaleur, etc) des solides (métaux, semi-conducteurs, etc).
- Relations entre propriétés macroscopiques et microscopiques.
- une caractéristique : homogénéité spatiale du milieu.





Cristaux parfaits

Atomes sur un réseau.

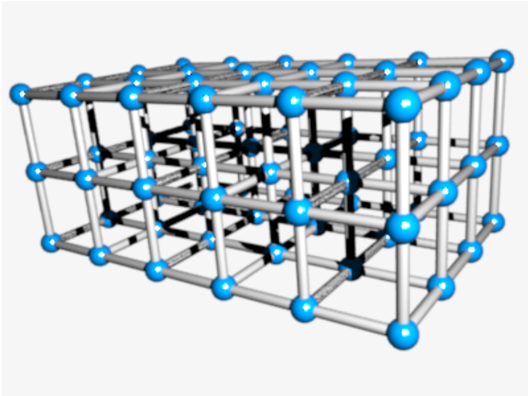


FIGURE: Exemple simple

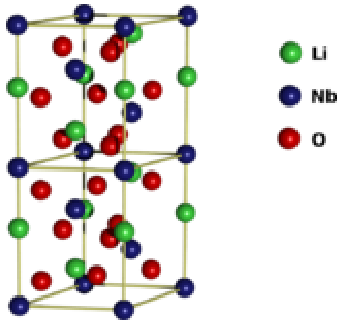


FIGURE: Exemple moins simple

Opérateurs de Schrödinger périodiques :

$$H = -\Delta + V \text{ où } V(x+\gamma) = V(x) \text{ pour } (x,\gamma) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{Z}^d.$$

Théorie de Floquet : réduction à des modèles discrets (approximation semi-classique ou liaisons fortes (“tight binding”)) :

$$\text{sur } \ell^2(\mathbb{Z}^d), \text{ pour } u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}, \quad (-\Delta u)_n = \sum_{|m-n|=1} u_m.$$

Quasi-cristaux

Atomes sur le sommet d’un pavage non régulier.

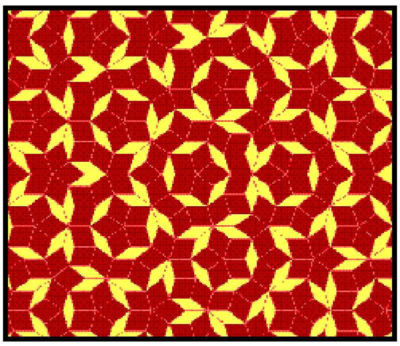


FIGURE: Théorie

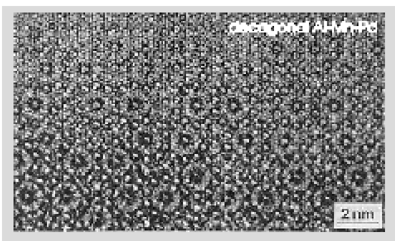


FIGURE: Réalité

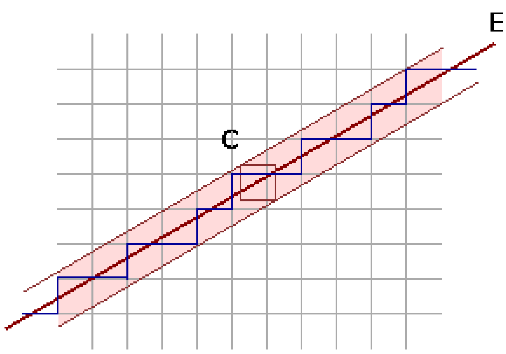


FIGURE: 1-D

Opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques (dimension 1) :

$$H_\omega = -\Delta + V_\omega \text{ con } V_\omega(x) = V(x_1\nu_1 + \omega_1, \cdots, x_d\nu_d + \omega_d), \; V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \; \mathbb{Z}^d\text{-pér..}$$

- $\nu = (n_1, \cdots, \nu_d)$ vecteur de fréquences
- $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_d)$ paramètre dans $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$.

Modèles de type alliage

Impuretés dans un cristal parfait.

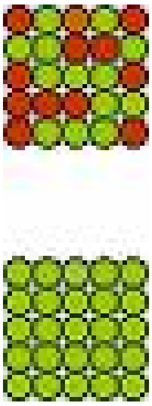


FIGURE: Alliage

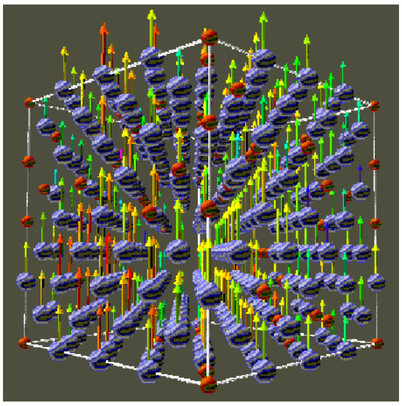


FIGURE: Un autre modèle

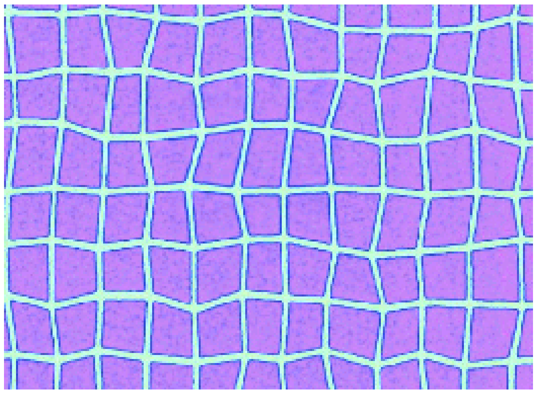


FIGURE: Déplacement aléatoire

Opérateurs de Schrödinger aléatoires de type alliage : $H_\omega = -\Delta + V_\omega$ où

- $V_\omega(x) = \sum_\gamma \omega_\gamma V(x-\gamma)$, $\omega_\gamma \in \mathbb{R}$: **modèle d'Anderson (continu)** ;
- $V_\omega(x) = \sum_\gamma V(x-\gamma-\omega_\gamma)$, $\omega_\gamma \in \mathbb{R}^d$: modèle de déplacement aléatoire.

Modèle discret : dans l'approximation semi-classique ou liaisons fortes : sur $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, le **modèle d'Anderson** : $H_\omega = -\Delta + \lambda V_\omega$ où $(V_\omega u)_n = \omega_n u_n$ si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$.

Modèles amorphes

Atomes distribués aléatoirement dans l'espace en ne respectant qu'une homogénéité spatiale.

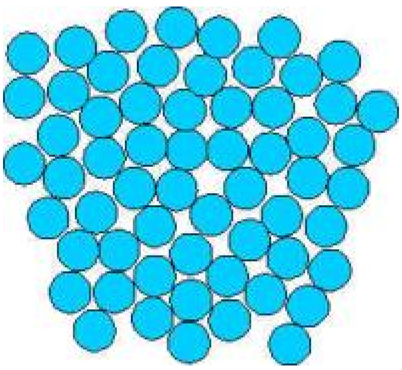


FIGURE: Théorie

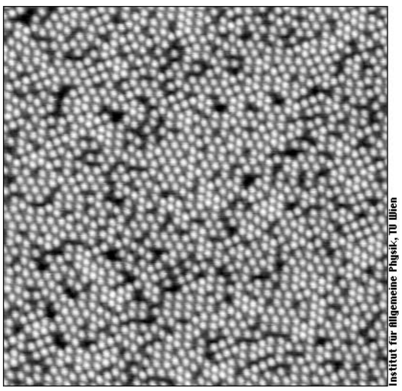


FIGURE: Réalité

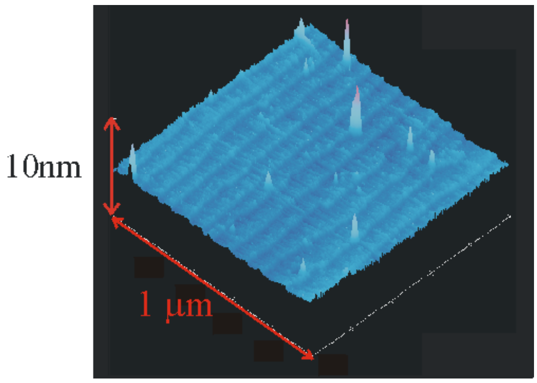


FIGURE: Simulation

Opérateurs de Schrödinger aléatoires amorphes : $H_\omega = -\Delta + V_\omega$ où

- $V_\omega(x) = \int_{\mathbb{R}^d} V(x-y)d\mu_\omega(y)$, $\omega_\gamma \in \mathbb{R}$: modèle de Poisson.
- V_ω champ gaussien de variance v : modèle gaussien.

Familles mesurable d'opérateurs

Soit $(H_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une famille d'opérateurs bornés sur $\mathscr{H}$, un espace de Hilbert séparable.

Définition

$(H_\omega)_{\omega\in\Omega}$ mesurable ssi $\forall(\psi,\phi)\in\mathscr{H}^2$, $\omega\mapsto\langle\psi,A_\omega\phi\rangle$ mesurable.

Cas discret : sur $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, le modèle d'Anderson est mesurable.

Soit $(H_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une famille d'opérateurs auto-adjoints sur $\mathscr{H}$.

Définition

$(H_\omega)_{\omega\in\Omega}$ mesurable ssi $\forall f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ borélienne bornée, $(f(H_\omega))_{\omega\in\Omega}$ mesurable.

Proposition

1. *$(H_\omega)_{\omega\in\Omega}$ mesurable ssi $\exists z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ t.q. $((z+H_\omega)^{-1})_{\omega\in\Omega}$ mesurable.*
2. *$(H_\omega)_{\omega\in\Omega}$ mesurable ssi $\forall t\in\mathbb{R}$, $(e^{itH_\omega})_{\omega\in\Omega}$ mesurable.*

Application aux opérateurs de Schrödinger

Sur $\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R}^d)$, soit $H=-\Delta+V$ essentiellement auto-adjoint sur $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Proposition

Si V_ω est un processus stochastique mesurable en x et ω t.q. $H_\omega=H+V_\omega$ essentiellement auto-adjoint sur $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors, H_ω est mesurable.

Exemples :

1. Soit W $\mathbb{Z}^d$-périodique et $V_\omega(x)=\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d}\omega_\gamma V(x-\gamma)$ ou
   $V_\omega(x)=\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d}V(x-\gamma-\omega_\gamma)$ où $(\omega_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{Z}^d}$ v.a. i.i.d.
   Alors $H_\omega=-\Delta+W+V_\omega$ est mesurable
2. Si $V_\omega(x)=\int_{\mathbb{R}^d}V(x-y)d\mu_\omega(y)$ est un processus de Poisson, $H_\omega=-\Delta+V_\omega$ est mesurable.
3. Soit ν vecteur de fréquences (coord. rat. indép.) et $V:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ continue et $\mathbb{Z}^d$-périodique. On pose $x\mapsto V_\omega(x)=V(x_1\nu_1+\omega_1,\cdots,x_d\nu_d+\omega_d)$.
   Alors, pour $\omega\in\Omega=\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, $H_\omega=-\Delta+V_\omega$ est mesurable.

Rappel : sur Ω espace probabilité, un groupe de transformations préservant la mesure $(\tau_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est ergodique si pour X mesurable, $\forall\gamma,\ X\circ\tau_\gamma = X$ p.s. $\Longrightarrow X =$cst p.s.

Définition

Une famille auto-adjointe et mesurable $(H_\omega)_{\omega\in\Omega}$ ergodique s'il existe $(\tau_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ groupe ergodique d'automorphismes de Ω et famille d'unitaires sur $\mathscr{H}$, $(U_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ t.q.

$$H_{\tau_\gamma\omega} = U_\gamma H_\omega U_\gamma^*.$$

Exemples :

Les exemples précédents sont ergodiques.
Les unitaires sont les translations i.e. $(U_\gamma\psi)(x) = \psi(x-\gamma)$ et le groupe ergodique celui engendré par les décalage $(\tau_\gamma(\omega))_\beta = \omega_{\gamma+\beta}$ si $\omega = (\omega_\gamma)_\gamma$.

Proposition

Si $(H_\omega)_{\omega\in\Omega}$ ergodique, pour f mesurable bornée, $(f(H_\omega))_{\omega\in\Omega}$ ergodique.

Lemme (Lemme fondamental)

Si $(\Pi_\omega)_\omega$ famille ergodique de projecteurs orthogonaux, alors rang(Π_ω) est cst p.s.

Théorème (Pastur)

Si $(H_\omega)_{\omega\in\Omega}$ ergodique alors il existe $\Sigma\subset\mathbb{R}$ fermé t.q. $\Sigma = \sigma(H_\omega)$ p.s.

Théorème (Kunz-Souillard, Kirsch-Martinelli)

Si $(H_\omega)_{\omega\in\Omega}$ ergodique alors il existe Σ_{pp}, Σ_{ac} et Σ_{sc} fermés de $\mathbb{R}$ t.q., p.s.

$$\Sigma_{pp} = \overline{\sigma_{pp}(H_\omega)},\quad \Sigma_{ac} = \sigma_{ac}(H_\omega),\quad \Sigma_{sc} = \sigma_{sc}(H_\omega).$$

Théorème

Si $(H_\omega)_{\omega\in\Omega}$ ergodique alors le spectre discret de H_ω est p.s. constant.

Exemples :

Pour les modèles d'Anderson (discret et continus), de déplacement et de Poisson, il n'y a pas de spectre discret p.s.
De plus la proba. qu'un réel donné soit un valeur propre est nulle.

Calcul du spectre presque sûr.

- Modèle d'Anderson discret : $\Sigma = [-2d, 2d] + \operatorname{supp} \omega_0$.
- Modèle de Poisson : $\Sigma = [0, +\infty)$ si $V \geq 0$, et $\mathbb{R}$ sinon.
- Modèle d'Anderson continu ou de déplacement :

Théorème

$$\Sigma = \overline{\bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{\substack{\omega \text{ admissible et} \\ N\mathbb{Z}^d-\text{périodique}}} \sigma(H_\omega)}$$

où

- $\omega = (\omega_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^d}$ *admissible si* $\forall \gamma \in \mathbb{Z}^d$, $\omega_\gamma \in S$;
- $\omega = (\omega_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^d}$ $N\mathbb{Z}^d$*-périodique si* $\forall \beta \in N\mathbb{Z}^d$, $\forall \gamma \in \mathbb{Z}^d$, $\omega_{\beta+\gamma} = \omega_\gamma$.

La densité d'états intégrée

Soit Λ un cube $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{Z}^d$ et $-\Delta_C^{D,N}$ les laplaciens de Dirichlet et Neumann sur Λ.

On définit $H_{\omega,\Lambda}^{D,N} = -\Delta_L^{D,N} + V_\omega$

Théorème

Il existe $N^{D,N}$ *positives, croissantes et continues à droite t.q., en tout* E *point de continuité de* $N^{D,N}$, ω*-p.s., on a*

$$N^{D,N}(E) = \lim_{L \to +\infty} \frac{1}{L^d} N_{\omega,\Lambda_L}^{D,N}(E) \quad \text{où} \quad \Lambda_L = [-L/2, L/2]^d.$$

De plus

$$N^D(E) = \sup_L \mathbb{E}\left(\frac{1}{L^d} N_{\omega,C_L}^D(E)\right) \quad \text{et} \quad N^N(E) = \inf_L \mathbb{E}\left(\frac{1}{L^d} N_{\omega,C_L}^N(E)\right)$$

Dans nos exemples, on a $N^D = N^N$.
La valeur commune N est la **densité d'états intégrée**.

Lemme

Pour Λ cube de $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{Z}^d$, $\mathbb{E}\left(\frac{1}{Vol(\Lambda)}N^D_{\omega,\Lambda}(E)\right) \leq N(E) \leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{Vol(\Lambda)}N^N_{\omega,\Lambda}(E)\right)$.

Densité d'états intégrée, spectre et mesure spectrale

Théorème

Pour $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, on a

- *pour le modèle d'Anderson discret,* $\int_{\mathbb{R}} \varphi(E)dN(E) = \mathbb{E}\langle\delta_0, \varphi(H_\omega)\delta_0\rangle$;
- *pour les modèles continus $\mathbb{Z}^d$-ergodiques,*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(E)dN(E) = \mathbb{E}\left(tr\left[\mathbf{1}_{[0,1]^d}\varphi(H_\omega)\mathbf{1}_{[0,1]^d}\right]\right) \text{ où } trA \text{ est la trace de } A.$$

Corollaire

Le support de $dN(E)$ est égal à Σ, le spectre p.s. de H_ω.

Propriétés de la densité d'état intégrée

On se restreint au modèle d'Anderson discret ou continu.

Estimée de Wegner.

Supposons que :

- le potentiel de simple site V est positif,
- les v.a. $(\omega_\gamma)_\gamma$ admettent une densité bornée de support compact.

Théorème

Pour Λ cube de $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{Z}^d$ et $K \subset \mathbb{R}$ compact, il existe $C_K > 0$ tel que, si $J \subset K$, alors

$$\mathbb{E}\left[tr(\mathbf{1}_J(H_\omega(\Lambda)))\right] \leq C_K|J|\,|\Lambda|$$

où $H_\omega(\Lambda) = (H_\omega)_{|\Lambda_L}$ avec cond. bord. Dirichlet ou Neumann ou périodique.

Ce type d'estimées démontré pour beaucoup de modèles dans différents régimes.

Crucial : régularité de la distribution aléatoire (pbs avec Bernoulli ou Poisson).

Une idée de la preuve de l'estimée de Wegner

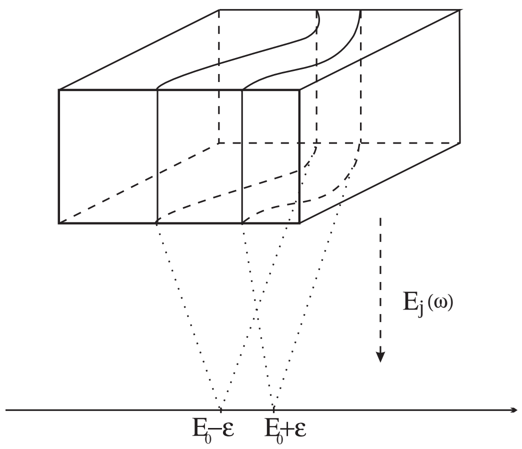
Soit $H_\omega(\Lambda_L)$ l'opérateur $(2L+1)\mathbb{Z}^d$-périodique

$$H^L_\omega = -\Delta + W + \sum_{\beta\in(2L+1)\mathbb{Z}^d}\ \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d/(2L+1)\mathbb{Z}^d} \omega_\gamma V(\cdot-\gamma-\beta)$$

sur $\mathscr{C}_L = [-L-1/2, L+1/2]^d$ avec cond. bord périod.

Une estimée de Wegner est essentiellement une estimée du type

$$\mathbb{P}(\{H^L_\omega \text{ a une v.p. dans } [E_0-\varepsilon, E_0+\varepsilon]\}) \leq CL^d\varepsilon.$$



Idée principale : l'estimée mesure les fluctuations des v.p. $H_\omega(\Lambda_L)$ comme fonctions de ω.

Il suffit donc de trouver un champ de vecteur en ω le long duquel les val. pro. de $H_\omega(\Lambda)$ se déplacent.

C'est beaucoup plus simple si la dépendance de H_ω en ω est « monotone ».

Asymptotique de Lifshitz.

Supposons que :

- le potentiel de simple site V est positif,
- les v.a. $(\omega_\gamma)_\gamma$ ne sont pas triviales.

Théorème

Soit $E_- = \inf\Sigma$. *Alors* $\displaystyle\lim_{\substack{E\to E_-\\ E>E_-}} \frac{\log|\log N(E)|}{\log(E-E_-)} \leq -d/2.$

Essentiellement $N(E) \sim O\left(e^{-(E-E_-)^{-d/2}}\right)$.

C'est à comparer au cas périodique : $n(E) \sim (E-E_-)^{d/2}$.

On peut souvent calculer l'exposant précis (conditions sur $(\omega_\gamma)_\gamma$).

Connu pour de nombreux modèles (avec parfois un exposant différent de $d/2$). Aussi aux voisinages des autres lacunes spectrales.

Une idée de la preuve de l'asymptotique de Lifshitz

Rappel : $H^L_\omega = H_0 + V^L_\omega$ où $V^L_\omega(\cdot) = \sum_{\substack{\beta\in(2L+1)\mathbb{Z}^d \\ \gamma\in\mathbb{Z}^d/(2L+1)\mathbb{Z}^d}} \omega_\gamma V(\cdot-\gamma-\beta)$ et $H_0 = -\Delta + W$.

On peut supposer $\omega_\gamma \geq 0$ et $0 \in \operatorname{supp}\omega_\gamma$.

Si $L \asymp \varepsilon^{-\nu}$, une asymptotique de Lifshitz est essentiellement une estimée du type

$$\mathbb{P}(\{H^L_\omega \text{ a une v.p. dans } [E_-, E_- + \varepsilon]\}) \leq e^{-\varepsilon^{-\eta}}.$$

Hyp. sur $(\omega_\gamma)_\gamma$ et V impliquent que $E_- = \inf \sigma(H_0)$.

On a alors $\langle (H^L_\omega - E_-)\varphi, \varphi\rangle \leq \varepsilon \|\varphi\|^2$

Soit encore $\langle (H_0 - E_-)\varphi, \varphi\rangle \leq \varepsilon\|\varphi\|^2$ et $\langle V^L_\omega \varphi, \varphi\rangle \leq \varepsilon\|\varphi\|^2$.

Première condition implique φ est « constante » sur des cubes de côté « $\varepsilon^{-1/2}$ ».

Seconde condition devient $\varepsilon^{-d/2} \sum_{|\gamma-\gamma_0|\leq\varepsilon^{-1/2}} \omega_\gamma \ll 1$.

Inégalité de grandes déviations $\Longrightarrow$ probabilité majorée par « $e^{-\varepsilon^{-d/2}}$ ».

Ingrédient crucial : monotonie de $\omega \mapsto H_\omega$.

Le régime localisé

Théorème

Si estimée de Wegner connue dans $I \subset \Sigma$ alors (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) où

1. *Pour $E \in I$, il existe $\theta > 3d - 1$ t.q.*
$$\limsup_{L\to\infty} \mathbb{P}\left\{\forall x, y \in \Lambda_L,\ |x-y| \geq \frac{L}{2},\ \|\chi_x(H_\omega(\Lambda_L) - E)^{-1}\chi_y\| \leq L^{-\theta}\right\} = 1.$$
2. *Pour $\xi \in (0,1)$,*
$$\sup_L \sup_{y\in\Lambda_L} \mathbb{E}\left\{\sum_{x\in\Lambda_L} \mathrm{e}^{|x-y|^\xi} \sup_{E_{\omega,\Lambda_L}\in\sigma(H_\omega(\Lambda_L))\cap I} \|\varphi_{\omega,\Lambda_L}\|_x \|\varphi_{\omega,\Lambda_L}\|_y\right\} < \infty.$$
3. *Pour $\xi \in (0,1)$,* $\displaystyle \sup_L \sup_{y\in\Lambda_L} \mathbb{E}\left\{\sum_{x\in\Lambda_L} \mathrm{e}^{|x-y|^\xi} \sup_{\substack{\operatorname{supp} f\subset I\\ |f|\leq 1}} \|\chi_x f(H_\omega(\Lambda))\chi_y\|_2\right\} < \infty.$

On dit que I est dans le **régime localisé**.

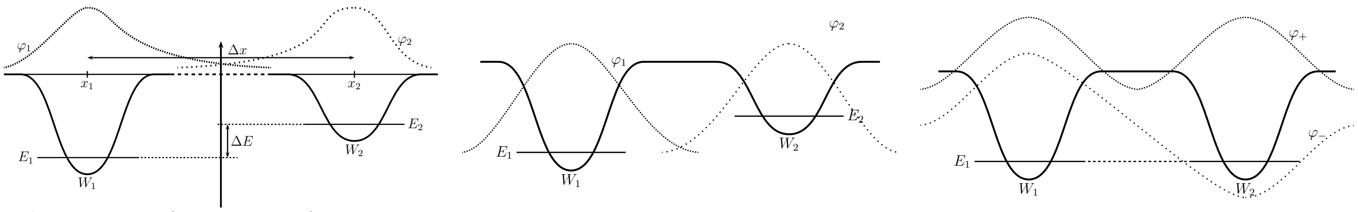
Modèles d'Anderson : estimée de Lifshitz $\Longrightarrow$ (1) pour $I = [E_-, E_- + \eta]$.

- analyse multi-échelle : [FrSp83] $\cdots$ [GeK11]
- moments fractionnaires : [AiMol93], [Ai et al 06], $\cdots$

Heuristique de la localisation

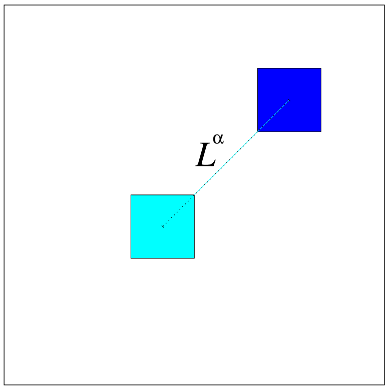
Mécanisme de base : effet tunnel ou plutôt absence d'effet tunnel.

comparer $e^{-\Delta x}$ avec ΔE — si $e^{-\Delta x} \ll \Delta E$ — si $e^{-\Delta x} \gtrsim \Delta E$



Construction par récurrence :

- Découper cube de côté L en cubes de taille $\ell = L^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$.
- Supposons E valeur propre pour cube.
- Wegner $\Rightarrow \mathbb{P}(\square$ « tunnelle » avec $\square) \lesssim L^{d\alpha} e^{-L^\alpha}$.
- En sommant, proba. d'un effet tunnel $\lesssim L^\kappa e^{-L^\alpha}$.
- On propage par récurrence la « localisation » à toutes les échelles.



On démarre la procédure grâce à l'asymptotique de Lifshitz.

Centres de localisation

Théorème

Dans le régime localisé (défini dans le théorème précédent) :

1. *pour $p > d$, il existe $q = q_{p,d}$ t.q. $\forall \xi \in (0,1)$, si L grand, avec proba. $1 - L^{-p}$: si $\varphi_{\omega,\Lambda}$ vect. pro. de $H_\omega(\Lambda)$, associé à $E \in I$, pour $(x,y) \in \Lambda^2$, on a*
$$\|\varphi_{\omega,\Lambda}\|_x \|\varphi_{\omega,\Lambda}\|_y \le L^q \mathrm{e}^{-|x-y|^\xi}.$$
2. *pour $p > d$, si $q = q_{p,d}$ t.q. $\forall \xi \in (0,1)$, si L grand, avec proba. $1 - L^{-p}$: si $\varphi_{\omega,\Lambda}$ vect. pro. de $H_\omega(\Lambda)$, associé à $E \in I$ et $x_{\omega,\Lambda} \in \Lambda$ un maximum de $x \mapsto \|\varphi_{\omega,\Lambda}\|_x$ alors pour $x \in \Lambda$, on a $\|\varphi_{\omega,\Lambda}\|_x \le L^q \mathrm{e}^{-|x-x_{\omega,\Lambda}|^\xi}$.*

Centre de localisation pour E : maximum de $x \mapsto \|\varphi_{\omega,\Lambda}\|_x$.

À priori pas unique !

Centres de localisation contenus dans une boule de rayon $\asymp (\log L)^{1/\xi} \ll L$.

Deuxième partie II

Les statistiques spectrales dans le régime localisé

Estimées de décorrélation des valeurs propres

(M) Estimée de Minami : pour $J \subset I$,

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}(\mathbf{1}_J(H_\omega(\Lambda))) \cdot (\mathrm{tr}(\mathbf{1}_J(H_\omega(\Lambda))) - 1)\right] \le C(|J|\,|\Lambda|)^2.$$

Conséquence : $\mathbb{P}(\#(\sigma(H_\omega(\Lambda)) \cap J) \ge 2\}) \le C(|J|\,|\Lambda|)^2$.

Connue pour peu de modèles :

- Anderson discret ([Min96,GV07,BHS07,CGK09,GKl11]).
- Anderson continu ([CGK10,11]).
- En dim. 1, tous les modèles vérifiant Wegner ([Kl11]).

(D) Estimée de décorrélation : pour $\beta \in (0,1)$ et $\{E_0, E_0'\} \subset I$ t.q. $E_0 \neq E_0'$, quand $L \to +\infty$ et $\ell \asymp L^\beta$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left\{\begin{array}{c}\sigma(H_\omega(\Lambda_\ell)) \cap (E_0 + L^{-d}[-1,1]) \neq \emptyset, \\ \sigma(H_\omega(\Lambda_\ell)) \cap (E_0' + L^{-d}[-1,1]) \neq \emptyset\end{array}\right\}\right) = o\left((\ell/L)^d\right). \quad (5.1)$$

Connu pour peu de modèles : Anderson discret en dim. 1 pour tout $E_0 \neq E_0'$ et en dim d si $|E_0 - E_0'| > 2d$ ([Kl10]).

Les questions :

Considérons un modèle aléatoire H_ω tel que,

1. il existe $R>0$ t.q. si $\mathrm{dist}(\Lambda,\Lambda')>R$, $H_\omega(\Lambda)$ et $H_\omega(\Lambda')$ sont indépendants ;
2. il admet une densité d'état intégrée $N(E)$;
3. dans un intervalle $I=[a,b]\subset\Sigma$ $a<b$,
   1. il vérifie une estimée de Wegner ;
   2. il vérifie une estimée de Minami ;
   3. il se trouve dans le régime localisé.

Soient $E_1(\omega,\Lambda)\le E_2(\omega,\Lambda)\le\cdots\le E_N(\omega,\Lambda)$ les valeurs propres de $H_\omega(\Lambda)$ dans I (répétées selon leur multiplicité). Le nombre N est en général aléatoire.

Valeurs propres renormalisées :

$$N(E_1(\omega,\Lambda))\le N(E_2(\omega,\Lambda))\le\cdots\le N(E_N(\omega,\Lambda))$$

ou alors

$$N_I(E_1(\omega,\Lambda))\le N_I(E_2(\omega,\Lambda))\le\cdots\le N_I(E_N(\omega,\Lambda))$$

où $N_I(\cdot)=\dfrac{N(\cdot)-N(a)}{N(b)-N(a)}$ la densité d'états intégrée renormalisée sur I.

Les questions :

Statistique locale des niveaux : Soit $E_0\in I\cap\Sigma$.
Niveaux renormalisés en E_0 :

$$\xi_j(E_0,\omega,\Lambda)=|\Lambda|\left(N(E_j(\omega,\Lambda))-N(E_0)\right).$$

Processus ponctuel : $\Xi(\xi,E_0,\omega,\Lambda)=\sum_{j=1}^{N}\delta_{\xi_j(E_0,\omega,\Lambda)}(\xi)$.

Statistique des centres de localisation : Soit $\varphi_{n,\omega}$ un vecteur propre normalisé associé à $E_{n,\omega}\in I$.
Centre de localisation pour $E_{n,\omega}$: maximum de $x\mapsto\|\varphi_{n,\omega}\|_{x+C}$.
Centres de localisation contenus dans une boule de rayon $\asymp(\log L)^{1/\xi}$.
Processus ponctuel : on fixe $x_0\in[0,1]^d$

$$\Xi^c(\xi,x;E_0,\Lambda_L)=\sum_{j=1}^{N}\delta_{(x_j(\omega)-Lx_0)/L}(x).$$

Statistiques jointes : processus ponctuel :

$$\Xi^2(\xi,x;E_0,\Lambda_L)=\sum_{j=1}^{N}\delta_{\xi_j(E_0,\omega,\Lambda)}(\xi)\otimes\delta_{(x_j(\omega)-Lx_0)/L}(x).$$

Statistiques jointes : on peut changer d'échelle. Fixons une fonction d'échelle $\Lambda \mapsto \ell_\Lambda$ t.q.

- $\ell_\Lambda \to +\infty$ quand $|\Lambda| \to +\infty$,
- ℓ_Λ pas trop grand, ni trop petit,

Processus ponctuel :

$$\Xi^2_\Lambda(\xi, x; E_0, \ell) = \sum_{j=1}^{N} \delta_{\ell^d_\Lambda(N(E_j(\omega,\Lambda))-N(E_0))}(\xi) \otimes \delta_{(x_j(\omega)-Lx_0)/\ell_\Lambda}(x).$$

Statistiques des espacements de niveaux : Soient $(E_j(\Lambda,\omega))_{1\leq j\leq N}$ les v.p. dans I ordonnées de façon croissante.

Espacements de niveaux :

$$\delta E_j(\Lambda,\omega) = |\Lambda|(E_{j+1}(\Lambda,\omega) - E_j(\Lambda,\omega)) \geq 0.$$

Distribution empirique : $DEN(x;\Lambda,\omega) = \dfrac{\#\{j;\ \delta E_j(\Lambda,\omega) \geq x\}}{N}$.

Espacements de niveaux renormalisés :

$$\delta^r E_j(\Lambda,\omega) = |\Lambda|(N_I(E_{j+1}(\Lambda,\omega)) - N_I(E_j(\Lambda,\omega))) \geq 0.$$

Distribution empirique : $DENR(x;\Lambda,\omega) = \dfrac{\#\{j;\ \delta E_j(\Lambda,\omega) \geq x\}}{N}$.

Un autre point de vue : l'opérateur sur tout l'espace

Considérons l'opérateur H_ω et $J \subset \Sigma$ un intervalle où H_ω satisfait (Loc).

Alors, ω-ps, $\sigma(H_\omega) \cap J$ fait de valeurs propres associées à des fonctions propres à décroissance exponentielle.

Proposition

Supposons (IAD), (M), (W) et (Loc).
Avec probabilité 1, si $E \in J$ et φ une fonction propre normalisée associée à E alors, il existe $x(E,\omega) \in \mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{Z}^d$), un maximum de $x \mapsto \|\varphi\|_x$, et $C_\omega > 0$ tels que, pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\|\varphi\|_x \leq C_\omega(1 + |x(E,\omega)|^2)^{q/2} e^{-\gamma|x-x(E,\omega)|^\xi}.$$

De plus, si $N(J,L)$ est le nombre de valeurs propres de H_ω ayant un centre de localisation dans Λ_L, alors $N(J,L) = |N(J)|\,|\Lambda_L|\,(1+o(1))$.

Énumérons les valeurs propres de H_ω dans J avec centre de localisation dans Λ_L : $E_1(\omega,\Lambda) \leq E_2(\omega,\Lambda) \leq \cdots \leq E_n(\omega,\Lambda)$ et leurs centres de localisation.

Les statistiques sont alors les mêmes que celles des v.p. et c.l. de $H_\omega(\Lambda)$.

Statistique locale des niveaux :

Théorème

Supposons (IAD), (W), (M) et (Loc). Soit $E_0 \in I$ telle qu'il existe $\tilde\rho \in [0, 1/(1+d))$ t.q.

$$\forall a > b,\ \exists C(a,b) > 0,\ \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0), \quad |N(E_0 + a\varepsilon) - N(E_0 + b\varepsilon)| \geq C(a,b)\varepsilon^{1+\tilde\rho}.$$

Quand $|\Lambda| \to +\infty$, $\Xi(\xi, E_0, \omega, \Lambda)$ converge faiblement vers un processus de Poisson sur $\mathbb{R}$ de densité la mesure de Lebesgue.

C'est-à-dire si $U_l \subset \mathbb{R}$ et $k_l \in \mathbb{N}$ pour $l \in \{1, \cdots, p\}$ t.q. $U_l \cap U_m = \emptyset$ si $i \neq j$, on a

$$\mathbb{P}\left(\{\omega;\ \forall l, \quad \#\{j; \xi_j(E_0, \omega, \Lambda) \in U_l\} = k_l\}\right) \underset{\Lambda \to \mathbb{Z}^d}{\to} \prod_l e^{-|U_l|} \frac{|U_l|^{k_l}}{k_l!}.$$

Connu pour certains modèles si $\nu(E_0) := \dfrac{dN}{dE}(E_0) > 0$ ([Mol81,Mi96,CGK09,11]).

On peut faire mieux dans le cas discret : on supp. seulement qu'il existe $\nu \in (0,1)$ t.q.

$$|N(E_0 + a\varepsilon) - N(E_0 + b\varepsilon)| \geq e^{-C(a,b)\varepsilon^{-\nu}}.$$

Nécessaire pour les bords du spectre [GeKl11].

Indépendance asymptotique

Théorème

Supposons (W), (M), (Loc) et (D). Soient $E_0 \neq E_0'$ s.t. $\nu(E_0), \nu(E_0') > 0$.
Quand $|\Lambda| \to +\infty$, $\Xi(E_0, \omega, \Lambda)$ et $\Xi(E_0', \omega, \Lambda)$ convergent vers deux processus de Poisson indépendants i.e. pour $U_+ \subset \mathbb{R}$ et $U_- \subset \mathbb{R}$ et $\{k_+, k_-\} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega;\ \begin{array}{l} \#\{j; \xi_j(E_0, \omega, \Lambda) \in U_+\} = k_+ \\ \#\{j; \xi_j(E_0', \omega, \Lambda) \in U_-\} = k_- \end{array}\right\}\right) \underset{\Lambda \to \mathbb{Z}^d}{\to} e^{-|U_+|} \frac{|U_+|^{k_+}}{k_+!} \cdot e^{-|U_-|} \frac{|U_-|^{k_-}}{k_-!}.$$

Question : distance minimale entre E_0 et E_0' pour obtenir indépendance ?

Théorème

Supposons (W), (M), (Loc), (GM). Soit E_0 t.q. $\nu(E_0) > 0$ et ν cont. près de E_0.
Si $E_\Lambda \in I$ et $E_\Lambda' \in I$ t.q.

- $E_\Lambda \to E_0 \leftarrow E_\Lambda'$ *quand* $|\Lambda| \to +\infty$,
- $|\Lambda| \cdot |E_\Lambda - E_\Lambda'| \to +\infty$ *quand* $|\Lambda| \to +\infty$,

alors, si $|\Lambda| \to +\infty$, $\Xi^l(\xi, E_\Lambda, \omega, \Lambda)$ et $\Xi^l(\xi, E_\Lambda', \omega, \Lambda)$ convergent vers deux processus de Poisson indépendants.

Théorème

Supposons (IAD), (W), (M) et (Loc). Soit $E_0 \in I$ où N ne s'annule pas trop vite (i.e. vérifie les conditions du théorème .
Quand $|\Lambda| \to +\infty$, $\Xi^2(\xi, E_0, \omega, L)$ converge faiblement vers un processus de Poisson sur $\mathbb{R} \times [-1,1]^d$ de densité la mesure de Lebesgue.

Connu pour certains modèles si $\nu(E_0) > 0$ ([Na07, NaKi08]).

Dans le cas discret, on peut faire mieux [GeKl11].

Distributions jointes à différentes échelles

Fixons une suite d'échelles $\ell = (\ell_\Lambda)_\Lambda$ telle que $\dfrac{(\ell_\Lambda)^\xi}{\log|\Lambda|} \underset{|\Lambda|\to+\infty}{\to} +\infty$ et $\ell_\Lambda \leq |\Lambda|^{1/d}$.

On rappelle que $\quad \Xi^2_\Lambda(\xi, x; E_0, \ell) = \displaystyle\sum_{j=1}^N \delta_{\ell^d_\Lambda(E_j(\omega,\Lambda)-E_0)}(\xi) \otimes \delta_{(x_j(\omega)-Lx_0)/\ell_\Lambda}(x)$.

Ce processus est à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. On définit $c_\ell = \displaystyle\lim_{|\Lambda|\to+\infty} |\Lambda|^{1/d}\ell_\Lambda^{-1} \in [1, +\infty]$.

Théorème

Sous les hyp. du théorème précédent, $\Xi^2_\Lambda(\xi, x; E_0, \ell)$ converge faiblement vers un processus de Poisson sur $\mathbb{R} \times (-c_\ell, c_\ell)^d$ de densité la mesure de Lebesgue.

Pour des échelles différentes : soient $\ell = (\ell_\Lambda)_\Lambda$ et $\ell' = (\ell'_\Lambda)_\Lambda$ comme ci-dessus.
Distribution :

$$\Xi^2_\Lambda(\xi, x; E_0, \ell, \ell') = \sum_{j=1}^N \delta_{\ell^d_\Lambda(N(E_j(\omega,\Lambda))-N(E_0))}(\xi) \otimes \delta_{(x_j(\omega)-Lx_0)/\ell'_\Lambda}(x).$$

Théorème

Soient J et X respectivement des ouverts bornées de $\mathbb{R}$ et $(-c_{\ell'}, c_{\ell'})^d \subset \mathbb{R}^d$. Les convergences étant entendues dans L^1_ω, on a

- *si $\ell'_\Lambda/\ell_\Lambda \to 0$ alors $\displaystyle\int_{J\times X} \Xi^2_\Lambda(\xi, x; E_0, \ell, \ell')d\xi dx \underset{|\Lambda|\to+\infty}{\to} 0$;*
- *si $\ell'_\Lambda/\ell_\Lambda \to +\infty$ alors $\displaystyle\left(\frac{\ell_\Lambda}{\ell'_\Lambda}\right)^d \int_{J\times X} \Xi^2_\Lambda(\xi, x; E_0, \ell, \ell')d\xi dx \underset{|\Lambda|\to+\infty}{\to} |J| \cdot |X|$.*

Ergodicité asymptotique universelle : le processus ponctuel :

Soit $J = [a,b]$ un intervalle compact tel que $N(b) - N(a) =: |N(J)| > 0$. Posons $N_J(\cdot) := |N(J)|^{-1}[N(\cdot) - N(a)]$. Considérons les valeurs propres de $H_\omega(\Lambda)$ dans J.

V.p. renormalisées : $N_J(E_n(\omega,\Lambda)) \le N_J(E_{n+1}(\omega,\Lambda)) \le \cdots \le N_J(E_m(\omega,\Lambda)) \le \cdots$
Centres de localisation : $x_n(\omega,\Lambda) \quad , \quad x_{n+1}(\omega,\Lambda) \quad , \quad \cdots \quad , \quad x_m(\omega,\Lambda) \quad , \quad \cdots$

Fixons $\alpha > 1$ et une suite croissante d'échelles $\ell = (\ell_\Lambda)_\Lambda$ ($\Lambda = \Lambda_L$) telles que

- $(\log L)^\alpha \le \ell_\Lambda \le L$,
- la limite suivante existe $\lim_{L\to+\infty} L^{-1}\ell_\Lambda =: c \in [0,1]$.

Soient $g_E : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ et $g_X : [0,1]^d \to \mathbb{R}^+$ deux densités de probabilité.
Pour une configuration ω fixée, considérons le processus ponctuel

$$\Xi^2_\Lambda(e,x;\ell,\omega) = \sum_{j=1}^{N} \delta_{|N(J)|\ell^d_\Lambda[N_J(E_j(\omega,\Lambda))-e]} \otimes \delta_{(x_j(\omega,\Lambda)-Lx)/\ell_\Lambda}.$$

sous la loi de densité $g_E \otimes g_X$ sur $\Lambda \times [0,1]^{d+1}$.

Ergodicité asymptotique universelle : les quantités renormalisés

Théorème

Supposons (IAD), (W), (M) et (Loc). Supposons que $J \subset I$, la région de localisation, et que $|N(J)| > 0$.
Alors, ω-ps, la loi du processus $\Xi^2_\Lambda(\cdot,\cdot;\ell,\omega)$ sous la loi $g_E \otimes g_X$ converge vers la loi du processus Poisson d'intensité 1 sur $\mathbb{R} \times [-1/c, 1/c]^d$.

Statistiques des valeurs propres et des centres de localisation

Théorème

Supposons (IAD), (W), (M) et (Loc). Supposons que $J \subset I$, la région de localisation, et que $|N(J)| > 0$.
Définissons

- *la densité $\nu_J := \frac{1}{|N(J)|}\nu(E)\mathbf{1}_J(E)$ où $\nu = \frac{dN}{dE}$;*
- *le processus $\tilde{\Xi}^2_J(E,x;\omega,\ell,\Lambda) = \sum_{E_n(\omega,\Lambda)\in J} \delta_{\nu(E)\ell^d_\Lambda[E_n(\omega,\Lambda)-E]} \otimes \delta_{(x_j(\omega,\Lambda)-Lx)/\ell_\Lambda}$.*

Alors, ω-ps, la loi du processus $\tilde{\Xi}^2_J(\cdot,\cdot;\omega,\ell,\Lambda)$ sous la loi $\nu_J \otimes g_X$ converge vers la loi du processus Poisson d'intensité 1 sur $\mathbb{R} \times [-1/c, 1/c]^d$.

Distribution des espacements des niveaux renormalisés :

Soit $(E_j(\omega,\Lambda))_{1\leq j\leq \tilde N}$ v.p. ordonnées dans J (choisi comme ci-avant).
Espacements renormalisés : $\delta E_j(\omega,\Lambda) = |\Lambda|(N_J(E_{j+1}(\omega,\Lambda)) - N_J(E_j(\omega,\Lambda))) \geq 0$.

Distribution empirique : $DEN(x;\omega,\Lambda) = \dfrac{\#\{j;\ \delta E_j(\omega,\Lambda)\geq x\}}{\tilde N}$ pour $x>0$.

Théorème

Quand $|\Lambda|\to+\infty$, ω-p.s., la distribution empirique des espacements $DEN(x;\omega,\Lambda)$ converge uniformément vers la distribution $x\mapsto e^{-x}\mathbf{1}_{x\geq 0}$.

Résultat de [Ge-Kl :10] sous hypothèse de régularité sur N.

Distribution des espacements de niveaux Distribution empirique des espacements $\delta_J E_j(\omega,\Lambda) = |\Lambda|\,|N(J)|\,(E_{j+1}(\omega,\Lambda) - E_j(\omega,\Lambda))$ notée $DEN'(x;\omega,\Lambda)$.

Théorème

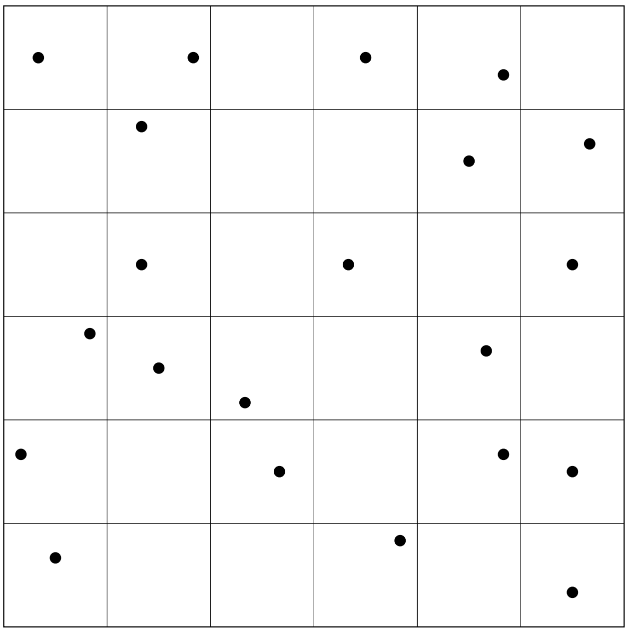
Quand $|\Lambda|\to+\infty$, ω-p.s., $DEN'(x;\omega,\Lambda)$ converge uniformément vers la distribution $x\mapsto g_{\nu,J}(x)$ définie par

$$g_{\nu,J}(x) = \frac{1}{|J|}\int_J \mathrm{e}^{-\nu_J(E)x}\nu_J(E)dE \quad \textit{et} \quad \nu_J = \frac{|J|}{|N(J)|}\frac{dN}{dE}.$$

Caractérisation des valeurs propres comme variables indépendantes : l'heuristique

Régime localisé $\Rightarrow$ v.p. ne dépend que du contexte local du potentiel $\Rightarrow$ description explicite des valeurs propres dans I en terme des valeurs propres sur des cubes indépendants.

- Choisir un cube de côté L
- Trouver les centres de localisation
- Découper le grand cube en petits cubes de taille ℓ
- Difficultés :
  - plusieurs centres dans un petit cube peu probable à cause de l'estimée de Minami : $\ell^{2d}|I|^2(L/\ell)^d = \ell^d L^d|I|^2$
  - les centres sont près du bord du cube peu probable à cause de l'estimée de Wegner : $l\cdot L^{d-1}\cdot|I|$
- Avec une grande probabilité, ces difficultés n'existent pas.



Donc, avec une grande probabilité, dans I, v.p sur le grand cube sont données par v.p. sur les petits cubes.

Contrôle de toutes les valeurs propres

Théorème

Soit I_Λ centré en E_0 (où « ν pas trop petite ») t.q. $N(I_\Lambda) \asymp |\Lambda|^{-\alpha}$.
Il existe $0 < \beta' < \beta$ t.q. pour $\ell \asymp L^\beta$ et $\ell' \asymp L^{\beta'}$, il existe famille $(\Lambda_\ell(\gamma_j))_j$ de cubes $\Lambda_\ell(\gamma_j) := \gamma_j + [0,\ell]^d$ vérifiant :

- $\cup_j \Lambda_\ell(\gamma_j) \subset \Lambda$ *et* $|\Lambda \setminus \cup_j \Lambda_\ell(\gamma_j)| \lesssim |\Lambda|\ell'/\ell$,
- $\mathrm{dist}(\Lambda_\ell(\gamma_j), \partial\Lambda) \geq \ell'$ *et* $\mathrm{dist}(\Lambda_\ell(\gamma_j), \Lambda_\ell(\gamma_k)) \geq \ell'$ *if* $j \neq k$.

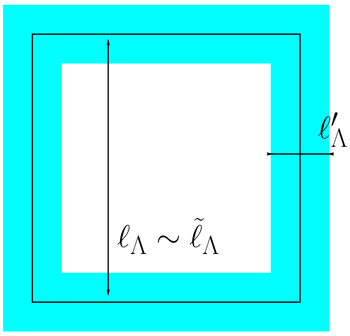
t.q., si L grand, il existe ens. conf. $\mathscr{Z}_\Lambda$ t.q. $\mathbb{P}(\mathscr{Z}_\Lambda) \geq 1 - |\Lambda|^{-(\alpha - \alpha_{d,\rho,\tilde\rho})}$, et pour $\omega \in \mathscr{Z}_\Lambda$, tout cent. loc. assoc. à v.p. dans I_Λ est dans un $\Lambda_\ell(\gamma_j)$ et tout $\Lambda_\ell(\gamma_j)$ vérifie :

1. *$H_\omega(\Lambda_\ell(\gamma_j))$ a au plus une v.p. dans I_Λ, disons, $E_j(\omega, \Lambda_\ell(\gamma_j))$;*
2. *$\Lambda_\ell(\gamma_j)$ contient au plus un cent. loc., disons $x_{k_j}(\omega,\Lambda)$, ass. à v.p. dans I_Λ, disons $E_{k_j}(\omega,\Lambda)$;*
3. *$\Lambda_\ell(\gamma_j)$ contient un cent. loc. $x_{k_j}(\omega,\Lambda)$ ssi $\sigma(H_\omega(\Lambda_\ell(\gamma_j))) \cap I_\Lambda \neq \emptyset$; alors $|E_{k_j}(\omega,\Lambda) - E_j(\omega,\Lambda_\ell(\gamma_j))| \leq e^{-(\ell')^\xi}$ et $\mathrm{dist}(x_{k_j}(\omega,\Lambda), \Lambda \setminus \Lambda_\ell(\gamma_j)) \geq \ell'$.*

Deux problèmes : intervalle d'énergie doit être petit
et probabilité pas très proche de 1.

Contrôle avec une bonne probabilité

- Posons $\ell'_\Lambda = (R\log|\Lambda|)^{\frac{1}{\xi}}$ (R grand et $\xi \in (0,1)$).
- soient $\rho' > 0$ assez petit et $q > 0$ arb.,
- soit $(I_\Lambda)_\Lambda$ t.q $|\Lambda| N(I_\Lambda) \geq 1$, $N(I_\Lambda)|I_\Lambda|^{-(1+\rho')} \geq 1$ et $N(I_\Lambda)^{\frac{1}{1+\rho'}}(\ell'_\Lambda)^d \leq 1$,
- soit $\tilde\ell_\Lambda$ t.q. $\ell'_\Lambda \ll \tilde\ell_\Lambda \ll L$ et $N(I_\Lambda)^{\frac{1}{1+\rho'}} \tilde\ell_\Lambda^d \to_{|\Lambda|\to\infty} 0$



On suppose que $N(I_\Lambda)^{-\frac{\rho'}{1+\rho'}}(\ell'_\Lambda)^{d+1} \ll \tilde\ell_\Lambda \ll N(I_\Lambda)^{-\frac{\rho-\rho'}{d(1+\rho)(1+\rho')}}$.

Théorème

Il existe décomp. de Λ en cubes $(\Lambda_{\ell_\Lambda}(\gamma_j))_j$ (avec $\ell_\Lambda \sim \ell'_\Lambda$) vérifiant propriétés du théorème précédent et un ens. de config. $\mathscr{Z}_\Lambda$ vérifiant $\mathbb{P}(\mathscr{Z}_\Lambda) \geq 1 - |\Lambda|^{-q}$ t.q.

- *pour $\omega \in \mathscr{Z}_\Lambda$, il existe au moins $\frac{|\Lambda|}{\ell_\Lambda^d}(1 + o(1))$ cubes disjoints $\Lambda_{\ell_\Lambda}(\gamma_j)$ vérif. propriétés (1), (2) et (3) du théorème précédent ;*
- *le nombre de v.p. de $H_\omega(\Lambda)$ dans I_Λ non décrites est $o(N(I_\Lambda)|\Lambda|)$.*

Soit $1 \ll \ell' \ll \ell$. Soit $\Lambda = \Lambda_\ell$ centré en 0 et intervalle $I_\Lambda = [a_\Lambda, b_\Lambda]$ dans région localisée.

On définit

- $X = X(\Lambda, I_\Lambda) = X(\Lambda, I_\Lambda, \ell')$ v.a. de Bernoulli définie par
  $X = \mathbf{1}_{H_\omega(\Lambda)\text{ a exactement une valeur propre dans } I_\Lambda \text{ associée à un centre de localisation dans } \Lambda_{\ell-\ell'}}$;
- $\tilde{E} = \tilde{E}(\Lambda, I_\Lambda)$ cette val. pro. conditionnée à $X = 1$.

Soit $\kappa \in (0,1)$ et ϑ la fonction de répartition de $\tilde{E}$.

Lemme

- $|\mathbb{P}(X=1) - |N(I_\Lambda)||\Lambda|| \lesssim (|\Lambda||I_\Lambda|)^2 + |N(I_\Lambda)||\Lambda|\ell'\ell^{-1} + |\Lambda|e^{-(\ell')^\kappa}$;
- $|[\vartheta(x) - \vartheta(y)]\,P(X=1)| \lesssim |x-y||I_\Lambda||\Lambda|$;
- $|[\vartheta(x) - \vartheta(y)]\,P(X=1) - N(x,y,\Lambda)| \lesssim (|\Lambda||I_\Lambda|)^2 + |N(x,y,\Lambda)|\ell'\ell^{-1} + |\Lambda|e^{-(\ell')^\kappa}$

  où l'on a posé $N(x,y,\Lambda) := [N(a_\Lambda + x|I_\Lambda|) - N(a_\Lambda + y|I_\Lambda|)]|\Lambda|$,

Dans le cas discret, on a des restes plus « petits ».