Asymptotiques de Lifshitz pour des potentiels non signés

F. Klopp[1] S. Nakamura[2]

[1]Université Paris 13
et
Institut Universitaire de France

[2]Université de Tokyo

5 novembre 2008

Outline

Le modèle d'Anderson

Sur $\mathbb{R}^d$, on considère le modèle d'Anderson

$$H_\omega = -\Delta + V_\omega \text{ où } V_\omega(x) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} \omega_\gamma V(x-\gamma)$$

où

- $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est continue, non identiquement nulle et à support compact ;
- $(\omega_\gamma)_\gamma$ sont des variables aléatoires i.i.d à valeurs dans $[a,b]$, a et b sont dans le support.

H_ω est auto-adjoint sur $H^2(\mathbb{R}^d)$. C'est une famille ergodique d'opérateurs.

Par conséquent, il existe un spectre presque sûr, disons Σ. Soit $E_- = \inf(\Sigma)$.

On veut étudier le spectre de ou des quantités spectrales associées à H_ω près E_-.

Quand V ne change pas de signe, il est clair que

- $E_- = \inf(\sigma(-\Delta + V_{\overline{b}}))$ si $V \leq 0$;
- $E_- = \inf(\sigma(-\Delta + V_{\overline{a}}))$ si $V \geq 0$.

Pour fixer les idées, supposons que, pour $c \in \{a,b\}$,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\log|\log \mathbb{P}(\{|c-\omega_0| \leq \varepsilon\})|}{\log \varepsilon} = 0.$$

Asymptotiques de Lifshitz

On définit la densité d'états intégrée de H_ω par

$$N(E) = \lim_{L\to+\infty} \frac{1}{(2L)^d} \#\{\text{valeurs propres de } H^N_{\omega|[-L,L]^d} \text{ inférieures à } E\}.$$

Cette limite existe presque sûrement, est indépendante de ω et croissante. On a

$$N(E) = \mathbb{E}\left[\mathrm{tr}(\mathbf{1}_{[0,1]^d}\mathbf{1}_{(-\infty,E]}(H_\omega))\right].$$

Théorème (Lifshitz,Pastur,Kirsch,Simon,...)

Si V ne change pas de signe, alors

$$\limsup_{\substack{E\to E_-\\ E\in\Sigma}} \frac{\ln|\ln(N(E))|}{\ln(E-E_-)} = -\frac{d}{2}.$$

Conséquence : localisation au fond du spectre pour le modèle d'Anderson avec des potentiels de simple site répulsifs ou attractifs.

Une idée de la preuve :

Supposons $a = 0$ et $V \geq 0$. Alors, $E_- = 0$. On se ramène à estimer

$$\mathbb{P}\left(\{H^N_{\omega|[-L,L]^d} \text{ a une valeur propre inférieure à } \varepsilon\}\right)$$

pour $L \sim \varepsilon^{-\alpha}$.
C'est la probabilité qu'il existe $\psi \in H^1([-L,L]^d)$ telle que

$$\langle -\Delta\psi,\psi\rangle + \langle V_\omega\psi,\psi\rangle \leq \varepsilon\|\psi\|^2.$$

Comme $V_\omega \geq 0$ et $-\Delta \geq 0$, ceci implique

$$\langle -\Delta\psi,\psi\rangle \leq \varepsilon\|\psi\|^2$$

et

$$\langle V_\omega\psi,\psi\rangle \leq \varepsilon\|\psi\|^2.$$

Il reste donc à estimer

$$\varepsilon^{d/2} \sum_{|\gamma|\leq\varepsilon^{-1/2}} \omega_\gamma \leq C\varepsilon,$$

ce que l'on fait par une inégalité de grandes déviations.

Le modèle :

On s'intéresse au cas quand V change de signe i.e. on suppose

(H1) il existe $x_+ \neq x_-$ tels que $V(x_-)\cdot V(x_+) < 0$.

Il nous faudra aussi supposer:

(H2) V est à support dans $(-1/2,1/2)^d$ et symétrique par réflexion i.e. pour tout $\sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_d) \in \{0,1\}^d$ et tout $x = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d$, on a

$$V(x_1,\dots,x_d) = V((-1)^{\sigma_1}x_1,\dots,(-1)^{\sigma_d}x_d).$$

L'énergie du fond du spectre :

Considérons l'opérateur $H^N_\lambda = -\Delta + \lambda V$ sur $[-1/2,1/2]^d$ avec c.b. de Neumann.
Son spectre est discret ; soit $E_-(\lambda)$ l'énergie de son état fondamental.
C'est une valeur propre simple et $\lambda \mapsto E_-(\lambda)$ est réelle analytique et concave.

Proposition

On a $E_- = \inf(\inf\sigma(H_{\overline{a}}),\inf\sigma(H_{\overline{b}})) = \inf(E_-(a),E_-(b))$.

Si a et b sont suffisamment petits, H. Najar a prouvé la proposition en supposant $\int_{\mathbb{R}^d} V(x)dx = E'_-(0) \neq 0$ mais sans l'hypothèse (H2).
Baker, Loss, Stolz ont étudié l'infimum du spectre presque sûr du modèle de déplacement aléatoire : $V_\omega(x) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} V(x-\gamma-\xi_\gamma)$.

Asymptotiques de Lifshitz : quand $E_-(a) \neq E_-(b)$

Soit $N(E)$ la densité d'états intégrée de H_ω.

Théorème

Supposons $E_-(a) \neq E_-(b)$. Alors,

$$-\frac{d}{2} - \alpha_- \leq \liminf_{E \to E_-^+} \frac{\log|\log N(E)|}{\log(E - E_-)} \leq \limsup_{E \to E_-^+} \frac{\log|\log N(E)|}{\log(E - E_-)} \leq -\frac{d}{2} - \alpha_+$$

où $c = a$ si $E_-(a) < E_-(b)$ et $c = b$ si $E_-(a) > E_-(b)$ et

$$\alpha_- = -\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log|\log \mathbb{P}(\{|c - \omega_0| \leq \varepsilon\})|}{\log \varepsilon} \geq 0,$$
$$\alpha_+ = -\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log|\log \mathbb{P}(\{|c - \omega_0| \leq \varepsilon\})|}{\log \varepsilon} \geq 0.$$

Théorème

Sous les hypothèses du théorème précédent, si on suppose de plus que la loi des variables aléatoires admet une densité absolument continue, alors, l'opérateur H_ω est complètement localisé dans un voisinage de son énergie fondamentale.

Asymptotiques de Lifshitz : quand $E_-(a) = E_-(b)$

Théorème

On suppose (H1) et (H2) vérifiées et que $E_- := E_-(a) = E_-(b)$. Alors,

1. *si les variables aléatoires $(\omega_\gamma)_\gamma$ ne suivent pas une loi de Bernoulli i.e. si $\mathbb{P}(\omega_0 = a) + \mathbb{P}(\omega_0 = b) < 1$, alors*

$$-\frac{d}{2} - \alpha_- \leq \liminf_{E \to E_-^+} \frac{\log|\log N(E)|}{\log(E - E_-)} \leq \limsup_{E \to E_-^+} \frac{\log|\log N(E)|}{\log(E - E_-)} \leq -\frac{1}{2} - \alpha_+. \quad (2.1)$$

2. *Si $\mathbb{P}(\omega_0 = a) + \mathbb{P}(\omega_0 = b) = 1$, il existe des potentiels V vérifiant (H1) et (H2) tels que $E_-(a) = E_-(b)$ et tels qu'il existe $C > 0$ tel que, pour $E \geq E_-$,*

$$\frac{1}{C}(E - E_-)^{d/2} \leq N(E) \leq C(E - E_-)^{d/2}. \quad (2.2)$$

L'exposant $-1/2$ n'est pas optimal ; on s'attend à pouvoir le remplacer par $-d/2$.

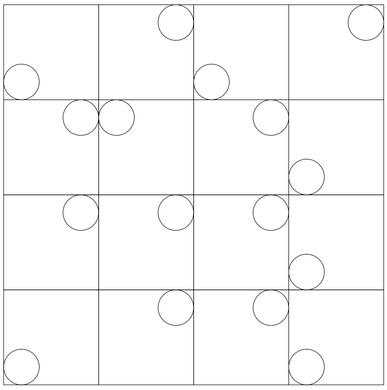
Un modèle de déplacement aléatoire

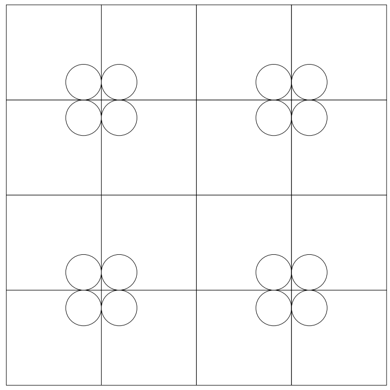
Considérons
$$H_\omega = -\Delta + V_\omega \text{ où } V_\omega(x) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} V(x-\gamma-\xi_\gamma).$$

où

- $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est continue, non identiquement nulle et à support dans $(-r,r)^d$, $0 < r < 1/2$ qui vérifie (H2);
- $(\xi_\gamma)_\gamma$ sont des variables aléatoires i.i.d distribuées dans $\{-1/2+r, 1/2-r\}^d$ telles que tous ces points ont une probabilité positive.

Par [BaLoSto07], les configurations minimisantes sont données par un regroupement symétrique.

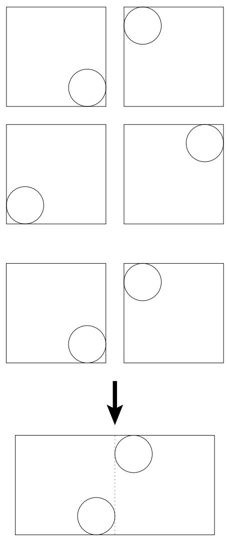




Pour $\xi \in \{-1/2+r, 1/2-r\}^d$, H_ξ est l'opérateur $-\Delta + V(x-\xi)$ sur $[-1/2,1/2]^d$ avec c.b. de Neumann.

Tous les $(H_\xi)_\xi$ ont la même énergie fondamentale, disons E_-.

H_{ξ_1} et H_{ξ_2} se recollent dans la direction e_j si E_- est aussi l'énergie fondamentale de l'opérateur $-\Delta + V(\cdot - \xi_1) + V(\cdot - e_j - \xi_2)$ sur $[-1/2,1/2]^d \cup (e_j + [-1/2,1/2]^d)$ (c.b. de Neumann).



Théorème

Soit $N(E)$ la densité d'état intégrée de H_ω. Alors,

1. *si au moins deux des $(H_\xi)_\xi$ ne se recollent pas dans au moins une direction, on a*
$$\limsup_{E\to E_-^+} \frac{\log|\log N(E)|}{\log(E-E_-)} \le -\frac{1}{2};$$
2. *si les $(H_\xi)_\xi$ se recollent dans toutes les directions, on a $N(E) \ge c(E-E_-)^{d/2}$.*

Calculer le minimum : découplage du à la symétrie

On rappelle que $E_-(\lambda)$ est l'énergie fondamentale de H^N_λ i.e. de $-\Delta+\lambda V$ sur $[-1/2,1/2]^d$ avec c.b. de Neumann.
Pour fixer les idées, on suppose que $E_-(a) \le E_-(b)$.
En partitionant $\mathbb{R}^d$ en cubes $\gamma+[-1/2,1/2]^d$ pour $\gamma\in\mathbb{Z}^d$, on obtient

$$H_\omega \ge \bigoplus_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} H^N_{\omega_\gamma}$$

Donc, $H_\omega \ge E_-(a)$.
Considérons $H^P_{\omega,L}$, l'opérateur H_ω restreint à $[-L-1/2,L+1/2]^d$ avec c.b. périodiques.
On démontre

Lemme

$$\Sigma = \overline{\bigcup_{L\ge 1}\ \bigcup_{\omega\ admissible} \sigma(H^P_{\omega,L})}.$$

Une caractérisation de l'infimum du spectre presque sûr est donnée par

$$\inf_{\omega\in[a,b]^{C^d_L}} \inf\sigma(H^P_{\omega,L}) \le E_-(a) \qquad \text{où } C^d_L = \mathbb{Z}^d\cap[-L-1/2,L+1/2]^d.$$

L'état fondamental normalisé positif de H^N_a, disons ψ, est simple et unique.

La symétrie par réflexion du potentiel V garantit que ψ est symétrique par réflexion.

Pour $\gamma\in\mathbb{Z}^d$ tel que $|\gamma|_1=1$, on prolonge ψ à $\gamma+[-1/2,1/2]^d$ par symétrie par réflexion par rapports à la face commune à $[-1/2,1/2]^d$ et à $\gamma+[-1/2,1/2]^d$.

Comme ψ est symétrique par réflexion, on obtient un prolongement de ψ qui est $\mathbb{Z}^d$-périodique, positif and symétrique par réflexion par rapport à tout plan contenant une face de l'un des cubes de la forme $\gamma+[-1/2,1/2]^d$.

De plus, ψ vérifie, pour tout $L\ge 0$, $H^P_{\bar{a},L}\psi = H^P_{a,0}\psi = H^N_{a,0}\psi = E_-(a)\psi$. Ceci démontre que $E_-(a) \ge \inf\sigma(H^P_{\bar{a},L})$. $\square$

Quand le potentiel de simple site ne change pas de signe, $H^P_{\omega,L}$ est croissant ou décroissant par rapport à chaque ω_γ ; on peut donc optimiser chaque variables aléatoire séparément.

Sous l'hypothèse de symétrie, on a également un découplage de la dépendance par rapport aux variables aléatoires.

La majoration dans l'asymptotique de Lifshitz quand $E_-(a) \neq E_-(b)$

Théorème

Supposons (H1) et (H2) vérifiées, et, que $E_-(a) < E_-(b)$. Alors, il existe $C > 0$ tel que, pour E proche de $E_-(a)$, on a $N(E) \leq N_m(C(E - E_-(a)))$ où N_m est la la densité d'état intégrée de l'opérateur aléatoire

$$H^m_\omega = H_{\overline{a}} - E_-(a) + \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} (\omega_\gamma - a)\mathbf{1}_{[-1/2,1/2]^d}(x-\gamma)$$

et $H_{\overline{a}}$ est défini ci-dessus.

C'est une conséquence des c.b. de Neumann et du

Lemme

Soit H_0 auto-adjoint sur $\mathscr{H}$, un espace de Hilbert séparable tel que $0 = \inf\sigma(H_0)$. Soit V_1, un opérateur fermé, symétrique relativement borné par rapport à H_0 de borne 0. Posons $H_1 = H_0 + V_1$ et $E_1 = \inf\sigma(H_1)$. Supposons $E_1 > 0$. Alors, il existe $C > 0$ tel que, pour $t \in [0,1]$, on a

$$C(H_0 + tV_1) \geq H_0 + t$$

Un cas où il n'y a pas d'asymptotiques de Lifshitz.

Soit $\varphi \in \mathscr{C}^\infty((-1/2,1/2)^d)$ une fonction positive, symétrique par réflexion, constante près du bord de $[-1/2,1/2]^d$ et normalisée sur ce cube.

Soit $V = \Delta\varphi/\varphi$. Alors, φ est l'état fondamental positif normalisé de $-\Delta + V$ sur $[-1/2,1/2]^d$ avec c.b. Neumann.

Soit $(\omega_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{Z}^d}$ des variables aléatoires de Bernoulli de support $\{0,1\}$.

Soit φ_L l'état fondamental de $H^N_{\omega,L}$: dans $\gamma + [-1/2,1/2]^d$, il vaut

- $\varphi_L(\cdot) = \varphi(\cdot - \gamma)$ si $\omega_\gamma = 1$;
- $\varphi_L(\cdot) =$cst si $\omega_\gamma = 0$.

Comme l'état fondamental est uniformément borné (en ω et L), un résultat de [KiSi89] et un calcul impliquent qu'il existe $C_D \geq c_N > 0$ tels que, pour tout ω,

- la seconde valeur propre du problème de Neumann est supérieure à $c_N L^{-2}$;
- l'état fondamental du problème de Dirichlet est inférieur à $C_D L^{-2}$.

Comme

$$\frac{1}{L^d}\mathbb{E}\left(\#\{\text{v. p. de } H^D_{\omega,L} \ \leq E\}\right) \leq N(E) \leq \frac{1}{L^d}\mathbb{E}\left(\#\{\text{v. p. de } H^N_{\omega,L} \ \leq E\}\right),$$

pour $L = cE^{-1/2}$, on obtient $C^{-1}E^{d/2} \leq N(E) \leq CE^{d/2}$.