Statistiques spectrales pour des systèmes aléatoires dans le régime localisé

F. Germinet[1]   F. Klopp[2]

[1]Université de Cergy-Pontoise
et
Institut Universitaire de France

[2]Université Paris 13
et
Institut Universitaire de France

Plan de l'exposé :

1. Introduction
   - Le modèle aléatoire
   - Le régime localisé
   - Quelques exemples
   - Les questions
2. les résultats
   - Statistique locale des niveaux
   - Distribution des centres de localisation
   - Distribution des espacements de niveaux
   - Distribution des espacements des centres de localisation
3. Quelques éléments de preuve
   - Caractérisation des valeurs propres comme variables indépendantes : l'heuristique
   - Théorèmes de réduction

Le modèle aléatoire

Considérons H_ω, un opérateur $\mathbb{Z}^d$-ergodique sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ or $L^2(\mathbb{Z}^d)$.
Soit σ le spectre presque sûr de H_ω.
Supposons que H_ω admette une densité d'états intégrée (DEI) i.e.

$$N(E) := \lim_{|\Lambda|\to+\infty} \frac{\#\{\text{v.p. de } H_\omega(\Lambda) \text{ inférieures à E}\}}{|\Lambda|}$$

où $H_\omega(\Lambda)$ est l'opérateur H_ω restreint à Λ (cond. périodiques).
Sur I un intervalle compact, on suppose

(W) une estimée de Wegner i.e. pour $J \subset I$,

$$\mathbb{P}(\{\sigma(H_\omega(\Lambda)) \cap J \neq \emptyset\}) \leq C|J|\,|\Lambda|$$

où

- $\sigma(H)$ est le spectre de l'opérateur H,
- $\mathbb{P}(\Omega)$ est la probabilité de l'événement Ω ;

(M) une estimée de Minami i.e. pour $J \subset I$,

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}(\mathbf{1}_J(H_\omega(\Lambda))) \cdot (\mathrm{tr}(\mathbf{1}_J(H_\omega(\Lambda))) - 1)\right] \leq C(|J|\,|\Lambda|)^2.$$

Sur I, $N(E)$ est la fonction de répartition d'une mesure a.c. de densité $\nu(E)$ bornée.

UNIVERSITÉ PARIS 13

Le régime localisé :

Le spectre dans I est purement ponctuel et les fonctions propres sont exp. déc.

(Loc) Il existe $\xi \in (0,1]$ et $\gamma > 0$ tels que, pour tout $p > 0$, il existe $q > 0$ tel que, pour $L \geq 1$, avec une probabilité supérieure à $1 - L^{-p}$, si

- $\varphi_{n,\omega}$ est un vecteur propre normalisé de $H_\omega(\Lambda_L)$ associé à $E_{n,\omega} \in I$,
- $x_n(\omega) \in \Lambda_L$ est un maximum de $x \mapsto \|\varphi_{n,\omega}\|_{x+C}$ on Λ_L

alors, pour $x \in \Lambda_L$, on a $\|\varphi_{n,\omega}\|_{x+C} \leq L^q e^{-\gamma|x-x_n(\omega)|^\xi}$.

MMF permet $\xi = 1$, AME ξ arbitrairement proche de 1.

Quelques exemples :

- Le modèle d'Anderson discret :
  - $H_\omega = -\Delta + V_\omega$
  - $-\Delta$ le Laplacien discret,
  - V_ω matrice diagonale dont les coefficients sont des v.a. i.i.d. avec une distribution assez régulière.
- Le modèle d'Anderson continu :
  - $H_\omega = -\Delta + V_\omega$
  - $-\Delta$ est le Laplacien sur $\mathbb{R}^d$,
  - $V_\omega = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} \omega_\gamma u(\cdot - \gamma)$
    - ★ $(\omega_\gamma)_\gamma$ v.a. i.i.d. avec une distribution assez régulière,
    - ★ u bornée à support compact et de signe fixé.

UNIVERSITÉ PARIS 13

Les questions :

Statistique locale des niveaux : Soit $E_0 \in I$.
Niveaux renormalisés en E_0 :

$$\xi_j(E_0, \omega, \Lambda) = |\Lambda| \, \nu(E_0) \, (E_j(\omega, \Lambda) - E_0).$$

Distribution : $\Xi(\xi, E_0, \omega, \Lambda) = \sum_{j=1}^{N} \delta_{\xi_j(E_0,\omega,\Lambda)}(\xi)$.

Statistique des centres de localisation : Soit $\varphi_{n,\omega}$ un vecteur propre normalisé associé à $E_{n,\omega} \in I$.
Centre de localisation pour $E_{n,\omega}$: maximum de $x \mapsto \|\varphi_{n,\omega}\|_{x+C}$.
À priori pas unique !
Centres de localisation contenus dans une boule de rayon $\asymp (\log L)^{1/\xi}$.
Distribution : $\Xi^c(\xi, x; E_0, \Lambda_L) = \sum_{j=1}^{N} \delta_{x_j(\omega)/L}(x)$.

Statistiques jointes : distribution :

$$\Xi^2(\xi, x; E_0, \Lambda_L) = \sum_{j=1}^{N} \delta_{\xi_j(E_0,\omega,\Lambda)}(\xi) \otimes \delta_{x_j(\omega)/L}(x).$$

Statistiques jointes : on peut changer d'échelle. Fixons une fonction d'échelle $\Lambda \mapsto \ell_\Lambda$ t.q.

- $\ell_\Lambda \to +\infty$ quand $|\Lambda| \to +\infty$,
- ℓ_Λ pas trop grand, ni trop petit,

Distribution :
$$\Xi^2_\Lambda(\xi, x; E_0, \ell) = \sum_{j=1}^{N} \delta_{\nu(E_0)(E_j(\omega,\Lambda)-E_0)\ell^d_\Lambda}(\xi) \otimes \delta_{x_j(\omega)/\ell_\Lambda}(x).$$

Statistiques des espacements de niveaux : Soient $(E_j(\Lambda, \omega))_{1 \le j \le N}$ les v.p. dans I ordonnées de façon croissante ; $N = N(\omega)$ est un nombre aléatoire.

Espacements de niveaux renormalisés

$$\delta E_j(\Lambda, \omega) = |\Lambda|(E_{j+1}(\Lambda, \omega) - E_j(\Lambda, \omega)) \ge 0.$$

Distribution des espacements renormalisés :

$$DEN(x; \Lambda, \omega) = \frac{\#\{j;\ \delta E_j(\Lambda, \omega) \ge x\}}{N}.$$

Un autre point de vue : Le spectre de H_ω dans I est p.p. ; les fonct. prop. décroissent exp. Centres de localisation bien définis.
Pour un ω typique, on considère les v.p. dans I dont le centre de localisation se trouve dans Λ_L.
Les questions restent les mêmes.

Statistique locale des niveaux :

Théorème (Molchanov, Minami, Combes-Germinet-Klein, G.-Kl.)

Supposons (W), (M) et (Loc). Soit $E_0 \in I$ t.q. $\nu(E_0) > 0$.
Quand $|\Lambda| \to +\infty$, $\Xi(\xi, E_0, \omega, \Lambda)$ converge faiblement vers un processus de Poisson sur $\mathbb{R}$ de densité la mesure de Lebesgue.

Corrélation des statistiques locales :
Considérons les limites de $\Xi(\xi, E_0, \omega, \Lambda)$ et $\Xi(\xi, E'_0, \omega, \Lambda)$ pour $E_0 \neq E'_0$.
Sont-elles indépendantes ?
Estimées de décorrélation (D) :
pour $\alpha \in (0,1)$ et $\{E_0, E'_0\} \subset I$ t.q. $E_0 \neq E'_0$, quand $L \to +\infty$ et $\ell \asymp L^\alpha$,

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}(\mathbf{1}_{I_L}(H_\omega(\Lambda_\ell))) \cdot \mathrm{tr}(\mathbf{1}_{I'_L}(H_\omega(\Lambda_\ell)))\right] = o\left((\ell/L)^d\right)$$

où $I_L = E_0 + L^{-d}[-1,1]$, $I'_L = E'_0 + L^{-d}[-1,1]$.
Connu pour le modèle discret en dimension $d = 1$ pour tout $E_0 \neq E'_0$ et en dimension d quelconque si $|E_0 - E'_0| > 2d$. [Kl.]
Estimées de Minami généralisées (MG) :
pour $J \subset K \subset I$, $\quad \mathbb{E}\left[\mathrm{tr}(\mathbf{1}_J(H_\omega(\Lambda))) \cdot (\mathrm{tr}(\mathbf{1}_K(H_\omega(\Lambda))) - 1)\right] \leq C|J||K|\,|\Lambda|^2$.
Connu pour certains modèles d'Anderson discrets et continus. [C.G.K.]

Théorème

Supposons (W), (M), (Loc), (MG) and (D). Soient $E_0 \neq E'_0$ t.g. $\nu(E_0), \nu(E'_0) > 0$.
Quand $|\Lambda| \to +\infty$, $\Xi(E_0, \omega, \Lambda)$ et $\Xi(E'_0, \omega, \Lambda)$ converges vers deux processus de Poisson indépendants i.e. pour $U_+ \subset \mathbb{R}$ et $U_- \subset \mathbb{R}$ intervalles compacts et $\{k_+, k_-\} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega;\ \begin{matrix} \#\{j; \xi_j(E_0, \omega, \Lambda) \in U_+\} = k_+ \\ \#\{j; \xi_j(E'_0, \omega, \Lambda) \in U_-\} = k_- \end{matrix}\right\}\right) \underset{\Lambda \to \mathbb{Z}^d}{\to} e^{-|U_+|}\frac{|U_+|^{k_+}}{k_+!} \cdot e^{-|U_-|}\frac{|U_-|^{k_-}}{k_-!}.$$

Question : quelle distance minimale entre E_0 et E'_0 pour conserver indépendance ?

Théorème

Supposons (W), (M), (Loc), (MG). Soit E_0 t.q. $\nu(E_0) > 0$ et ν cont. au vois. de E_0.
Si $E_\Lambda \in I$ et $E'_\Lambda \in I$ tels que

- *$E_\Lambda \to E_0 \leftarrow E'_\Lambda$ quand $|\Lambda| \to +\infty$,*
- *$|\Lambda| \cdot |E_\Lambda - E'_\Lambda| \to +\infty$ quand $|\Lambda| \to +\infty$,*

alors, quand $|\Lambda| \to +\infty$, $\Xi(\xi, E_\Lambda, \omega, \Lambda)$ et $\Xi(\xi, E'_\Lambda, \omega, \Lambda)$ convergent vers des processus de Poisson indépendants.

Distribution des centres de localisation :

Théorème (Nakano, Nakano-Killip, G.-Kl.)

Suppsons (W), (M) et (Loc). Soit $E_0 \in I$ *t.q.* $\nu(E_0) > 0$.
Quand $|\Lambda| \to +\infty$, $\Xi^2(\xi, E_0, \omega, \Lambda_L)$ *converge faiblement vers un processus de Poisson sur* $\mathbb{R} \times [-1,1]^d$ *de densité la mesure de Lebesgue.*

Fixons une suite d'échelles $\ell = (\ell_\Lambda)_\Lambda$ telle que

$$\frac{(\ell_\Lambda)^\xi}{\log|\Lambda|} \underset{|\Lambda|\to+\infty}{\to} +\infty \quad \text{and} \quad \ell_\Lambda \leq |\Lambda|^{1/d}.$$

Soit $E_0 \in I$ t.q. $\nu(E_0) > 0$; rappelons que

$$\Xi^2_\Lambda(\xi, x; E_0, \ell) = \sum_{j=1}^N \delta_{\nu(E_0)(E_j(\omega,\Lambda)-E_0)\ell^d_\Lambda}(\xi) \otimes \delta_{x_j(\omega)/\ell_\Lambda}(x).$$

Ce processus est à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. On définit $c_\ell = \lim_{|\Lambda|\to+\infty} |\Lambda|^{1/d} \ell_\Lambda^{-1} \in [1, +\infty]$.

Théorème

Sous les hyp. du théorème précédent, $\Xi^2_\Lambda(\xi, x; E_0, \ell)$ *converge faiblement vers un processus de Poisson sur* $\mathbb{R} \times (-c_\ell, c_\ell)^d$ *de densité la mesure de Lebesgue.*

Pour des échelles différentes : soient $\ell = (\ell_\Lambda)_\Lambda$ et $\ell' = (\ell'_\Lambda)_\Lambda$ comme ci-dessus.
Distribution :

$$\Xi^2_\Lambda(\xi, x; E_0, \ell, \ell') = \sum_{j=1}^N \delta_{\nu(E_0)(E_j(\omega,\Lambda)-E_0)\ell^d_\Lambda}(\xi) \otimes \delta_{x_j(\omega)/\ell'_\Lambda}(x).$$

Théorème

Soient J et X respectivement des ouverts bornées de $\mathbb{R}$ *et* $(-c_{\ell'}, c_{\ell'})^d \subset \mathbb{R}^d$. *On a*

- *si* $\ell'_\Lambda/\ell_\Lambda \to 0$ *alors, dans* L^1_ω,

$$\int_{J\times X} \Xi^2_\Lambda(\xi, x; E_0, \ell, \ell') d\xi dx \underset{|\Lambda|\to+\infty}{\to} 0;$$

- *si* $\ell'_\Lambda/\ell_\Lambda \to +\infty$ *alors, dans* L^1_ω,

$$\left(\frac{\ell_\Lambda}{\ell'_\Lambda}\right)^d \int_{J\times X} \Xi^2_\Lambda(\xi, x; E_0, \ell, \ell') d\xi dx \underset{|\Lambda|\to+\infty}{\to} |J| \cdot |X|.$$

Distribution des espacements de niveaux :

Soient $E_0 \in I$ t.q. $\nu(E_0) > 0$ et $E_0 \in I_\Lambda \subset I$ un intervalle compact.
Pour faire des statistiques, asymptotiquement, I_Λ doit contenir un nombre infini de niveaux de $H_\omega(\Lambda)$ i.e. on suppose qu'il existe $C > 0$

$$|I_\Lambda| \cdot \log^d |\Lambda| \to 0 \quad \text{et} \quad |\Lambda| \cdot |I_\Lambda| \to +\infty \quad \text{quand} \quad |\Lambda| \to +\infty.$$

Soit $(E_j(\omega,\Lambda))_{1\le j\le N}$ v.p. dans I_Λ ordonnées $E_j(\omega,\Lambda) \le E_{j+1}(\omega,\Lambda)$.
Leur nombre N est aléatoire de taille $\nu(E_0)|\Lambda| \cdot |I_\Lambda|$ (car DEI existe).
Les espacements renormalisés :

$$\delta E_j(\omega,\Lambda) = |\Lambda|\nu(E_0)(E_{j+1}(\omega,\Lambda) - E_j(\omega,\Lambda)) \ge 0.$$

Distribution empirique :

$$DEN(x;\omega,\Lambda) = \frac{\#\{j;\ \delta E_j(\omega,\Lambda) \ge x\}}{\nu(E_0)|\Lambda| \cdot |I_\Lambda|} \text{ pour } x > 0.$$

Théorème

Quand $|\Lambda| \to +\infty$, la distribution empirique des espacements $DEN(x;\omega,\Lambda)$ converge uniformément en probabilité vers la distribution $x \mapsto e^{-x}$, c'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega;\ \sup_{x\ge 0}\left|DEN(x;\omega,\Lambda) - e^{-x}\right| \ge \varepsilon\right\}\right) \underset{|\Lambda|\to+\infty}{\to} 0.$$

Que se passe-t-il sur des intervalles plus grands ?

Théorème

Soit $E_0 \in I$ t.q. $\nu(E_0) > 0$ et $E \mapsto \nu(E)$ est différentiable en E_0. Supposons que I_Λ t.q. $|\Lambda| \cdot |I_\Lambda| \to +\infty$ et $|I_\Lambda| \to 0$ quand $|\Lambda| \to +\infty$.
Alors, la distribution empirique des espacements $DEN(x;\omega,\Lambda)$ converge en probabilité vers la distribution $x \mapsto e^{-x}$ quand $|\Lambda| \to +\infty$.

Optimal car DE nécessaire dans la renormalisation pour obtenir résultat universel.

On peut étudier de grands intervalles d'énergie.

Soit $J \subset I$ compact t.q. $E \mapsto \nu(E)$ soit continue sur J et $N(J) := \int_J \nu(E)dE > 0$.
Esp. renorm. : pour $1 \le j \le N$, $\delta_J E_j(\omega,\Lambda) = |\Lambda| N(J)(E_{j+1}(\omega,\Lambda) - E_j(\omega,\Lambda))$.
Distribution empirique notée $DEN'(x;I_\Lambda,\omega,\Lambda)$.

Théorème

Quand $|\Lambda| \to +\infty$, $DEN'(x;I_E,\omega,\Lambda)$ converge en probabilité uniformément vers la distribution $x \mapsto g_{\nu,J}(x)$ définie par

$$g_{\nu,J}(x) = \frac{1}{|J|}\int_J e^{-\nu_J(\lambda)x}\nu_J(\lambda)d\lambda \quad \text{et} \quad \nu_J = \frac{|J|}{N(J)}\nu(\lambda).$$

Distribution des espacements des centres de localisation :

Dans Λ, nombre de centres correspondant à une énergie dans I_Λ d'ordre $\nu(E_0)\,|I_\Lambda|\,|\Lambda|$.

Espacement de référence : $(|\Lambda|/[\nu(E_0)\,|I_\Lambda|\,|\Lambda|])^{1/d} = (\nu(E_0)\cdot|I_\Lambda|)^{-1/d}$.

Distribution empirique des espacements :

$$DCL(s;\Lambda,\omega) = \frac{\#\{j;\ (\nu(E_0)|I_\Lambda|)^{1/d}\min_{i\neq j}|x_j(\omega)-x_i(\omega)|\geq s\}}{\nu(E_0)\cdot|I_\Lambda|\cdot|\Lambda|}$$

Théorème

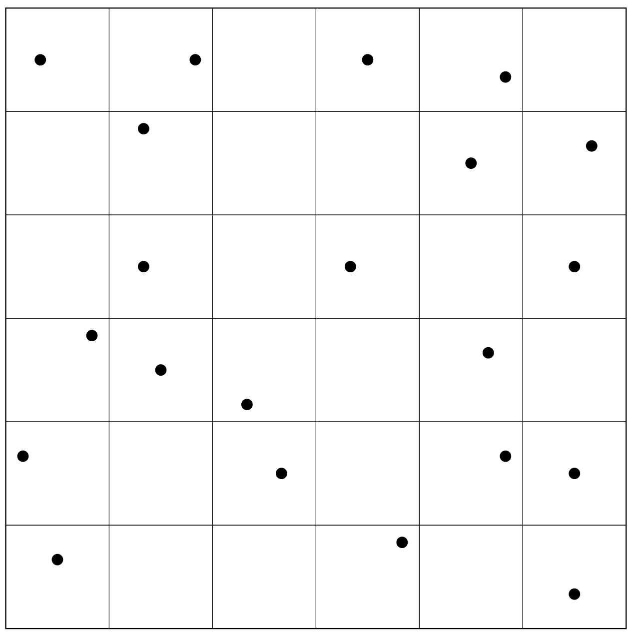
La distribution empirique des espacements $DCL(x;\omega,\Lambda)$ converge en probabilité vers la distribution $x\mapsto e^{-x^d}$ quand $|\Lambda|\to+\infty$, c'est-à-dire, pour tout $\varepsilon>0$,

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega;\sup_{s\geq 0}\left|DCL(s;\Lambda,\omega)-e^{-s^d}\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\underset{|\Lambda|\to+\infty}{\to}0.$$

Caractérisation des valeurs propres comme variables indépendantes : l'heuristique

Régime localisé $\Rightarrow$ v.p. ne dépend que du contexte local du potentiel $\Rightarrow$ description explicite des valeurs propres dans I en terme des valeurs propres sur des cubes indépendants.

- Choisir un cube de côté L
- Trouver les centres de localisation
- Découper le grand cube en petits cubes de taille ℓ
- Difficultés :
  - plusieurs centres dans un petit cube peu probable à cause de l'estimée de Minami : $\ell^{2d}|I|^2(L/\ell)^d = \ell^d L^d|I|^2$
  - les centres sont près du bord du cube peu probable à cause de l'estimée de Wegner : $l\cdot L^{d-1}\cdot|I|$
- Avec une grande probabilité, ces difficultés n'existent pas.



Donc, avec une grande probabilité, dans I, v.p sur le grand cube sont données par v.p. sur les petits cubes.

Théorèmes de réduction

En suivant cette heuristique, nous démontrons

Théorème

Soient α, β t.q. $1 > \alpha$ et $\beta - d/(d+2) = 2(\alpha - (d+1)/(d+2)) > 0$. Posons $\ell = L^\beta$ et $\tilde{N} = N^{1-\beta}$. Posons $N = L^d$ et $I_N^\alpha = [E_0 - N^{-\alpha}, E_0 + N^{-\alpha}] \subset I$.

Il existe $p > 0$ t.q., pour N suffisamment grand, il existe un ensemble de configurations $\mathscr{Z}_N$ t.q.

- $\mathbb{P}(\mathscr{Z}_N) \geq 1 - N^{-p}$,
- *pour $\omega \in \mathscr{Z}_N$, chaque cube $\Lambda_\ell(\gamma_j) := \gamma_j + [0,l]^d$ vérifie :*
  1. *le hamiltonien $H_\omega(\Lambda_\ell(\gamma_j))$ a au plus une v.p. dans I_N^α, disons, $E_j(\omega, \Lambda_\ell(\gamma_j))$;*
  2. *$\Lambda_\ell(\gamma_j)$ contient au plus un centre de localisation, disons $x_{k_j}(\omega, L)$, d'une v.p. de $H_{\omega,L}$ dans I_N^α, disons $E_{k_j}(\omega, L)$;*
  3. *$\Lambda_\ell(\gamma_j)$ contient un centre $x_{k_j}(\omega, L)$ si et seulement si $\sigma(H_\omega(\Lambda_\ell(\gamma_j))) \cap I_N^\alpha \neq \emptyset$;*

  alors, $|E_{k_j}(\omega, L) - E_j(\omega, \Lambda_\ell(\gamma_j))| = O(L^{-\infty})$ et dist$(x_{k_j}(\omega, L), \Lambda_L \setminus \Lambda_\ell(\gamma_j)) \geq L^p$.

Problème : pour cette analyse, l'intervalle d'énergie doit être petit.

Sur des intervalles plus grands, on peut faire l'analyse si on accepte de ne pas contrôler toutes les valeurs propres.

Ceci suffit pour les espacements de niveaux.

Théorème

Soit $\alpha = (\alpha_N)_N$ t.q. $\lim_N \alpha_N \searrow 0$. Posons $\tilde{N} = n/\alpha_N$, $n = n'/\alpha_N$, $n' = (R \log N)^d$, où R grand. Posons $I_N^\alpha = [E_0 - i_n, E_0 + i_n] \subset I$ avec $i_N = n^{1/d} \geq c(\log N)^{-d} \alpha_N^2$.

Pour tout $p > 0$ et N suffisamment grand, il existe un ensemble de configurations $\mathscr{Z}_N$ t.q.

- $\mathbb{P}(\mathscr{Z}_N) \geq 1 - N^{-p}$,
- *pour tout $\omega \in \mathscr{Z}_N$, il existe au moins $\dfrac{N}{n}(1 - o(1))$ cubes disjoints $\Lambda_\ell(\gamma_j)$ vérifiant les propriétés décrites dans le théorème précédent.*