

Résonances pour des « grands » systèmes ergodiques

F. Klopp

Université Pierre et Marie Curie

Séminaire d'analyse
Univ. Nantes
20/01/2012



Plan

- 1 « Grands » systèmes ergodiques
 - Généralités
 - Un modèle très simple

- 2 Les résultats
 - Le cas périodique
 - Régions sans résonances
 - Description des résonances
 - Le cas aléatoire
 - Régions sans résonances
 - Description des résonances

- 3 Quelques idées des démonstrations
 - Caractérisation des résonances
 - L'asymptotique dans le cas périodique
 - Le cas aléatoire



Généralités

Sur $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, on considère V un potentiel ergodique borné et l'opérateur

$$H = -\Delta + V.$$

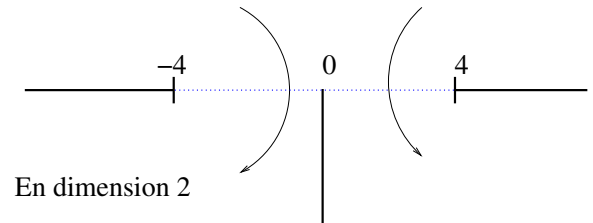
Dans cet exposé, les potentiels ergodiques envisagés seront principalement :

- V périodique ;
- $V = V_\omega$ aléatoire par exemple le modèle d'Anderson.

Grands systèmes « ergodiques » : soit $L \in \mathbb{N}$, $L \gg 1$ et posons $H_L = -\Delta + V\mathbf{1}_{|x| \leq L}$.

Perturbations à support compact de $-\Delta$:

- $\sigma_{\text{ess}}(H_L) = \sigma(-\Delta) = [-2d, 2d]$;
- le spectre de H_L hors de $\sigma(-\Delta)$ est discret.



Théorème

La fonction à valeurs opérateurs $z \in \mathbb{C}^+ \mapsto (z - H_L)^{-1}$ peut se prolonger méromorphiquement de \mathbb{C} à $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, 2d] \cup [2d, +\infty) \cup \cup_{1 \leq k \leq d-1} (4k - 2d + i\mathbb{R}^-))$ à valeurs dans les opérateurs bornés de l^2_{comp} vers l^2_{loc} .

Les pôles du prolongement analytique sont les résonances de H_L .

Ils sont associés à des espaces résonants de dimension finie.

Largeur des pôles : c'est la partie imaginaire du pôle.

Folklore : largeur de résonance joue un rôle important dans l'asymptotique à temps grand (mais pas trop) de e^{-itH_L} ; plus particulièrement, la largeur la plus petite donne la contribution principale.

But : “calculer” les résonances ; comprendre quelles relations elles (leur distribution, la distribution de leur largeurs) entretiennent avec caractéristiques spectrales de $H = -\Delta + V$.

Un modèle très simple :

Sur $\ell^2(\mathbb{N})$, on considère $V = (V_n)_{n \geq 0}$ et le problème aux valeurs propres

$$u_{n+1} + u_{n-1} + V_n u_n = E u_n \text{ si } n \geq 0 \text{ et } u_{-1} = 0$$

associé à l'opérateur

$$H = -\Delta + V = \begin{pmatrix} V_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & V_1 & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & 1 & V_2 & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Donc, pour $L > 0$, on obtient

$$H_L = -\Delta + V\mathbf{1}_{n \leq L} = \begin{pmatrix} V_0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & V_1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & V_2 & 1 & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & 0 & 1 & V_L & 1 & 0 & \\ \vdots & & & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Modèle déjà étudié :

- en physique : Titov - Fyodorov, Texier - Combet, etc
- en mathématiques : Kunz - Shapiro quand $\ell^2(\mathbb{Z})$ au lieu de $\ell^2(\mathbb{N})$ et $L = +\infty$ (i.e. demi-axe couvert par le potentiel) ; ils ont étudié les résonances loin du réel.

Nous étudions les résonances près du spectre de $-\Delta$ i.e. celle qui tendent vers $[-2, 2]$ quand $L \rightarrow +\infty$.

Le cas périodique

Supposons qu'il existe $p > 0$ tel que $V_{n+p} = V_n$ pour tout $n \geq 0$:

- soient Σ' le spectre de H et Σ_0 le spectre de $-\Delta + V$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ (V étant prolongé périodiquement) ; alors $\Sigma' = \Sigma_0 \cup \{v_j; 1 \leq j \leq n\}$ et $\Sigma_0 = \cup_{j=1}^p [a_j^-, a_j^+]$;
- Σ_0 est la composante a.c. du spectre de H ;
- $(v_j)_{0 \leq j \leq n}$ sont des valeurs propres isolées et simples associées à des fonctions propres exponentiellement décroissantes.

Régions sans résonances :

Théorème

Soit I un intervalle compact de $] -2, 2[$. Alors,

- si $I \subset \mathbb{R} \setminus \Sigma'$ alors il existe $C > 0$ tel que, pour L assez grand, il n'y a pas résonances dans $\{Re z \in I, Im z \geq -1/C\}$;
- si $I \subset \Sigma_0$ alors il existe $C > 0$ tel que, pour L assez grand, il n'y a pas résonances dans $\{Re z \in I, Im z \geq -1/(CL)\}$;
- si $\{v_j\} = \overset{\circ}{I} \cap \Sigma' = I \cap \Sigma'$ et $I \cap \Sigma_0 = \emptyset$, alors, pour L assez grand, alors il existe une unique résonance dans $\{Re z \in I, Im z \geq -1/C\}$; cette résonance, disons z_j , satisfait $Im z_j \asymp -e^{-\rho_j L}$ et $|z_j - v_j| \asymp e^{-\rho_j L}$.

Description des résonances proches du réel

Soit I un intervalle compact de $] -2, 2[\cap \overset{\circ}{\Sigma}_0$.

Soit n la densité d'états de $H = -\Delta + V$ et, pour $E \in \overset{\circ}{\Sigma}_0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ réelle analytique, on pose

$$S_f(E) = \text{vp} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - E} f(\lambda) dn(\lambda) \right).$$

Soit $(\lambda_j)_j = (\lambda_j^L)_j$ les valeurs propres de Dirichlet de $(-\Delta + V)|_{[0,L]}$ ordonnées.

Théorème

Il existe $C_0 > 0$ tel que, si $C > C_0$, il existe $L_0 > 0$ tel que si $L > L_0$, pour $\lambda_j \in I$ tel que $\lambda_{j+1} \in I$, il existe une unique résonance dans $[\lambda_j, \lambda_{j+1}] + i[-CL^{-1}, 0]$, disons z_j . Elle vérifie

$$z_j = \lambda_j + \frac{f_k(\lambda_j)}{L} \cot^{-1} \left(\left[e^{-i \arccos(\lambda_j/2)} + S_{f_k}(\lambda_j) \right] g_k(\lambda_j) \right) + o\left(\frac{1}{L}\right)$$

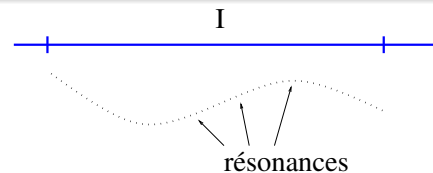
où $k = L \bmod p$, f_k et g_k sont des fonctions réelles analytiques définies par la théorie de Floquet de H sur \mathbb{Z} .

Corollaire

Dans $I + i[-C/L, 0]$, si L assez grand,

- les résonances, une fois leur partie imaginaire rééchelonnée de façon à être d'ordre 1, s'accumulent le long d'une courbe réelle analytique ;
- la densité (linéaire) locale de résonances est donnée par la densité d'états de H .

Les résonances après un rééchelonnement de leur largeur :



Description des résonances loin du réel

Théorème

Il existe $C_0 > 0$ tel que, si $C > C_0$, il existe $L_0 > 0$ tel que si $L > L_0$, dans $I + i] -\infty, -C/L]$, une résonance, disons z , vérifie

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f_k(\lambda)}{\lambda - z} dn(\lambda) + e^{-i \arccos(z/2)} = o\left(\frac{1}{C}\right)$$

Ceci redémontre les résultats de Kunz-Shapiro ($C \rightarrow +\infty$) (cas périodique).

Le cas aléatoire

Soit $V = V_\omega$ où $(V_\omega(n))_n \geq 0$ sont des variables aléatoires i.i.d. bornées admettant une densité régulière. Posons $H_\omega = -\Delta + V_\omega$ on $\ell^2(\mathbb{N})$.

- soit $\sigma(H_\omega)$ le spectre de H_ω et Σ le spectre presque sûr de $-\Delta + V_\omega$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ ($\Sigma = [-2, 2] + \text{supp} V_\omega(0)$); ω -presque sûrement, $\sigma(H_\omega) = \Sigma \cup K_\omega$;
- Σ est le spectre essentiel de H_ω : valeurs propres simples associées à des fonctions propres exponentiellement décroissantes (localisation d'Anderson) ;
- l'ensemble K_ω est le spectre discret de H_ω ; K_ω peut être vide.

Soit $\rho(E)$ l'exposant de Liapounoff de H_ω à l'énergie E .

Régions sans résonances :

Théorème

Let I un intervalle compact de $] -2, 2[$. Alors, ω -p.s., on a

- si $I \subset \mathbb{R} \setminus \sigma(H_\omega)$ alors il existe $C > 0$ tel que, pour L assez grand, il n'y a pas résonances de $H_{\omega,L}$ dans $\{Re z \in I, Im z \geq -1/C\}$;
- si $I \subset \overset{\circ}{\Sigma}$ alors il existe $C > 0$ tel que, pour L assez grand, il n'y a pas résonances de $H_{\omega,L}$ dans $\{Re z \in I, Im z \geq -e^{-2\rho L(1+o(1))}\}$ où ρ est le maximum de $\rho(E)$ sur I .

Description des résonances proche du réel

Soit $n(E)$ la densité d'états de H_ω à l'énergie E .

Théorème

Soit I un intervalle compact de $] -2, 2[\cap \overset{\circ}{\Sigma}$. Alors, ω -p.s.,

- pour tout $\kappa \in (0, 1)$, on a

$$\frac{1}{L} \# \left\{ z \text{ résonance de } H_{\omega,L} \text{ t.q. } Re z \in I, Im z \geq -e^{-L^\kappa} \right\} \rightarrow \int_I dn(E);$$

- fixons $E \in I$ tel que $n(E) > 0$; alors, pour $\delta > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\liminf_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L} \# \left\{ \text{résonances } z \text{ t.q. } Re z \in [E - \varepsilon, E + \varepsilon], Im z \geq -e^{-2(\rho(E) - \delta)L} \right\} > 0.$$

Les résonances sont beaucoup plus proches de l'axe réel que dans le cas périodique ; leur largeur est beaucoup plus petite.

C'est une conséquence de la localisation d'Anderson.

Comportement local des résonances

Soit I un intervalle compact de $] - 2, 2[\cap \overset{\circ}{\Sigma}$ et $\kappa \in (0, 1)$.

Fixons $E_0 \in I$ tel que $n(E_0) > 0$.

Soient $(z_j^L(\omega))_i$ les résonances de $H_{\omega, L}$ dans $K_L := [E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon] + i[-e^{-L^\kappa}, 0]$.

Rééchelonnement des résonances : on pose

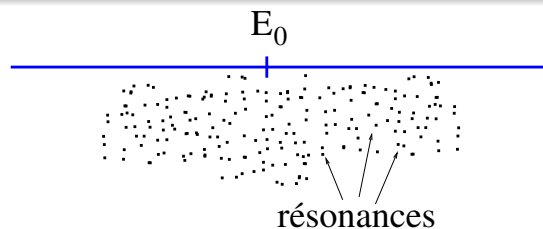
$$x_j = x_j^L(\omega) = (\operatorname{Re} z_j^L(\omega) - E_0)L \quad \text{et} \quad y_j = y_j^L(\omega) = -\frac{1}{2L} \log |\operatorname{Im} z_j^L(\omega)|.$$

On considère maintenant le processus ponctuel $\xi_L(\omega) = \sum_{z_j^L \in K_L} \delta_{(x_j, y_j)}$ dans \mathbb{R}^2 .

Théorème

Ce processus ponctuel ξ_L converge faiblement vers un processus Poisson dans $\mathbb{R} \times [0, 1]$ d'intensité la mesure $n(E_0)\rho(E_0)$.

Les résonances après un rééchelonnement :



Convergence vers le processus de Poisson : pour $p \geq 0$, si $(I_n)_{1 \leq n \leq p}$ resp. $(C_n)_{1 \leq n \leq p}$, intervalles disjoint de \mathbb{R} resp. de $[0, 1]$, alors

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left\{ \omega; \begin{array}{c} \# \left\{ j; \begin{array}{l} x_j(\omega, \Lambda) \in I_1 \\ y_j(\omega, \Lambda) \in C_1 \end{array} \right\} = k_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \# \left\{ j; \begin{array}{l} x_j(\omega, \Lambda) \in I_p \\ y_j(\omega, \Lambda) \in C_p \end{array} \right\} = k_p \end{array} \right\} \right) = \prod_{n=1}^p e^{-\mu_n} \frac{(\mu_n)^{k_n}}{k_n!},$$

où $\mu_n := n(E_0)\rho(E_0)|I_n||C_n|$ pour $1 \leq n \leq p$.

Indépendance :

Théorème

Fixons $E_0 \neq E'_0$ tels que $n(E_0) > 0$ et $n(E'_0) > 0$. Alors, les limites des processus $\xi_L(E_0, \omega)$ et $\xi_L(E'_0, \omega)$ sont stochastiquement indépendantes.

Plus loin de l'axe réel

Rééchelonnement \Rightarrow pour ε petit, description des résonances dans

$$E_0 + L^{-1} [-\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1}] + i \left[-e^{-2\varepsilon\rho(E_0)L}, -e^{-2(1+\varepsilon)\rho(E_0)L} \right].$$

Description plus précise près de la droite horizontale $\text{Im}z = e^{-2\rho(E_0)x_0L}$ (pour $x_0 \in [0, 1]$). Fixons suite croissante d'échelles $\ell = (\ell_L)_L$ t.q.

$$\frac{\ell_L}{\log L} \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{\ell_L}{L} \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} 0.$$

Soit $x_0 \in [0, 1]$ et $E_0 \in I$ t.q. $v(E_0) > 0$.

Soient $(z_i^L(\omega))_i$ les résonances dans $\tilde{K}_L := [E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon] + i \left[-e^{-\ell_L}, 0 \right]$.

On rééchelonne :

$$x_j = x_j^{\ell_L}(\omega) = (\text{Re} z_j^L(\omega) - E_0)\ell_L,$$
$$y_j = y_j^{\ell_L}(\omega) = -\frac{1}{2\ell_L} (2\rho(E_0)Lx_0 + \log |\text{Im} z_j^L(\omega)|).$$

Le processus :

$$\xi_{L,\ell}(x_0, E_0, \omega) = \sum_{z_j^L \in K_L} \delta_{(x_j, y_j)}.$$

Théorème

Pour $x_0 \in [0, 1]$ et $E_0 \in I$ t.q. $v(E_0) > 0$, le processus ponctuel $\xi_{L,\ell}(x_0, E_0, \omega)$ converge faiblement vers un processus Poisson dans $\mathbb{R} \times [0, 1]$ d'intensité $n(E_0)\rho(E_0)$.

Résonances les plus lointaines de \mathbb{R} : $x_0 = 0$.

Résonances à une distance $e^{-\ell_L}$ du réel : on est presque à une distance polynomiale.

Espacements des résonances : Soit $I \subset [-2, 2] \cap \overset{\circ}{\Sigma}$ un intervalle compact.

Soient $(z_i^L(\omega))_i$ les résonances de $H_{\omega,L}$ dans $K_L := I + i \left[-e^{-L^\kappa}, 0 \right]$. ω -p.s., dans K_L , bijection entre résonances et leur parties réelles. On ordonne par partie réelle croissante.

Comptage : pour $x > 0$, on pose : $DER(x) = \frac{\#\{i; L|z_{i+1}^L(\omega) - z_i^L(\omega)| \geq x\}}{L}$.

Théorème

ω -p.s., quand $|\Lambda| \rightarrow +\infty$, $DER(x; J, \omega, \Lambda)$ converge uniformément vers la distribution

$$x \mapsto g_{n,J}(x) \text{ où } g_{n,J}(x) = \frac{1}{|N(J)|} \int_J e^{-|N(J)| \cdot x \cdot n(\lambda)} n(\lambda) d\lambda.$$

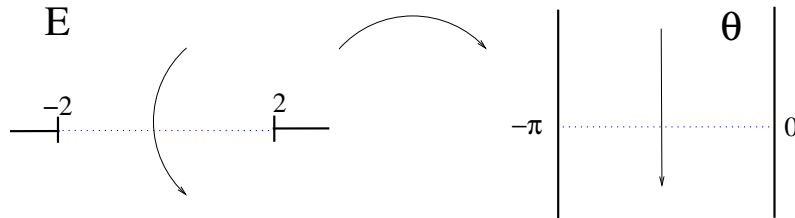
Caractérisation des résonances

Soit E tel que $\text{Im}E > 0$ et posons $E = 2 \cos(\theta)$ ($\text{Im} \theta > 0, \text{Re} \theta \in (-\pi, 0)$);

$$\begin{cases} u_{n+1} + u_{n-1} + V_n u_n = E u_n, \forall n \geq 0 \\ u_{-1} = 0 \end{cases}$$

où $V_n = 0$ if $n \geq L + 1$.

pour $n \geq L + 1, u_n^+ = u_n^+(\theta) = \beta e^{in\theta}$ (déc. exp. en $+\infty$).



Ainsi, on résout, pour $\text{Im} \theta > 0$ et $\text{Re} \theta \in (-\pi, 0)$

$$\begin{pmatrix} V_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & V_1 & 1 & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & V_L + e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_L \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_L \end{pmatrix} \quad \text{où } E = 2 \cos \theta.$$

D'après la théorie des perturbations de rang un, $E \in \mathbb{C}^-$ est une résonance si et seulement si

$$\text{où } \sum_{j=0}^L \frac{a_j}{\lambda_j - E} = -e^{-i\theta(E)}, \quad E = 2 \cos \theta(E) \quad (3.1)$$

- $(\lambda_j)_{0 \leq j \leq L} = (\lambda_j(L))_{0 \leq j \leq L}$ sont les valeurs propres de Dirichlet de H_L , $\lambda_j < \lambda_{j+1}$;
- $a_j = a_j(L) = |\varphi_j(L)|^2$ où $\varphi_j = (\varphi_j(x))_{0 \leq x \leq L}$ est le vecteur propre normalisé associé à λ_j .

Résonances proche d'une lacune de $\sigma(H)$

Pour E tel que $\text{Re}E$ est dans une lacune et dans $] -2, 2[$, $\sin \theta(E) < 0$ (indép. de L) et

$$\text{Im} \left(\sum_{j=0}^L \frac{a_j}{\lambda_j - E} \right) \asymp \text{Im} E.$$

Pas de solution de (3.1), donc, pas de résonance, jusqu'à une distance $O(1)$ du réel.

Résonances proche d'une valeur propre isolée de $\sigma(H)$

Soit $L \gg 1$, il existe un unique λ_j près de la valeur propre isolée. (3.1) devient

$$\text{où } -e^{-i\theta(E)} = \frac{a_j}{\lambda_j - E} + S_L(E)$$

- $a_j \asymp |\varphi(L)|^2$, φ est le vecteur propre normalisé associé à la valeur propre isolée ;
- $E \mapsto S_L(E)$ est analytique en E .

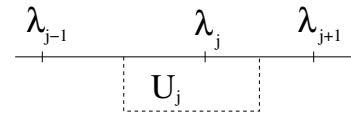
Un résultat général sur les régions sans résonances

Posons $d_j = \min(\lambda_{j+1} - \lambda_j, \lambda_j - \lambda_{j-1})$ et

$$U_j(C_0) = \left\{ \begin{array}{l} E \in \mathbb{C}^-; \\ E = 2 \cos \theta, \operatorname{Re} E \in \left[\frac{\lambda_j + \lambda_{j-1}}{2}, \frac{\lambda_j + \lambda_{j+1}}{2} \right] \\ \operatorname{Re} \theta \in (-\pi, 0), 0 < -\operatorname{Im} \theta \leq a_j d_j^2 |\sin(\operatorname{Re} \theta)| / C_0 \end{array} \right\}$$

Théorème

Il existe $C_0 > 0$ tel que, pour $0 \leq j \leq L$, il n'y a pas de résonance dans $U_j(C_0)$.



L'asymptotique dans le cas périodique

Pour E_0 dans une bande spectrale :

- $\lambda_j = E_0 + g(j/L) \sim E_0 + \beta(j - j_0)/L$ où $j_0 \sim \rho L$;
- $a_j \sim f(\lambda_j)/L \sim \alpha/L$, f et g fonctions régulières.

Ainsi (3.1) devient

$$\begin{aligned} -e^{-i\theta(E)} &= \sum_{j=-\rho L/2}^{\rho L/2} \frac{\alpha}{j - (E - E_0)L\beta} + S_L(E) \\ &= \alpha\pi \cot(\beta\pi L(E - E_0)) + S(E) + o(1) \end{aligned}$$

Le cas aléatoire

Le régime localisé :

- $\mathbb{E}(d_j) \asymp 1/L$ donc $d_j(\omega) \asymp 1/L$ mais fluctuant ;
- estimée de Minami : p.s. $d_j(\omega) \geq L^{-3}$;
- $\log a_j(\omega) \asymp -2\rho(\lambda_j)(L - x_j)$ où x_j centre de localisation de φ_j ;
- la plupart des centres de localisation sont loin du point L .

Si $L - x_{j_0} \geq L^\alpha$ ($\alpha \in (0, 1)$), alors $a_{j_0} \ll d_{j_0}$. Donc, pour $|E - \lambda_{j_0}| \asymp a_{j_0}$,

$$\sum_{j=0}^L \frac{a_j}{\lambda_j - E} = \frac{a_{j_0}}{\lambda_{j_0} - E} + S_L(E)$$

où $E \mapsto S_L(E)$ se comporte bien et sa partie imaginaire est d'ordre $a_{j_0}/d_{j_0} \ll 1$.

Solution de (3.1) donc de la forme

$$E = \lambda_{j_0} + \frac{a_{j_0}}{e^{-i\theta(\lambda_{j_0})} - S_L(\lambda_{j_0})} (1 + o(1)).$$