Mémo de topologie

Frédéric Le Roux (adaptation : Frédéric Klopp) — SU 3M260

2021

Si le contenu de ce cours est tout à fait classique, sa présentation est un peu inhabituelle. Le cours traditionnel, présenté dans les sections "théorie" de chaque chapitre, est assorti de nombreux commentaires informels ; les plus courts tiennent dans la marge (généreuse), les plus longs sont rangés dans une section à part.

D'autre part, pour aider le lecteur à s'approprier les notions, on a préféré remplacer les traditionnelles preuves par des "recettes de preuves". Celles-ci sont en fait des démonstrations abrégées, à charge pour le lecteur d'en écrire les détails. Ce travail de ré-écriture des preuves est fondamental, c'est probablement la meilleure façon d'assimiler le cours de topologie. Chacun des verbes d'action de ces recettes de preuves **est à prendre au pied de la lettre** !

Assimiler le cours de topologie signifie (1) savoir manipuler les définitions (notamment utiliser à bon escient les quantificateurs et les variables), (2) former des images mentales robustes des différentes notions (ouverts, fermés, intérieur, adhérence, *etc.*), et (3) comprendre l'utilité des différents concepts (espace métrique, compacité, connexité, complétude, *etc.*).

Ceci est le commentaire informel le moins utile de ce texte. Il ne sert qu'à occuper la marge et éviter que le lecteur se demande pourquoi le cadre ci-contre n'est pas centré. Il est, de plus, beaucoup trop long. Il risque de distraire le lecteur du très important conseil qui termine le deuxième paragraphe de ce cadre.

Table des matières

Tous les mots en bleu sont cliquables (dans la version électronique seulement...)

I Espaces métriques

I.1 Théorie

(a) Ouverts, intérieur

Soit X un ensemble. Une *distance* sur X est une application d qui associe à deux éléments x, y de X un réel positif ou nul, vérifiant les trois axiomes :

1. *séparation :* $\forall x, y \in X, \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$
2. *symétrie :* $\forall x, y \in X, \quad d(x,y) = d(y,x),$
3. *inégalité triangulaire :* $\forall x, y, z \in X, \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$

Un *espace métrique* (X, d) est un ensemble X muni d'une distance d. La distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ est un exemple fondamental de distance.

Nous verrons plus loin d'autres exemples fondamentaux, plus abstraits, comme les espaces de fonctions, de suites, de matrices.

Dans un espace métrique (X, d) on définit les notions suivantes. La *boule ouverte* de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$ est l'ensemble $B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$. Ainsi, les propriétés "$y \in B(x, \varepsilon)$" et "$d(x,y) < \varepsilon$" sont équivalentes. Une partie O de X est un *ouvert* de X si tout point de O est centre d'une boule ouverte incluse dans O :

$$\forall x \in O \quad \exists \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \subset O.$$

Exercice 1.— (très utile) Montrer que toute boule ouverte est un ouvert de X. *Aide : étant donné un point dans une boule ouverte B, il s'agit de trouver une boule b centrée en ce point et contenue dans B. Faire un dessin pour trouver un rayon de b qui convient.*

Proposition. *L'intersection d'un nombre fini de parties ouvertes est une partie ouverte. La réunion d'une famille quelconque (finie ou infinie) de parties ouvertes est une partie ouverte.*

Recette de preuve.— L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert : **prendre** un point dans l'intersection, **écrire** la définition de l'intersection, puis **utiliser** que chacun des ensembles est ouvert. (On peut commencer par deux ouverts).

Détails p11

L'union d'une famille quelconque d'ouverts est ouverte : **prendre** un point dans l'union, **utiliser** la définition de l'union, puis la définition d'un ouvert.

Soit E une partie quelconque de X. D'après la proposition précédente, la réunion de tous les ouverts inclus dans E est encore un ouvert. On l'appelle l'*intérieur* de E, et on le note $\mathrm{Inte}(E)$ (ou parfois $\mathring{E}$). L'intérieur de E est donc un ouvert inclus dans E qui contient tous les ouverts inclus dans E.

On dit naturellement que $\mathrm{Inte}(E)$ est le plus grand ouvert inclus dans E.

Proposition (Caractérisation métrique de l'intérieur)**.** *Un point x appartient à l'intérieur de E si et seulement si il est le centre d'une boule ouverte incluse dans E :*

$$x \in \mathrm{Inte}(E) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 \ B(x, \varepsilon) \subset E.$$

La définition d'intérieur est très efficace pour les démonstrations, mais la caractérisation métrique est plus intuitive. Les commentaires, section (c), peuvent aussi aider à développer une bonne intuition de cette notion.

Exercice 2.— Démontrer la proposition.

(b) Applications continues

Soient X, Y deux espaces métriques, dont les distances seront notées d_X et d_Y. Une application $f : X \to Y$ est *continue* en un point x_0 de X si :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \underbrace{\forall x \in X \quad (d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)}.$$

Noter que l'accolade signifie que tout point de la boule $B(x_0, \delta)$ a son image dans $B(f(x_0), \varepsilon)$. L'application f est dite *continue* si elle est continue en tout point x_0 de X.

En d'autres termes, f est continue en x_0 si toute boule de centre $f(x_0)$ contient l'image d'une boule de centre x_0.

Dans un espace métrique, une partie V est appelée *voisinage* d'un point x si elle contient une boule ouverte centrée en x, ou de façon équivalente si elle contient un ouvert contenant x.

Proposition (Caractérisation topologique)**.** *Soit $f : X \to Y$.*

1. *f est continue en un point x_0 de X si et seulement si l'image réciproque par f de tout voisinage de $f(x_0)$ est un voisinage de x_0.*
2. *f est continue si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X.*

L'*image réciproque* d'une partie W de Y, notée $f^{-1}(W)$, est l'ensemble des points de X qui ont leur image dans W. Voir l'appendice Ensembles et applications.

Recette de preuve.— Montrons le premier point. Pour le sens direct, on suppose f continue en x_0, on prend un voisinage W de $f(x_0)$, il s'agit de voir que $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x_0. **Appliquer** la définition de voisinage à W, puis la définition de la continuité au ε obtenu, ce qui donne un δ. A l'aide de δ, **vérifier** que $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x_0.

Pour le sens réciproque, on suppose que l'image réciproque de tout voisinage de $f(x_0)$ est un voisinage de x_0, et on veut montrer que f est continue en x_0. On part donc d'un nombre $\varepsilon > 0$, et on cherche un δ. Noter que $B(f(x_0), \varepsilon)$ est un voisinage de $f(x_0)$. **Appliquer** l'hypothèse, puis la définition de voisinage, pour **obtenir** δ. **Vérifier** enfin que δ convient.

La seconde partie est tout aussi automatique. Montrer le sens direct : que suppose-t-on ? Que cherche-t-on à montrer ? De quel objet part-on maintenant ?...

Proposition. *La composée de deux applications continues est continue.*

Plus précisément, si X, Y, Z sont trois espaces métriques, si $f : X \to Y$ est une application continue en un point x_0 de X et $g : Y \to Z$ une application continue au point $y_0 = f(x_0)$, alors l'application $g \circ f : X \to Z$ est continue au point x_0.

Recette de preuve.— La preuve est très facile en utilisant la caractérisation topologique.

Une application $f : X \to Y$ est *lipschitzienne* s'il existe une constante $k > 0$ telle que, pour tout $x, x' \in X$,

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq k d_X(x, x').$$

Une application lipschitzienne “n'éloigne pas trop les points les uns des autres”.

Exercice 3.— Montrer que toute application lipschitzienne est continue.

Exercice 4.— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 définie sur un intervalle réel I. On suppose que la dérivée de f est bornée. Interpréter l'inégalité des accroissements finis avec la définition précédente.

(c) Fermés, adhérence, frontière

Une partie F d'un espace métrique X est un *fermé* de X si son complémentaire $X \setminus F$ est un ouvert de X.

Ouverts et fermés possède des propriétés duales, voir les commentaires.

Exercice 5.— Montrer que l'union d'un nombre fini de parties fermées et une partie fermée. Montrer que l'intersection d'une famille quelconque (finie ou infinie) de parties fermées est une partie fermée.

Soit E une partie quelconque de X. D'après la proposition précédente, l'intersection de tous les fermés contenant E est encore un fermé. On l'appelle l'*adhérence* de E, et on le note $\mathrm{Adhe}(E)$ (ou parfois $\bar{E}$). L'adhérence de E est donc un fermé contenant E et contenu dans tous les fermés contenant E.

On dit naturellement que $\mathrm{Adhe}(E)$ est le plus petit fermé contenant E.

Exercice 6.—(caractérisation métrique de l'adhérence) Montrer qu'un point x appartient à l'adhérence de E si et seulement si toute boule ouverte centrée en x rencontre E.

Exercice 7.— Montrer qu'une application $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques est continue si et seulement si l'image réciproque de toute partie fermée de Y est une partie fermée de X.

Une partie E de X est dite *dense dans X* si $\mathrm{Adhe}(E) = X$. La *frontière* d'une partie E de X est l'ensemble $\mathrm{Fr}(E) = \mathrm{Adhe}(E) \cap \mathrm{Adhe}(X \setminus E)$.

Exercice 8.—

1. Donner une caractérisation métrique de la frontière de E.

2. Montrer que $\mathrm{Fr}(E) = \mathrm{Fr}(X \setminus E)$.

3. Montrer que $\mathrm{Adhe}(X \setminus E) = X \setminus \mathrm{Inte}(E)$.

4. En déduire une autre expression pour la frontière de E.

Cette formule est un exemple de la dualité ouverts/fermés.

(d) Suites

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X *converge* vers un élément ℓ de X (ou *a pour limite* ℓ) si pour toute boule ouverte centrée en ℓ, tous les termes de la suite à partir d'un certain rang sont dans la boule. Ceci revient à demander que la suite réelle $(d(x_n, \ell))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Ré-écrire cette définition en symboles.

Proposition (critère séquentiel pour l'adhérence)**.** *Soit E une partie de X. Un point x de X est dans l'adhérence de E si et seulement si il existe une suite d'éléments de E qui converge vers x.*

Un critère *séquentiel* est un critère utilisant les suites.

En particulier, E est dense dans X si et seulement si tout point de X est limite d'une suite de point de E.

Recette de preuve.— On utilise la caractérisation métrique de l'adhérence (exercice 6). S'il existe une suite d'éléments de E convergent vers un point x de X, alors il est clair que toute boule ouverte centrée en x contient un point de la suite, et ce point est dans E. Ceci montre le sens réciproque.

Pour le sens direct, on prend un point x de $\mathrm{Adhe}(E)$. Etant donné un entier $n > 0$, **appliquer** la caractérisation métrique avec $\varepsilon = 1/n$. Qu'obtient-on ? En déduire la suite recherchée.

On voit ici comment construire une suite à l'aide d'une propriété du type "$\forall \varepsilon > 0$ *etc.*."

On en déduit immédiatement un critère de fermerture.

Corollaire (critère séquentiel de fermeture)**.** *Une partie E de X est fermée si et seulement si toute suite d'éléments de E, supposée convergente dans X, a sa limite dans E.*

Proposition (critère séquentiel de continuité)**.** *Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques est continue en un point x de X si et seulement si pour toute suite d'éléments $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X convergeant vers x, la suite $(f(x_n))$ converge dans Y vers $f(x)$.*

Recette de preuve.— Soit $f : X \to Y$ une application continue (hypothèse 1) et (x_n) une suite convergent vers x dans X (hypothèse 2). Que doit-on montrer ? On prend un $\varepsilon > 0$. Que cherche-t-on ? Laquelle des deux hypothèses applique-t-on en premier ?

On démontre le sens réciproque par contraposition. **Écrire** la contraposée de la réciproque (!). **Écrire** la négation de la continuité de g. Ceci fournit un $\varepsilon > 0$ qui vérifie une propriété du type "$\forall\delta > 0$ *etc.*" ; **appliquer** cette propriété à $1/n$ pour **construire** une suite (y_n). **Vérifier** qu'on a ainsi construit une suite convergant vers y dont l'image par g ne converge pas vers $g(y)$.

On retrouve la technique de construction de suites utilisée dans la preuve de la caractérisation séquentielle des fermés.

Exercice 9.— (unicité de la limite) Montrer que si une suite (x_n) converge à la fois vers ℓ_1 et vers ℓ_2 alors $\ell_1 = \ell_2$.

Exercice 10.— Nous avons démontré plus haut que la composée de deux fonctions continues est continue. Donner une autre preuve en utilisant la caractérisation séquentielle.

(e) Sous-espaces métriques

Soit d'abord (X, d) un espace métrique, et Y une partie de X. La restriction de la distance d à $Y \times Y$ vérifie évidemment les trois axiomes de distance ; ainsi, (Y, d) est aussi un espace métrique, on dit que c'est un *sous-espace métrique* de (X, d).

Cette section décrit une façon simple de fabriquer plein de nouveaux espaces métriques. Les boules des sous-espaces métriques ont parfois des formes inattendues, voir les commentaires, section (f).

Proposition.

1. *Les ouverts de (Y, d) sont les intersections des ouverts de (X, d) avec Y.*
2. *Une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de Y converge dans (Y, d) si et seulement si elle converge dans (X, d) vers un point ℓ qui appartient à Y.*

Recette de preuve.— Pour différencier les deux espaces métriques qui interviennent dans cette proposition, on note B_Y et B_X les boules dans Y et dans X. Pour la suite, remarquons que la définition des boules dans Y est, par définition,

$$B_Y(y_0, R) = \{y \in Y, d(y, y_0) < R\}$$

et que cet ensemble n'est rien d'autre que l'intersection $B_X(y_0, R) \cap Y$. Pour le premier point, il y a deux choses à montrer. Tout d'abord, étant donné un ouvert O de (X, d), il faut voir que $O \cap Y$ est un ouvert de (Y, d) : **montrer** ceci à l'aide de la définition d'un ouvert. Enfin, étant donné un ouvert O de (Y, d), il faut trouver un ouvert O' de (X, d) tel que $O = O' \cap Y$. **Montrer** ceci en utilisant que O est une réunion de boules ouvertes de Y (exercice 27).

Le second point suit immédiatement de la définition de la convergence dans (Y, d).

(f) Distances équivalentes et topologiquement équivalentes

Une distance d est *équivalente* à une autre distance d' définie sur le **même** ensemble X s'il existe une constante $k \geq 1$ telle que l'encadrement

$$\frac{1}{k} d(x,y) \leq d'(x,y) \leq k d(x,y)$$

est vérifié pour tous x, y dans X. Les distances sont dites *topologiquement équivalentes* si l'ensemble des parties ouvertes définies à l'aide de d est le même que l'ensemble des parties ouvertes définies à l'aide de d'. Ces définitions, et la proposition qui suit, nous seront très utiles pour la section suivante sur les espaces produits.

Voir les commentaires p14.

Proposition. *Deux distances d, d' qui sont équivalentes sont topologiquement équivalentes.*

Recette de preuve.— Soient d, d' deux distances équivalentes sur un ensemble X. En utilisant la bonne inégalité dans la définition, **montrer** que toute boule, pour la distance d, centrée en un point x, contient une boule, pour la distance d', centrée au même point. **En déduire** qu'un ensemble ouvert pour l'une des deux distances est aussi ouvert pour l'autre.

(g) Produits d'espaces métriques

Cette section décrit encore une façon de fabriquer de nouveaux espaces métriques. Comme pour les sous-espaces métriques, nous décrirons les suites convergentes et les ouverts de ces nouveaux espaces.

On considère maintenant deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y). On forme l'ensemble produit

$$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Sur cet ensemble on définit les trois distances suivantes :

$$d_1((x,y),(x',y')) := d_X(x,x') + d_Y(y,y').$$

$$d_2((x,y),(x',y')) := \left((d_X(x,x')^2 + (d_Y(y,y')^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_\infty((x,y),(x',y')) := \max\left(d_X(x,x'), d_Y(y,y')\right).$$

(x,y) et (x',y') sont deux éléments de l'ensemble $X \times Y$, et chacune des trois formules leur associe un nombre positif, comme attendu d'une distance sur $X \times Y$.

Proposition. *Les applications d_1, d_2, d_∞ sont des distances sur l'ensemble $X \times Y$.*

On obtient ainsi trois espaces métriques appelés *espaces métriques produits* de (X, d_X) et (Y, d_Y).

Recette de preuve.— Dans les trois cas, l'inégalité triangulaire est le seul des trois axiomes qui n'est pas immédiat. **Montrer** l'inégalité triangulaire pour la distance d_1 (bien sûr, il faut utiliser l'inégalité triangulaire dans les espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y)). Pour la distance d_∞, commencer par **écrire** l'inégalité recherchée. Il s'agit de majorer $d_\infty((x,y),(x'',y'')) = \max\left(d_X(x,x''), d_Y(y,y'')\right)$; pour cela, majorer séparément $d_X(x,x'')$ et $d_Y(y,y'')$ par la quantité voulue. Enfin, montrer l'inégalité triangulaire pour la distance d_2, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition. *Les trois distances d_1, d_2, d_∞ définies sur l'espace produit $X \times Y$ sont équivalentes.*

Voir les commentaires sur les espaces produits.

Recette de preuve.— On oublie momentanément le problème de départ ; on considère deux nombres positifs a, b, et les quantités

$$A_1 = a + b, \quad A_2 = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}, \quad A_\infty = \max(a, b).$$

Donner une majoration de A_1 par un multiple de A_∞, et une majoration de A_∞ par un multiple de A_1. Revenir au problème de départ, **appliquer** vos majorations à a et b bien choisis, et **en déduire** que pour tous points P_0, P dans $X \times Y$,

$$d_1(P_0, P) \leq 2d_\infty(P_0, P) \text{ et } d_\infty(P_0, P) \leq d_1(P_0, P).$$

Procéder de même pour d_∞ et d_2. En déduire enfin que d_1 et d_2 sont équivalentes.

Un *pavé ouvert* de $X \times Y$ est un ensemble du type $U \times V$ où U est un ouvert de (X, d_X) et V un ouvert de (Y, d_Y).

Puisque les trois distances d_1, d_2, d_∞ sont équivalentes, elles définissent la même notion de suites convergentes et les mêmes ouverts. La proposition est valable pour n'importe laquelle de ces trois distances.

Proposition (suites convergentes et ouverts d'un espace produit)**.**

1. *Une suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $X \times Y$ converge vers un élément (x_∞, y_∞) si et seulement si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_∞ dans (X, d_X) et la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y_∞ dans (Y, d_Y).*
2. *Les ouverts de l'espace produit $X \times Y$ sont les réunions de pavés ouverts.*

Recette de preuve.— Déduire le premier point du fait qu'étant données deux suites (a_n) et (b_n) de nombres positifs, la suite $(\max(a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si chacune des deux suites converge vers 0.

Pour le second point, on a le choix de la distance : nous choisissons de travailler avec d_∞. **Écrire** la définition d'une boule dans $X \times Y$ pour cette distance, et **vérifier** que c'est le produit d'une boule dans (X, d_X) et d'une boule dans (Y, d_Y) ; en particulier, c'est un pavé ouvert. **En déduire** que tout ouvert de $(X \times Y, d_\infty)$ est réunion de pavés ouverts. Il reste à voir la réciproque, à savoir que toute réunion de pavés ouverts est un ouvert. Il suffit de voir que tout pavé ouvert est un ouvert (pourquoi ?). **Vérifier** qu'un pavé ouvert satisfait à la définition d'un ouvert dans $(X \times Y, d_\infty)$, en utilisant la définition d'un pavé ouvert, la définition d'un ouvert dans (X, d_X) et celle d'un ouvert dans (Y, d_Y).

Les formules définissant d_∞, d_1, d_2, et les propriétés correspondantes, se généralisent sans difficulté au produit d'un nombre fini d'espaces métriques $X_1, ..., X_n$.

Exercice 11.—(utile) Soit (X, d) est un espace métrique. Montrer que l'application distance $d : X \times X \to \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne lorsqu'on munit $X \times X$ de la distance d_1. *Aide : transcrire la définition générale de 1-lipschitzienne à ce contexte particulier (commencer par se demander comment s'exprime la distance au départ, et celle à l'arrivée ?). Le plus dur est fait, on doit maintenant montrer une inégalité impliquant quatre points x_0, y_0, x, y de X. Ecrire cette inégalité, se débarrasser de la valeur absolue. Montrer les deux inégalités.*

La distance associe à deux points x, y un nombre réel, c'est donc bien une application de $X \times X$ dans $\mathbb{R}$.

I.2 Commentaires

(a) Généralités des espaces métriques

En étudiant les séries de Fourier, au XIXème siècle, les mathématiciens font d'abord apparaître l'importance des propriétés topologiques de certains sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (Dirichlet 1829, Cantor, Georg 1872). Plus tard, l'étude des propriétés de convergence des suites de fonctions révèle des analogies très fortes avec les suites de nombres. Dans sa thèse, soutenue en 1906, Fréchet définit pour la première fois la notion générale d'espace métrique. Jusque là les mathématiciens travaillaient toujours avec un type d'objet bien défini : nombre, point, courbe, fonction, *etc.*. Ce nouveau cadre abstrait permet de formaliser les analogies entre suites de nombres et suites de fonctions, en englobant en une seule théorie des propriétés communes aux différents types d'objets, vus comme des points d'un espace métrique.

Le premier exemple d'espace métrique est donné par la droite réelle $\mathbb{R}$, munie de la distance définie par $d(x, y) = |x - y|$. Plus généralement, l'ensemble $\mathbb{R}^N$ muni de la distance euclidienne, celle qui correspond à l'intuition de distance qu'on peut avoir en dimension deux ou trois, est un espace métrique.

Nous avons vu dans ce chapitre qu'on pouvait munir certains espaces de fonctions d'une distance ; l'étude des propriétés métriques et topologiques des espaces de fonctions est central dans toute l'analyse moderne. Le théorème du point fixe dans les espaces complets, par exemple, permet de démontrer l'existence et l'unicité des solutions de certaines équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles (voir plus loin).

Voici un exemple assez différent. La distance de Hausdorff est définie sur l'ensemble des fermés de $\mathbb{R}^N$; il s'agit donc d'une façon de préciser l'idée que deux parties du plan sont proches l'une de l'autre. Cet espace métrique est un bon cadre pour construire des objets fractals, et en particulier pour comprendre les techniques de compression fractale. La distance de Hausdorff est expliquée en détail dans les commentaires du chapitre II.

Voici encore un autre exemple. Les mesures sont des objets fondamentaux en mathématiques, à la base à la fois des théories de l'intégration et des probabilités. La distance de Wasserstein est définie sur des espaces de mesures, et joue un rôle dans la théorie du transport optimal ; intuitivement, on peut voir chaque mesure comme un tas de sable, et la distance de Wasserstein mesure le travail minimal à effectuer pour déplacer un tas de sable d'une position à une autre. La distance de Hausdorff et la distance de Wasserstein apparaîssent par exemple dans cet article de vulgarisation qui traite de l'inférence géométrique, c'est-à-dire de la façon dont on peut retrouver les propriétés géométriques d'un objet à partir d'une photographie ou d'un scanner.

Encore un exemple : la distance de Hamming est définie sur l'ensemble des suites finies de zéros et de uns, elle compte simplement le nombre de différences : par exemple, la distance de Hamming entre les suites $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$ et $(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$ est 3. Cette distance joue un rôle important dans la théorie des codes correcteurs d'erreurs.

Il y a aussi des exemples un peu plus étranges (et moins utiles). En voici un premier. Si X est n'importe quel ensemble, on définit d en disant que $d(x, x) = 0$

pour tout élément x, et $d(x, y) = 1$ pour tous éléments x, y qui sont distincts. Cette fonction d est une distance sur X appelée *distance discrète*. En voici un second (un peu plus utile). Soit δ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $\delta(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$. Alors δ est une distance sur $\mathbb{R}$. Noter que l'espace métrique $(\mathbb{R}, \delta)$ est borné : pour tous x, y on a $\delta(x, y) < \pi$! ! On peut dire que cette distance "déforme $\mathbb{R}$ en le compressant énormément au voisinage de $\pm\infty$" : par exemple, on a $\delta(10, 100) \simeq 0,1$ et $\delta(100, 1000) \simeq 0,001$. Ces exemples sont un peu surprenants, mais ils rentrent aussi dans le cadre des espaces métriques. La puissance de ce cadre général, c'est justement que tous les énoncés de ce chapitre sont valables dans tous les exemples que nous venons de mentionner (et bien d'autres encore).

Cette vaste généralité peut donner le vertige ; on ne peut pas vraiment avoir tous ces exemples présents à l'esprit quand on étudie les espaces métriques ! Mais en réalité, pour visualiser les propriétés des espaces métriques généraux, *il suffit la plupart du temps de penser aux sous-espaces du plan euclidien*. Le plan euclidien est un bon modèle de la feuille de papier sur laquelle on écrit, c'est probablement l'espace métrique le plus accessible à l'intuition.

Prenons un exemple. Pour voir que toute boule ouverte est un ouvert (exercice 1), on prend un point quelconque x dans une boule ouverte $B(x_0, R)$, et il s'agit (d'après la définition des ouverts) de trouver un rayon $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B(x, \varepsilon)$ est incluse dans $B(x_0, R)$. Notre objectif fait intervenir quatre variables (x_0, R, x, ε), et un dessin est indispensable pour saisir le rôle de chacune. On représente le problème dans le plan (en se souvenant que la distance $d(x_0, x)$ est *strictement* inférieure à R). Le fait de dessiner permet non seulement de voir pourquoi le résultat recherché est plausible, mais aussi d'avoir une idée d'une valeur de ε qui semble convenir : sur ce dessin dans le plan, on voit que la boule de centre x et de rayon $R - d(x_0, x)$ est contenue dans $B(x_0, R)$. Il se trouve que ce qu'on voit ici dans le plan marche dans tout espace métrique, comme on peut le vérifier facilement à l'aide de l'inégalité triangulaire. Le dessin nous permet ici de trouver une valeur de ε, ce qui est la partie la plus difficile de l'exercice ; ensuite "il n'y a plus qu'à" vérifier que cette valeur convient. Bien que le dessin soit dans le plan, la vérification doit être valable pour tout espace métrique, on l'écrit en utilisant seulement nos trois axiomes et les propriétés qui en découlent.

Faire le dessin !

Exercice 12.—

1. Montrer que la distance de Hamming sur l'ensemble des suites de 8 bits (un bit est un symbole 0 ou 1) vérifie les trois axiomes des espaces métriques.

2. Même question pour la distance discrète sur un ensemble X quelconque.

3. Même question pour la distance tordue δ définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Détails des esquisses de preuves

Regardons, sur un exemple, ce qu'on attend du lecteur lorsqu'il doit rédiger les détails des "esquisses de preuves". Rappelons-la formulation de la première esquisse de preuve :

Recette de preuve.— L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert : **prendre** un point dans l'intersection, **écrire** la définition de l'intersection, puis **utiliser** que chacun des ensembles est ouvert. (On peut commencer par deux ouverts).

Ecrivons la preuve pour deux ouverts. La première chose à la charge du lecteur-acteur est de **choisir des notations** pour les objets impliqués dans la preuve. Ensuite on suit la recette...

Preuve.— Soit O_1, O_2 deux ouverts, montrons que $O_1 \cap O_2$ est un ouvert. Soit x un point de $O_1 \cap O_2$. Par définition de l'intersection, x appartient à la fois à O_1 et à O_2. Puisque O_1 est ouvert et contient x, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $B(x, \varepsilon_1) \subset O_1$. Puisque O_2 est ouvert et contient x, il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que $B(x, \varepsilon_2) \subset O_2$.

Soit $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. C'est un nombre strictement positif, vérifions que la boule $B(x, \varepsilon)$ est incluse dans $O_1 \cap O_2$. Puisque $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ et $\varepsilon \leq \varepsilon_2$ on a

On a en tête le but : trouver un $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset O_1 \cap O_2$.

$$B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_1) \subset O_1 \text{ et } B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_2) \subset O_2$$

et donc $B(x, \varepsilon) \subset O_1 \cap O_2$ comme voulu.

□

Pour un nombre fini d'ouverts ce n'est pas beaucoup plus difficile à condition de ne pas se noyer dans les notations :

Preuve.— Soit $O_1, \ldots O_k$ des ouverts, montrons que l'intersection

$$\bigcap_{i=1,\ldots,k} O_i$$

est un ouvert. Soit x un point de l'intersection. Soit $i \in \{1, ..., k\}$; par définition de l'intersection, x appartient à O_i ; puisque O_i est ouvert, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $B(x, \varepsilon_i) \subset O_i$.

Soit

$$\varepsilon = \min_{i=1,\ldots,k} (\varepsilon_i).$$

C'est un nombre strictement positif, vérifions que la boule $B(x, \varepsilon)$ est incluse dans l'intersection. Pour chaque i entre 1 et k, on a $\varepsilon \leq \varepsilon_i$ et par conséquent

Qu'est-ce qui ne marche pas si on essaie de faire la même preuve pour une intersection infinie d'ouverts ?

$$B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_i) \subset O_i.$$

Finalement

$$B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1,\ldots,k} O_i$$

comme voulu.

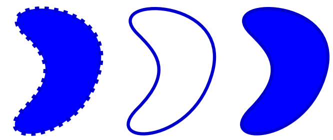
□

Exercice 13.— Ecrire les détails de la preuve pour une union quelconque d'ouverts.

(c) Qu'est-ce qu'un ouvert ?

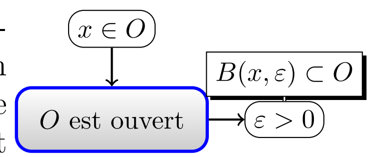
Intuitivement, une partie de X est un ouvert si quel que soit le point que l'on choisisse dans cette partie, tous les points assez proches sont aussi dedans ; autrement dit l'ensemble "entoure" chacun de ses points. Lorsqu'on veut dessiner un ouvert, il faut bien spécifier que le bord du dessin ne fait pas partie de l'ensemble considéré, ce qu'on indique par des pointillés. Par exemple le carré sans son bord, $C =]0,1[\times]0,1[$, est un ouvert du plan, mais le carré avec son bord $C' = [0,1] \times [0,1]$ ne l'est pas, parce que les points du bord ne sont pas entouré de points du carré. Le complémentaire de C', par contre, est ouvert, ce qui veut dire que C' est fermé. Il est intéressant de noter qu'il y a plein d'ensemble intermédiaires entre C et C', comme l'ensemble $C \cup \{(1,1)\}$, le carré sans son bord mais avec un coin : ces ensembles donnent des exemples simples qui ne sont ni ouverts ni fermés.

Si le carré fermé C' n'est pas ouvert, c'est que les points du bord du carré, qui font partie de C', ne vérifient pas la définition des ouverts : toutes les boules, aussi petites soient-elles, que l'on peut dessiner autour de ces points, débordent de l'ensemble C'. Il y a donc dans C' deux types de points : ceux qui vérifient la définition des ouverts (ils sont centre d'une boule incluse dans C'), et les autres. L'**intérieur** de C' est exactement l'ensemble des points de C' qui satisfont à la définition des ouverts.



Intérieur (sans la ligne pointillée), frontière, adhérence

La **frontière** d'une partie, quant à elle, est l'ensemble des points x qui "touchent" à la fois cette partie et son complémentaire ; le sens précis de "toucher" est qu'on doit pouvoir trouver des points aussi proche qu'on veut de x, aussi bien dans la partie que dans son complémentaire. La frontière peut contenir des points qui ne sont pas dans la partie : par exemple, la frontière du carré ouvert C coïncide avec ce qu'on appelle couramment le bord du carré, et aucun point du bord n'est dans C. Les ensembles C, C' et $C \cup \{(1,1)\}$ ont tous les trois la même frontière. Intérieur et frontière d'une partie sont toujours disjoints ; leur réunion forme l'**adhérence** de l'ensemble. Finalement, toutes ces notions sont assez simples quand on les appliquent à des ensembles sympathiques comme le disque ou le carré (ou la patate dessinée dans la marge). C'est un peu plus compliqué pour les ensembles moins accessibles à l'intuition, comme le sous-ensemble $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ constitué des nombres rationnels. Tout nombre réel peut être approché aussi précisément qu'on le souhaite par un nombre rationnel, mais aussi par un nombre irrationnel : autrement dit, la frontière de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$, ce qui peut paraître un peu suprenant.



Les dessins aident à avoir une intuition des propriétés topologiques des ensembles, mais les preuves doivent utiliser les définitions formelles. La définition d'un ouvert commence par "$\forall x \in O \ \ \exists \varepsilon > 0$". On peut voir cette propriété comme une machine qui produit un nombre ε à chaque fois qu'on lui fournit un élément x de O. On la représente alors par le schéma ci-contre.

Le plus important dans ce schéma, c'est qu'il y une entrée et une sortie, qui ont des rôles très différents. Pour **utiliser** la propriété "O est ouvert", on doit indiquer à quel élément x de O on veut appliquer la définition : la machine ne peut pas fonctionner tant qu'on ne lui a pas fourni un x en entrée ! On reçoit en échange un nombre ε, avec la propriété que $B(x,\varepsilon) \subset O$. Pour **montrer** qu'un ensemble O est ouvert à partir de la définition, on doit "construire une machine", c'est-à-dire expliquer comment, pour chaque élément x de O, on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset O$. La preuve commencera donc en général par "Soit x un élément de O" , et dira quelque part comment définir ε.

Exercice 14.— Dans la preuve que l'intersection de deux ouverts est un ouvert, le but est de montrer qu'un certain ensemble est ouvert : repérer les phrases "Soit x..." et la phrase qui définit ε. Repérer également l'endroit où on utilise le fait que O_1 est ouvert, et le nombre reçu en échange.

Exercice 15.— **1.** Faire un schéma analogue illustrant la définition de l'intérieur, de l'adhérence, de la continuité en un point x_0, d'une valeur d'adhérence. Dans la suite du cours, illustrer chaque définition par un schéma du même type. **2.** Dans la preuve de la continuité de la composée de deux fonctions continue, faire un schéma pour la propriété "f est continue en x" et un autre pour la propriété "g est continue en $f(x)$". Illustrer la preuve en branchant la sortie de l'une des deux machines (laquelle ?) sur l'entrée de l'autre.

(d) Dualité ouverts/fermés

Dans un espace métrique (ou topologique), les fermés sont exactement les complémentaires des ouverts. L'application $Y \mapsto X \setminus Y$, définie sur l'ensemble des parties de X, est appelée "passage au complémentaire" ; de nombreuses propriétés des fermés peuvent se déduire de celles des ouverts (et réciproquement) en utilisant cette application. Le passage au complémentaire échange en particulier les notions suivantes :
- union et intersection ;
- intérieur et adhérence ;
- être dense, être d'intérieur vide.

Exercice 16.—

1. Donner des énoncés précis correspondant à ces échanges de propriétés par passage au complémentaire, et démontrer-les.

2. Enoncer un critère de continuité des applications portant sur les fermés, puis démontrer-le à partir du critère de continuité portant sur les ouverts.

On verra plus tard d'autres dualités, par exemple la propriété d'être compact peut s'exprimer par une propriété portant sur les ouverts, ou bien par la propriété duale portant sur les fermés.

(e) Notions métriques et topologiques

Les notions de suite convergente, d'intérieur, adhérence, de fonction continue, de valeur d'adhérence d'une suite, peuvent être caractérisées en termes d'ouverts (voir les lemmes ou exercices appelés "caractérisation topologique"). Toutes ces notions sont dites "topologiques", elles ne dépendent pas vraiment de la métrique d choisie sur l'ensemble X mais uniquement de la famille des ouverts associée à cette métrique. Ainsi, la proposition disant que la famille des ouverts de l'espace produit $X \times Y$ est la même pour les trois distances d_1, d_2, d_∞ est très important : toutes les notions topologiques vont être les mêmes pour ces trois distances. On peut parler par exemple de la topologie du carré $[0, 1]^2$ sans préciser laquelle des trois distances on a choisi.

Un *homéomorphisme* est une application $\Phi : X \to Y$ entre deux espaces métriques (ou juste topologiques) X et Y, qui est bijective, continue, et d'inverse continue. En utilisant le critère topologique de continuité, on voit que la continuité de Φ et de Φ^{-1} revient à dire qu'une partie O de X est ouverte si et seulement si $\Phi(O)$ est ouverte. Lorsqu'il existe un homéomorphisme entre X et Y, on dit que ces deux espaces sont *homéomorphes*. Voici un exemple : l'application

Dessiner le graphe de cette application.

$$\tan : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\to \mathbb{R}$$

est un homéomorphisme (dont l'inverse est l'application arctangente). Un exemple un peu plus sophistiqué : soit S la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$, et C le bord du cube $[-1,1]^3$ (qui contient la sphère S). Soit f l'application qui "projette S sur C depuis l'origine" : autrement dit, pour chaque point x de S, on trace la demi-droite issue de l'origine et passant par x, cette demi-droite rencontre le bord du cube en un unique point qui est précisément $f(x)$. Alors l'application f est un homéomorphisme entre S et C. Intuitivement, deux espaces sont homéomorphes lorsqu'on peut déformer le premier jusqu'à ce qu'il prenne la forme du deuxième, sans rien déchirer, ni écraser, ni recoller. La notion d'homéomorphisme est fondamentale en topologie : un topologue considère que deux espaces métriques qui sont homéomorphes ne sont pas vraiment différents. En particulier, toutes les propriétés topologiques de l'un se reflètent alors dans l'autre comme dans un miroir ; cette propriété est formalisée par l'exercice suivant.

Faire un dessin représentant la sphère S, le cube C et l'application f.

Exercice 17.— Soit $\Phi : X \to Y$ un homéomorphisme. Vérifier que :

1. $\Phi(O)$ est ouvert si et seulement si O est ouvert,

2. $\Phi(F)$ est fermé si et seulement si F est fermé,

3. l'intérieur de l'image par Φ d'un ensemble E est égal à l'image de l'intérieur de E,

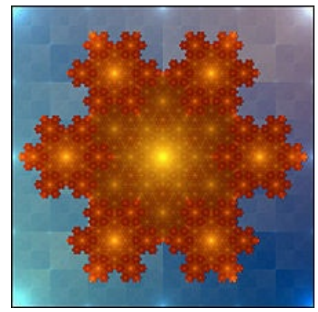
4. l'adhérence de l'image est égale à l'image de l'adhérence,

5. l'image d'une suite convergeant vers x est une suite convergeant vers $\Phi(x)$,

6. X est compact si et seulement si Y est compact,

7. X est connexe si et seulement si Y est connexe,

8. ...



Le flocon de neige de Von Koch est un sous-espace métrique du plan qui est homéomorphe à un disque (source Wikipedia).

Une *isométrie* est une application bijective $\Phi : X \to Y$ entre deux espaces métriques, qui est compatible avec les distances : la distance entre deux points de X est égale à la distance entre leurs images dans Y. En symboles :

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad d_X(x_1, x_2) = d_Y((\Phi(x_1), \Phi(x_2)).$$

Lorsqu'il existe une telle isométrie, on dit que X et Y sont *isométriques*. Toutes leurs propriété métriques sont alors identiques ; c'est en particulier le cas de la complétude, qui est une notion métrique et non pas topologique (voir plus loin).

Par exemple, les carrés $[0,1] \times [0,1]$ et $[3,4] \times [5,6]$, munis tous deux de la distance induite par la distance euclidienne du plan, sont isométriques. Ces carrés ne sont pas isométriques au rectangle $[10,20] \times [0,1]$; par contre, ils lui sont homéomorphes.

La situation est tout à fait analogue à l'algèbre linéaire, où deux espaces vectoriels sont dits *isomorphes* s'il existe une bijection linéaire entre les deux ; les propriétés des deux espaces vectoriels sont alors identiques ; en particulier, ils ont la même dimension.

Le fait que deux distances d et d' définies sur un ensemble X sont topologiquement équivalentes revient à dire que l'application identité, de (X,d) vers (X,d'), est un homéomorphisme. Toutes les notions topologiques définies à l'aide de d ou de d' seront les mêmes.

Exercice 18.—

1. Construire une isométrie du plan qui envoie le carré $[0,1] \times [0,1]$ sur le carré $[3,4] \times [5,6]$. En déduire que les espaces métriques $([0,1] \times [0,1], d_2)$ et $([3,4] \times [5,6], d_2)$ sont isométriques.

2. Construire un homéomorphisme entre $[0,1] \times [0,1]$ et $[10,20] \times [0,1]$. Démontrer qu'il n'existe pas d'isométrie entre ces deux sous-espaces métriques.

Topologie des surfaces Ce texte décrit la topologie en tant qu'ensemble de concepts fondamentaux pouvant servir d'outils dans toutes les mathématiques. Mais la topopologie elle-même est aussi une branche vivante de la recherche en mathématiques. Le travail du topologue consiste, en gros, à "décrire les espaces topologiques à homéomorphisme près". Dans ce paragraphe, nous allons expliquer un résultat profond de topologie dont la preuve date des années 1920.

Pour des aperçus plus récents, on peut regarder ces deux articles du site *Images des mathématiques* : Les tresses, de la topologie à la cryptographie et Géométriser l'espace, de Gauss à Perelman.

En réalité les topologues ne peuvent pas vraiment classifier tous les espaces topologiques, il y en a beaucoup trop ! Pour espérer démontrer quelque chose d'intéressant, il faut se restreindre à une famille raisonnable d'espaces. Examinons l'exemple des surfaces.

Qu'est-ce qu'une surface ? Intuitivement, c'est un espace qui, près de n'importe lequel de ses point, ressemble au plan. Précisons cette idée en disant qu'une *surface* est un espace métrique ayant la propriété suivante : pour tout point x, il existe un ouvert O qui contient x et qui est homéomorphe au plan $\mathbb{R}^2$. Voici maintenant l'énoncé du théorème de classification des surfaces :

Théorème. *Toute surface S compacte, connexe, orientable est homéomorphe à l'un des modèle suivants : la sphère, le tore, le tore à deux trous, ou plus généralement la "surface de genre g" qui est un tore à g trous (dessinées sur la page Wikipedia genre (mathématiques)).*

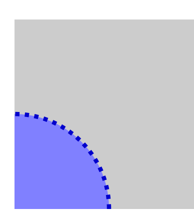
Il nous reste quelques termes à définir pour que l'énoncé soit parfaitement compréhensible. Une surface est dite *orientable* si elle ne contient pas de sous-espace homéomorphe au ruban de Möbius. La compacité et la connexité sont définis dans les chapitres correspondant un peu plus loin.

Une *variété topologique de dimension N* est un espace métrique ayant la propriété suivante : pour tout point x, il existe un ouvert O qui contient x et qui est homéomorphe à $\mathbb{R}^N$. Les surfaces sont donc des variétés de dimension deux. Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont des variétés de dimension un, et ils sont tous homéomorphes. La conjecture de géométrisation de Thurston, démontrée en 2003 par Gregory Perelman, concerne les variétés de dimension 3.

Exercice 19.— Donner un exemple de variété compacte, connexe de dimension un. (On peut en fait montrer que toutes les variétés compactes, connexes de dimension un sont homéomorphes).

(f) Sous-espaces métriques

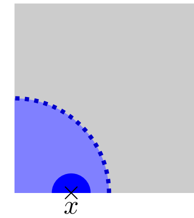
Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la distance habituelle notée d, on considère un carré C. Nous aimerions comprendre le sous-espace métrique (C,d). Pour ça, il suffit de suivre une seule consigne : *"oublier complètement" le reste du plan*.



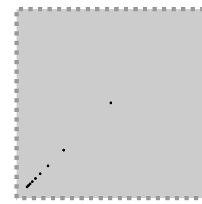
Le dessin ci-contre montre une boule (bleue) dans cet espace métrique (gris). Vous trouvez peut-être que cette boule a une allure un peu louche, mais elle représente bien tous les points du carré à distance strictement plus petite que R

du centre (si vous pensez que ce qu'on a dessiné n'est pas la boule toute entière, relisez la consigne !)

Cette boule est-elle un ouvert dans l'espace métrique (C, d) ? Bien sûr que oui : notre carré est un espace métrique comme les autres, tous les résultats du chapitre s'appliquent, et en particulier l'exercice 1 qui dit que toute boule ouverte est un ouvert. Pourtant elle contient des points du bord du carré, qui ne semblent pas être "entourés" par des points de la boule... Vérifions la définition : en un point x de la boule qui est sur le bord du carré, nous pouvons dessiner une petite boule (bleue foncé) de (C, d) centré en ce point et incluse dans la grande boule. Ces points satisfont donc la définition des ouverts de (C, d).



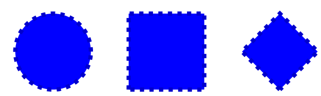
Considérons maintenant un carré ouvert, par exemple $C' =]0, 2[^2$. La suite $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est-elle convergente dans l'espace métrique (C', d) ?



Réponse p26

(g) Espaces produits, espaces de suites

Le plan $\mathbb{R}^2$ peut être vu comme le produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chacun des facteurs $\mathbb{R}$ étant muni de la distance usuelle (valeur absolue), nous avons défini trois distances produits d_1, d_2, d_∞ dans le paragraphe sur les espaces produits. On dispose ainsi des trois espaces métriques $(\mathbb{R}^2, d_1)$, $(\mathbb{R}^2, d_2)$, $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$. Nous avons vu que ces trois distances sont équivalentes, en particulier les notions d'ouverts, de suites convergente, *etc.* sont les mêmes. Ces trois distances se généralisent sans difficulté à $\mathbb{R}^N$, vu comme le produit de N copies de $\mathbb{R}$.



Une boule ouverte dans $\mathbb{R}^2$ pour chacune des trois distances produits d_1, d_2 et d_∞. Quel dessin va avec quelle distance ?...

Nous voudrions maintenant essayer de faire tendre N vers $+\infty$, c'est-à-dire de définir le **produit d'une infinité (dénombrable) de droites réelles**. Un x élément de $\mathbb{R}^N$ est caractérisé par ses N coordonnées $(x_1, \ldots, x_N)$. De même, les éléments de notre produit infini seront caractérisés par une infinité de coordonnées $(x_1, \ldots, x_N, \ldots)$: autrement dit, ce produit infini n'est rien d'autre que l'ensemble des suites de nombres réels. A cause de ce point de vue "produit infini", cet ensemble des suites réelles est souvent noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Il nous faut maintenant définir une distance sur cet ensemble. On peut généraliser à $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ les formules définissant d_1, d_2 et d_∞, mais certains éléments sont à une distance infinie les uns des autres. Prenons le cas de la distance d_∞. On définit

$$d_\infty((x_1, x_2, \ldots), (x_1', x_2', \ldots)) = \sup\{|x_1 - x_1'|, |x_2 - x_2'|, \ldots\}$$

mais on a par exemple

$$d_\infty((1, 2, 3, \ldots), (0, 0, 0, \ldots)) = \sup\{1, 2, 3, \ldots\} = +\infty.$$

Cette formule ne définit donc pas une distance sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour contourner ce problème, on élimine les éléments qui sont à distance infinie de l'élément $(0, 0, 0, \ldots)$. Autrement dit, on se restreint aux suites bornées. L'ensemble des suites réelles bornées est noté $\ell^\infty(\mathbb{R})$, et le couple $(\ell^\infty(\mathbb{R}), d_\infty)$ est bien un espace métrique.

La même démarche fonctionne avec d_1 : on pose

$$d_1((x_1, x_2, \ldots), (x_1', x_2', \ldots)) = |x_1 - x_1'| + |x_2 - x_2'| + \cdots$$

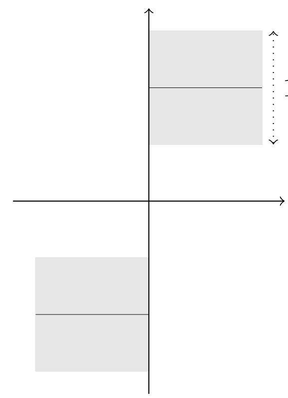
et on définit l'ensemble

$$\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{(x_1, x_2, \cdots), d_1((x_1, x_2, \ldots), (0, 0, \ldots)) < +\infty\}$$

qui est en fait l'ensemble des termes généraux des séries absolument convergentes. Le couple $(\ell^1(\mathbb{R}), d_1)$ est alors un espace métrique.

Comme le terme général d'une série convergente est une suite bornée, l'ensemble ℓ^1 est inclus dans l'ensemble ℓ^∞. Autrement dit, la distance d_∞ a aussi un sens sur $\ell^1(\mathbb{R})$, et on peut se demander si les distances d^1 et d^∞ sont équivalentes sur cet ensemble. Contrairement au cas des produits finis, la réponse est non, et c'est l'une des grosse difficulté des espaces de suites (ou de fonctions) : ils admettent de nombreuses distances différentes (et intéressantes), qui ne sont pas équivalentes ni même topologiquement équivalentes : une suite d'éléments peut converger lorsqu'on considère une certaine distance, et ne plus converger lorsqu'on en considère une autre. Nous verrons des exemples de ce phénomène plus loin, dans la section sur les espaces vectoriels normés de fonctions.

Exercice 20.—
1. Montrer que $(\ell^\infty(\mathbb{R}), d_\infty)$ est un espace métrique.
2. Montrer que $(\ell^1(\mathbb{R}), d_1)$ est un espace métrique.
3. Définir l'espace métrique $(\ell^2(\mathbb{R}), d_2)$.



Plaçons-nous maintenant dans l'espace plus gros $Y = \mathcal{B}([-1,1], \mathbb{R})$ des fonctions bornées (mais pas forcément continues) sur $[-1,1]$. Soit f_1 la fonction qui vaut -1 sur l'intervalle $[-1,0]$ et qui vaut 1 sur l'intervalle $]0,1]$. La boule $B(f_1, 1/2)$ est constituée des fonctions dont le graphe est entièrement inclus dans la zone grisée représentée ci-contre. Avoir son graphe dans la zone grisée oblige manifestement à un saut en 0 : toutes les fonctions f appartenant à cette boule ont une discontinuité en 0. Ainsi, cette boule ne contient aucune fonction continue.

Comment interprétez-vous ceci en terme d'intérieur ? Quel est le lien avec le théorème sur la limite uniforme d'une suite de fonctions continues ?

I.3 Exercices

Exercice 21.— Soient $x_1, ..., x_{10}$ dix points dans un espace métrique X. Montrer que

$$d(x_1, x_{10}) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_9, x_{10}).$$

Combien de fois avez-vous appliqué l'inégalité triangulaire ?

Exercice 22.— Soit (X, d) un espace métrique. On définit son diamètre

$$\operatorname{diam}(X, d) = \sup_{x, x' \in X} \{d(x, x')\}$$

qui est un élément de $[0, +\infty]$. On dit que (X, d) est borné si son diamètre est fini.

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. (X, d) est borné,
2. $\forall x_0 \in X \quad \exists M > 0 \quad \forall x \in X \quad d(x, x_0) < M$,
3. $\exists x_0 \in X \quad \exists M > 0 \quad \forall x \in X \quad d(x, x_0) < M$.

Exercice 23.— Montrer que les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont ouverts. Déterminer leur adhérence.

$$\{(x,y) \mid x > 0\}$$

$$\{(x,y) \mid x > 0 \text{ et } y < 0\}$$

$$\{(x,y) \mid x + 2y > 0 \text{ et } y^2 > x\}$$

Exercice 24.— Déterminer (sans preuve, mais en faisant des dessins) l'intérieur, l'adhérence, la frontière des parties suivantes du plan : (a) le disque unité fermé ; (b) la droite $\{y = 0\}$; (c) la réunion des deux précédents.

Exercice 25.— Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par les équations $x + y = 0$, $y + z = 0$ est fermé dans $\mathbb{R}^3$. Montrer plus généralement que tout ensemble dans $\mathbb{R}^n$ de solutions d'un système d'équations linéaires est fermé.

Exercice 26.— Trouver un ouvert O de $\mathbb{R}^2$, différent de $\mathbb{R}^2$, tel que $\mathrm{Inte}(\mathrm{Adhe}(O)) = \mathbb{R}^2$. Trouver d'autres ouverts qui ne sont pas l'intérieur de leur adhérence.

Exercice 27.—(utile) Montrer que les ouverts de (X, d) sont les réunions de boules ouvertes. *Aide. Il y a deux choses à montrer : (1) toute réunion de boules ouvertes est un ouvert, (2) tout ouvert est égal à une réunion de boule ouverte. Le premier découle immédiatement de deux propriétés du cours. Pour le second, étant donné un ouvert O, considérer l'ensemble O' défini comme la réunion de toutes les boules ouvertes incluses dans O, et montrer que $O' = O$.*

Exercice 28.— Que peut-on dire d'une partie O de $\mathbb{R}^2$ qui vérifierait “la définition des ouverts dans laquelle on intervertit les quantificateurs”, à savoir :

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall x \in O \quad B(x, \varepsilon) \subset O?$$

Exercice 29.— Montrer que si Y est une partie fermée bornée non vide de $\mathbb{R}$, alors il existe deux éléments a, b **dans** Y tels que $Y \subset [a, b]$.

Exercice 30.— Montrer que la frontière d'une partie E de X est l'intersection de l'adhérence de E et de l'adhérence du complémentaire de E. En déduire que la frontière d'un ensemble coïncide avec la frontière de son complémentaire.

Pour tout ensemble E, montrer que les trois ensembles

$$\mathrm{Inte}(E), \mathrm{Fr}(E), \mathrm{Inte}(X \setminus E)$$

forment une partition de X.

Montrer que l'adhérence est la réunion de l'intérieur et de la frontière.

Exercice 31.— (utile) Montrer la caractérisation suivante de l'adhérence : un point x est dans l'adhérence de E si et seulement si il existe une suite d'éléments de E convergent vers x. (En particulier, E est dense dans X si et seulement si tout élément de X est limite d'une suite d'éléments de E).

Exercice 32.— (utile) Montrer qu'une partie A de (X, d) est dense dans X si et seulement si A rencontre tout ouvert non vide de X.

Exercice 33.— (utile) Donner une caractérisation topologique (c'est-à-dire n'utilisant pas la distance mais seulement les ouverts) d'une suite convergente.

Exercice 34.— Enoncer et démontrer une caractérisation séquentielle des ouverts.

Exercice 35.— Le but de cet exercice est de "voir les suites convergentes comme des applications continues". On considère l'ensemble $\hat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ des entiers naturels auquel on a ajouté un élément noté $+\infty$. On muni cet ensemble d'une distance, par exemple de la façon suivante. Soit $\Phi : \hat{\mathbb{N}} \to [0, 1]$ l'application définie par

$$\begin{aligned} \Phi(n) &= \frac{1}{n+1} \text{ si } n \in \mathbb{N}, \\ \Phi(+\infty) &= 0. \end{aligned}$$

On pose alors, pour tout x, x' dans $\hat{\mathbb{N}}$,

$$\delta(x, x') := d_{\mathbb{R}}(\Phi(x), \Phi(x'))$$

où $d_{\mathbb{R}}$ désigne la distance usuelle sur $\mathbb{R}$, $d(s, t) = |s - t|$.

1. Montrer que cette formule définit une distance sur $\hat{\mathbb{N}}$.

2. Montrer que dans l'espace métrique $(\hat{\mathbb{N}}, \delta)$ la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Ceci explique bien sûr le choix du symbole $+\infty$ pour désigner le point ajouté à $\mathbb{N}$.

3. Soit X un espace métrique quelconque, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X, et ℓ un élément de X. On associe à ces données l'application $\xi : \hat{\mathbb{N}} \to X$ définie par

La lettre ξ se prononce "xi".

$$\begin{aligned} \xi(n) &= x_n \text{ si } n \in \mathbb{N}, \\ \xi(+\infty) &= \ell. \end{aligned}$$

Montrer que l'application ξ est continue de $(\hat{\mathbb{N}}, \delta)$ dans (X, d) si et seulement si la suite (x_n) tend vers ℓ.

4. Soit $f : X \to Y$ une application continue de X vers un autre espace métrique Y. Qu'obtient-on en appliquant le théorème de composition des applications continues à la composée de ξ et de f ?

Exercice 36.— En utilisant la continuité de l'application distance (exercice 11) et la caractérisation topologique de la continuité, donner un nouvel argument pour montrer que toute boule ouverte est un ouvert.

Exercice 37.— (utile)

1. Soient (X, d) un espace métrique, et F_1, F_2 deux fermés de X qui recouvrent X (c'est-à-dire que $F_1 \cup F_2 = X$). Montrer qu'une partie F de X est fermée si et seulement si $F \cap F_1$ et $F \cap F_2$ sont fermées.

2. Soient maintenant Y un autre espace métrique, et $f : X \to Y$ une application. On suppose que les restrictions $f_{|F_1} : F_1 \to Y$ et $f_{|F_2} : F_2 \to Y$ sont continues. Montrer que f est continue.

3. En déduire que, si γ, γ' sont deux chemins tels que $\gamma(1) = \gamma'(0)$, le chemin concaténé $\gamma \star \gamma'$, défini à la page 47, est bien continu.

Exercice 38.— Dans le sous-espace métrique $(]0, 1]^2, d_2)$, on considère la suite $((1/n, 1/n))_{n>0}$. Est-elle convergente ?

Exercice 39.— (utile) Soit X, d un espace métrique, et Y une partie de X.

1. Montrer que les ouverts du sous-espace métrique (Y, d) sont exactement les intersections de Y avec un ouvert de X.

2. En déduire que si Y est ouvert dans X, alors une partie de Y est ouverte dans Y si et seulement si elle est ouverte dans X.

3. Formuler et démontrer des propriétés analogues pour les fermés.

Exercice 40.— (utile) Montrer que les relations "être isométrique" et "être homéomorphes" sont des relations d'équivalence : autrement dit, par exemple pour la relation d'isométrie, pour tous espaces métriques X, Y, Z, on a

— X est isométrique à lui-même ;
— si X est isométrique à Y alors Y est isométrique à X ;
— si X est isométrique à Y et Y est isométrique à Z alors X est isométrique à Z.

Montrer que toute isométrie est un homéomorphisme.

Exercice 41.— (utile) Soit $X = X_1 \times X_2$ un espace métrique produit. On appelle *projections*, ou *applications coordonnées*, les application $p_1 : X \to X_1$ et $p_2 : X \to X_2$ définies par $p_1(x_1, x_2) = x_1$ et $p_2(x_1, x_2) = x_2$.

1. Montrer que p_1 est continue.

2. Montrer qu'elle est *ouverte*, ce qui signifie que l'image d'une partie ouverte de X est une partie ouverte de X_1.

3. On considère le cas particulier de $X = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Trouver un fermé de X dont l'image par p_1 n'est pas fermée.

Exercice 42.— (utile) Soient X, Y_1, Y_2 trois espaces métriques, et $f : X \to Y_1 \times Y_2$ une application. On veut montrer que f est continue si et seulement si $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ sont continues, où p_1, p_2 sont les deux applications coordonnées (voir l'exercice 41).

1. Montrer le sens facile.

2. Montrer que l'application $f : X \to Y_1 \times Y_2$ est continue si et seulement si l'image réciproque de tout pavé ouvert de $Y_1 \times Y_2$ est un ouvert de X.

3. Soit $U_1 \times U_2$ un pavé ouvert de $Y_1 \times Y_2$. Montrer l'égalité

$$f^{-1}(U_1 \times U_2) = (p_1 \circ f)^{-1}(U_1) \cap (p_2 \circ f)^{-1}(U_2).$$

Evidemment, l'exercice est très difficile si on n'est pas à l'aise avec le transport d'ensembles par une application : voir l'appendice Ensembles et applications, et surtout l'exercice 105.

On pourra commencer par remarquer que $(p_1 \circ f)^{-1}(U_1) = f^{-1}(p_1^{-1}(U_1))$; que vaut $p_1^{-1}(U_1)$? (Faire un dessin.)

4. Conclure.

Exercice 43.— Donner un exemple, dans $\mathbb{R}^2$, d'une famille de parties ouvertes dont l'intersection n'est pas ouvertes. Même question pour une union de parties fermés.

Exercice 44.—

1. Dans l'espace métrique $X = C([-1,1],\mathbb{R})$ muni de la distance d_∞, décrire la boule ayant pour centre la fonction nulle et pour rayon 1. Plus généralement, décrire la boule de rayon ε et de centre f_0 pour un élément f_0 quelconque de X (chercher une description utilisant le graphe de la fonction f_0).

2. Soit f_0 la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$. Déterminer explicitement un $\varepsilon > 0$ tel que la boule de rayon ε et de centre f_0 ne contient aucune fonction continue.

Exercice 45.— Dans l'espace métrique $X = C_b([0,1],\mathbb{R})$ on considère la partie

$$X_0 = \{f \in C_b([0,1],\mathbb{R}) \ \mid f(0) = 0\}.$$

1. Montrer que X_0 est une partie fermée.

2. Montrer que tout élément de X_0 est limite d'une suite d'éléments de son complémentaire.

3. En déduire qu'il est d'intérieur vide.

4. Montrer de même que l'ensemble $X_{\geq 0}$ des fonctions positives est fermé. (**) Déterminer son intérieur.

Exercice 46.— Soit X l'ensemble des parties mesurables du carré $[0,1]^2$, et m la mesure de Lebesgue. Pour deux éléments A, B de X on pose

$$d(A,B) = m(A\Delta B)$$

où $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ est la *différence symétrique* de A et B.

1. Représenter la différence symétrique sur un dessin.

2. Montrer l'égalité $A\Delta C = (A\Delta B)\Delta(B\Delta C)$. En déduire que d vérifie l'inégalité triangulaire.

3. Lequel des axiomes de distance n'est pas vérifié par d ?

(l'application d induit en réalité une distance sur l'ensemble des parties mesurables modulo ensembles de mesure nulle).

Espaces de matrices Soit n un entier positif. L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel de dimension n^2, il s'identifie à $\mathbb{R}^{n^2}$, ce qui en fait un espace métrique lorsqu'on munit $\mathbb{R}^{n^2}$ de l'une des métriques habituelles. Par exemple, l'application

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a,b,c,d)$$

identifie $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^4$, et la métrique d_1 s'écrit

$$d_1(M, M') = \max\{|a - a'|, |b - b'|, |c - c'|, |d - d'|\}.$$

Exercice 47.— On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices inversibles. On rappelle aussi que l'application déterminant det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est un polynôme en les coefficients de la matrice, par exemple $\det(M) = ad - bc$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; d'autre part une matrice est inversile si et seulement si son déterminant n'est pas nul.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit M_0 une matrice particulière. Rappeler pourquoi il n'existe qu'un nombre fini de valeur de $t \in \mathbb{R}$ qui annule l'expression $\det(M_0 + t\mathrm{Id})$. En déduire qu'on peut trouver une suite (t_n) de réels tendant vers 0 tels que, pour tout n, la matrice $M_0 + t_n\mathrm{Id}$ est inversible. Comment s'interprète ce résultat, en termes de propriété topologique de la partie $GL_n(\mathbb{R})$?

3. Une application. On veut montrer l'identité $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$ concernant la trace (somme des termes diagonaux) d'une matrice.

a. Il est assez facile de voir que la trace d'une matrice est invariante par conjugaison : autrement dit, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est tout $P \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Tr}(PMP^{-1}) = \mathrm{Tr}(M)$ (ceci vient par exemple du fait que le polynôme caractéristique d'une matrice est invariant par conjugaison ; mais admettons ce fait). En déduire que l'identité recherchée est vraie lorsque la matrice M est inversible.

b. Utiliser la question 2 pour en déduire que l'identité est encore vraie lorsque N n'est pas inversible.

Exercice 48.— **1.** Soit $SL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de déterminant 1. Montrer que c'est un ensemble fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Même question pour l'ensemble $SO_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales, c'est-à-dire telles que $MM^t = \mathrm{Id}$.

Exercice 49.— *(partiel 2013)* Soient (X, d) un espace métrique, et A, B deux parties de X. On suppose que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad d(a, b) < \varepsilon.$$

Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans B telles que la suite $(d(a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Beaucoup d'étudiants ont donné la réponse suivante :

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de A convergeant vers a, et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de B convergeant vers b : on a

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 \;\; d(a_n, a) < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_1 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_1 \;\; d(b_n, b) < \varepsilon.$$

On pose $N = \max\{n_0, n_1\}$. Pour tout $n \geq N$, on a

$$d(a_n, b_n) \leq d(a_n, a) + d(a, b) + d(b, b_n) \leq 3\varepsilon.$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq N \;\; d(a_n, b_n) < 3\varepsilon,$$

ce qui signifie que la suite $d(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Cette réponse a immédiatement l'air louche : si on peut vraiment prendre n'importe quelle suite (a_n) tendant vers a, pourquoi ne pas prendre la suite constante égale à a ? Et pareil pour la suite (b_n) ? Et finalement, si la première suite tend vers a et la seconde vers b, la seule possibilité pour que la distance entre a_n et b_n

tende vers 0 n'est-elle pas qu'on ait $a = b$? Mais comment pourrait-on conclure que $a = b$ si on sait seulement que $d(a, b) < \varepsilon$? ? Examinons maintenant dans le détail les arguments de cette réponse, en essayant de combler au mieux les lacunes de la rédaction. Dès la première ligne, on nous parle d'un point a et d'un point b sans préciser d'où ils viennent ; cependant, on se doute qu'il s'agit des points a et b fournis par l'hypothèse. Si on lit bien l'hypothèse, ces points dépendent de la donnée d'un nombre ε. Il faut donc probablement comprendre ceci :

Soit $\varepsilon > 0$***, et*** $a \in A$ ***et*** $b \in B$ ***deux points donnés par l'hypothèse, vérifiant*** $d(a, b) < \varepsilon$***.*** *Soient* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de points de* A *convergeant vers* a*, et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de points de* B *convergeant vers* b*...* Jusque là tout va bien : la réponse n'était pas correctement rédigée, mais on peut lui donner un sens en ajoutant la phrase en gras (à vrai dire, c'est même la seule façon de préciser ce qui est écrit). La suite s'interprète alors probablement ainsi :

En appliquant la définition de la limite pour les suites (a_n) *et* (b_n) *au nombre* ε*, on obtient deux nombres* n_0 *et* n_1 *tels que* $\forall n \geq n_0 \;\; d(a_n, a) < \varepsilon$ *et* $\forall n \geq n_0 \;\; d(b_n, b) < \varepsilon$*. On pose* $N = \max\{n_0, n_1\}$*. Pour tout* $n \geq N$*, on a*

$$d(a_n, b_n) \leq d(a_n, a) + d(a, b) + d(b, b_n) \leq 3\varepsilon.$$

Arrêtons-nous pour résumer la situation, en faisant bien attention à l'ordre dans lequel les différents objets mathématiques ont été introduits : **étant donné un** $\varepsilon > 0$**, nous avons construit deux suites** (a_n) **et** (b_n) **pour lesquelles il existe un nombre** N **tel que pour tout** $n \geq N$**,** $d(a_n, b_n) \leq 3\varepsilon$**.** C'est maintenant que les choses se gâtent. On voudrait conclure que la suite $(d(a_n, b_n))$ tend vers 0, mais pour cela il faudrait que nos deux suites aient été construites *avant* le choix du nombre ε. Dans la définition de la limite, on considère une suite ; étant donnée cette suite, à chaque fois qu'on choisit un $\varepsilon > 0$ on doit pouvoir trouver un rang N *etc.*. Ici la situation est inversée : on a d'abord choisi un nombre $\varepsilon > 0$, puis une suite. Pour pouvoir conclure, le nombre ε étant fixé depuis le début, il faudrait considérer un autre nombre quelconque $\varepsilon' > 0$ et trouver alors un N tel que *etc.*.

Mais après tout, peut-être est-ce de cette façon qu'il fallait comprendre la réponse ; puisque le premier ε n'y était pas explicité, peut-être fallait-il comprendre le second ε comme un autre nombre ε'. Essayons :

Soit $\varepsilon' > 0$*. En appliquant la définition de la limite pour les suites* (a_n) *et* (b_n) *au nombre* ε'*, on obtient deux nombres* n_0 *et* n_1 *tels que* $\forall n \geq n_0 \;\; d(a_n, a) < \varepsilon'$ *et* $\forall n \geq n_0 \;\; d(b_n, b) < \varepsilon'$*. On pose* $N = \max\{n_0, n_1\}$*. Pour tout* $n \geq N$*, on a*

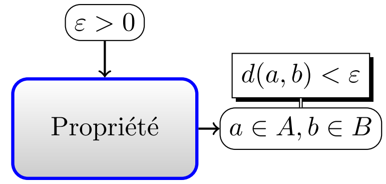
$$d(a_n, b_n) \leq d(a_n, a) + d(a, b) + d(b, b_n) \leq 2\varepsilon' + \varepsilon.$$

Ce n'est pas encore ce qu'on voudrait. On peut bien sûr éliminer le facteur 2 et obtenir l'inégalité $d(a_n, b_n) \leq \varepsilon' + \varepsilon$, mais on ne pourra jamais se débarrasser du ε : pour choisir a et b on a été obligé de fixer ce nombre ε, et on pourra jamais faire mieux que de montrer que la distance de a_n à b_n tend vers le nombre $d(a, b)$, qui est strictement plus petit que ε, mais dont rien ne permet de dire qu'il est nul.

Cette réponse est donc irrécupérable : même un lecteur plein de bonne volonté ne pourra pas y voir un raisonnement correct.

Le problème dans cet argument vient de la "dépendance cachée" entre les différents objets introduits : ici, les suites dépendant du choix antérieur d'un nombre ε. Ce problème est à l'origine de nombreuses erreurs. Comment faire pour les éviter ?

1. *Introduire explicitement tous les objets utilisés* (ici, les points a et b, et plus loin l'entier N, ne sont pas correctement introduits dans la solution proposée initialement par l'étudiant ; une introduction explicite est donnée par la phrase en caractères gras que nous avons ajoutée). Considérons une propriété énoncée avec des quantificateurs, comme celle-ci :



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad d(a,b) < \varepsilon$$

Le fait d'écrire cette propriété ***n'introduit aucun objet.***. Les variables de cette phrases sont muettes. Si on veut utiliser cette phrase pour introduire de nouveaux objets, il faut :

(a) dire à quel nombre ε on va l'appliquer : ça peut être un nombre ε introduit avant dans le raisonnement (comme $\varepsilon = 1/n$ dans la solution plus bas), et qui peut s'appeler "ε" ou avoir un autre nom ; ça peut aussi être un nombre ε quelconque, qui n'existait pas jusqu'ici dans le raisonnement et qu'on introduit pour l'occasion en écrivant "Soit $\varepsilon > 0$" ;

(b) dire comment on note les objets obtenus : on utilise parfois les mêmes notations, parfois non (comme a_n, b_n dans la solution plus bas).

2. Lorsque tous les objets ont été introduits explicitement, on peut alors faire attention à *l'ordre dans lequels les objets sont introduits* ; cet ordre entraîne une dépendance entre les objets. On peut même expliciter cette dépendance en écrivant par exemple
Soit $\varepsilon > 0$, et $a_\varepsilon \in A$ et $b_\varepsilon \in B$ deux points donnés par l'hypothèse... Et, plus loin, *Soient* $(a_{n,\varepsilon,a_\varepsilon})_{n\in\mathbb{N}}$....
Malheureusement, comme on le voit, les notations deviennent vite très lourdes. Ce qui explique pourquoi, en pratique, on n'explicite pas toutes les dépendances dans les notations. Il faut donc faire des bilans où l'ordre des choix apparait explicitement : dans la tentative de solution plus haut on a introduit, dans l'ordre, ε, a, b, les suites (a_n) et (b_n), puis l'entier N ; a priori chacun de ces objets dépend du choix des précédents.

Solution de l'exercice Soit $n > 0$ un entier, on applique l'hypothèse au nombre $\varepsilon = 1/n$. On obtient ainsi un élément a_n de A et un élément b_n de b tels que $d(a_n, b_n) < 1/n$. On a alors construit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans B telles que, pour tout n, $d(a_n, b_n) < 1/n$. On en déduit que la suite $(d(a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Ce principe consistant à construire une suite à partir d'une propriété en "$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists$..." est très souvent utilisé ; dans le cours, il a notamment servi dans la preuve de la caractérisation séquentielle des fermés.

I.4 Aides et Réponses

• *Définitions en symboles*

$$x \in \mathrm{Inte}(E) \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0 \quad B(x,\varepsilon) \subset E).$$

$$x \in \mathrm{Adhe}(E) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \quad B(x,\varepsilon) \cap E \neq \emptyset).$$

$$x \in \mathrm{Fr}(E) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \quad B(x,\varepsilon) \cap E \neq \emptyset \text{ et } B(x,\varepsilon) \cap (X \setminus E) \neq \emptyset).$$

• *Quelle est la démarche pour montrer que l'intérieur de E est un ouvert ?* D'après la définition d'un ouvert, on considère un point x de l'intérieur de E, et on cherche $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset \mathrm{Inte}(E)$.

• *Quelle est la démarche pour montrer que la composée des deux applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ est continue ?* On veut montrer que l'application est continue en tout point de X. Il s'agit donc de prendre un $x_0 \in X$ et un $\varepsilon > 0$, et de trouver un $\delta > 0$ vérifiant

$$\forall x \in X, \quad (d_X(x,x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(g(f(x)), g(f(x_0))) < \varepsilon).$$

• *Non ?* Si.

• *Qu'est-ce qui ne marche pas si on essaie de faire la même preuve pour une intersection infinie d'ouverts ?* On a une infinité de nombre $\varepsilon_i > 0$, on peut encore définir $\varepsilon = \inf(\varepsilon_i)$, mais ce nombre peut être nul.

• *En utilisant la caractérisation séquentielle des fermés, donner une autre formulation du théorème sur la continuité de la limite d'une suite de fonctions convergent uniformément.* Une formulation équivalente est : $C_b(X,Y)$ est une partie fermée de $\mathcal{B}(X,Y)$.

• *On veut montrer que f est continue ; on fixe un x_0, et aussi un $\varepsilon > 0$, que cherche-t-on alors ?* D'après la définition de la continuité, on cherche un $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $d_Y(f(x), f(x_0)) < \delta$.

• *Dans quel ordre a-t-on introduit les variables $\delta, \varepsilon, N, x, x_0$ de cette preuve ?* L'ordre est $x_0, \varepsilon, N, \delta, x$.

• *La suite $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})_{n \geq 1}$ est-elle convergente dans l'espace métrique $(]0,2[^2, d)$?* Non : il n'y a aucun point de $]0,2[^2$ qui satisfait la définition de limite (voir aussi le critère de convergence).

II Complétude

II.1 Théorie

(a) Définitions, résultats

Soit (X, d) un espace métrique. Une suite (x_n) d'éléments de X est une *suite de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall p \geq n_0 \ \ \forall q \geq n_0 \quad d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

L'exercice 57 propose une reformulation de cette définition.

L'espace métrique (X, d) est *complet* si toute suite de Cauchy d'élements de X est convergente.

Lemme. *Dans tout espace métrique (X, d),*
- *toute suite convergente est de Cauchy,*
- *toute suite de Cauchy est bornée.*

Une suite (x_n) est *bornée* s'il existe un point x tel que la suite réelle $d(x, x_n)$ est majorée (dans ce cas, c'est vrai pour tout point x).

Recette de preuve.— On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour le premier point, la remarque essentielle est que deux points qui sont dans une même boule de rayon $\varepsilon/2$ sont à distance l'un de l'autre plus petite que ε.

Pour le deuxième point, on suppose que la suite est de Cauchy. **Appliquer** la définition de suite de Cauchy avec $\varepsilon = 1$ (par exemple). **Ecrire** la propriété vérifée par le n_0 obtenu. On pose $x = x_{n_0}$, et M le maximum des nombres $d(x, x_0), \ldots, d(x, x_{n_0-1})$. **Majorer** alors $d(x, x_q)$, pour tout q (séparer les cas $q < n_0$ et $q \geq n_0$).

Théorème. $\mathbb{R}$ *muni de la distance usuelle est un espace métrique complet.*

La démonstration est reportée au chapitre suivant.

Proposition.
- *Soit Y une partie d'un espace métrique complet (X, d). Le sous-espace métrique (Y, d) est complet si et seulement si Y est une partie fermée de X.*
- *Un produit d'espaces métriques complets est complet pour les distances d_∞, d_1, d_2.*
- *Si (Y, d_Y) est complet, alors l'espace $(\mathcal{B}(X, Y), d_\infty)$ des applications bornées de X dans Y, muni de la distance de la convergence uniforme, est complet. Le sous-espace $(C_b(X, Y), d_\infty)$ des fonctions continues bornées de X dans Y est complet.*

Au premier chapitre nous avons vu trois façons de construire de nouveaux espaces métriques. Cette proposition étudie la complétude des espaces obtenus. Le premier point donne plein d'exemples d'espaces métriques complets, et plein d'exemples d'espaces métriques qui ne le sont pas (voir l'exercice 56) !

Recette de preuve.— On considère un fermé Y de X, on veut montrer que (Y, d) est complet. Comment démarre la preuve ? **Utiliser** la complétude de X, puis la fermeture de Y.

Réciproquement, on suppose que (Y, d) est complet, on veut montrer que Y est un fermé de X. Le critère séquentiel s'impose ; que doit-on alors montrer ? Comment démarre la preuve ? **Utiliser** le lemme plus haut, puis la complétude de Y pour **conclure**.

Montrons que le produit de deux espaces métriques complets est complet. On considère d'abord la distance d_∞. On part d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est de Cauchy dans l'ensemble produit $X_1 \times X_2$ muni de la distance d_∞. Notons que chaque terme x_n est un élément $(x_n(1), x_n(2))$ de $X_1 \times X_2$.

1. Pour un $i = 1$ ou 2, **montrer** que la suite $(x_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$, qui est une suite d'éléments de X_i, est de Cauchy dans (X_i, d_{X_i}). Qu'en déduit-on ?

2. On note $x(i)$ la limite de la suite $(x_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$; on définit ainsi un élément $x = (x(1), x(2))$ de $X_1 \times X_2$.
3. **Montrer** enfin que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x dans l'espace métrique $X_1 \times X_2$.

Pour voir que les distances d_1, d_2 donnent aussi des espaces complets, on utilise le lemme (facile) suivant.

Lemme. *Soient d, d' deux distances équivalentes sur un ensemble X. Alors (X, d) est complet si et seulement si (X, d') est complet.*

Démontrer le lemme.

La preuve du troisième point est très similaire à celle du second. On part d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est de Cauchy dans l'espace métrique $(\mathcal{B}(X,Y), d_\infty)$.

1. Pour un x fixé dans X, **montrer** que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, qui est une suite d'éléments de Y, est de Cauchy dans (Y, d). Qu'en déduit-on ?
2. On note $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$; on définit ainsi une application $f : X \to Y$. **Montrer** que cette application est bornée.
3. **Montrer** enfin que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f dans l'espace métrique $(\mathcal{B}(X,Y), d_\infty)$.

La preuve de la complétude d'un espace métrique donnée suit très souvent ce schéma général en trois étapes : étant donnée une suite de Cauchy, (1) on construit un candidat à être sa limite, (2) on montre que le candidat est dans le bon espace, (3) on montre que la suite converge effectivement vers le candidat. Par exemple, ce schéma permet de montrer la complétude des espaces de suites, comme $\ell_1(\mathbb{R})$.

Déduire enfin la complétude du sous-espace $C_b(X,Y)$ de celle de $\mathcal{B}(X,Y)$.

Corollaire. *Les distances d_1, d_2, d_∞ font de $\mathbb{R}^n$ un espace métrique complet.*

(b) Le théorème du point fixe contractant

Une application $T : X \to X$ est dite *contractante* s'il existe une constante $k < 1$ telle que, pour tout $x, y \in X$,

$$d(T(x), T(y)) \leq k d(x, y).$$

(Autrement dit, T est lipschitzienne et la constante k intervenant dans la définition de lipschitzienne est < 1). Un *point fixe* de f est un élément x de X tel que $f(x) = x$.

Une homothétie de $\mathbb{R}^N$ de rapport < 1 est un exemple typique d'application contractante. Le centre de l'homothétie est son unique point fixe.

Théorème (Banach 1920, Picard 1890))**.** *Soient (X, d) un espace métrique complet non vide, et $T : X \to X$ une application contractante. Alors l'application T admet un unique point fixe. De plus, toute suite d'élements de X définie par la donnée d'un x_0 quelconque dans X et la relation de récurrence*

$$x_{n+1} = T(x_n)$$

converge vers ce point fixe.

Ce théorème a d'innombrables applications, notamment en analyse (voir les commentaires).

Exercice 50.— La preuve qui suit utilise les formules sur les sommes de suites géométriques, plus précisément la majoration suivante. Soit $k \in]0, 1[$. En utilisant la formule $\sum_{i\geq 0} k^i = \frac{1}{1-k}$, donner une majoration de

$$k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+p}$$

par un terme ε_n, indépendant de p, et qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Recette de preuve.—

Le dernière phrase de l'énoncé donne la clé pour démontrer l'existence d'un point fixe. On choisit n'importe quel point x_0 dans X, et on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme dans l'énoncé, autrement dit

$$x_1 = T(x_0), \quad x_2 = T(x_1), \quad x_3 = T(x_2), \quad \ldots$$

On pose $C = d(x_0, x_1)$. Montrons que la suite (x_n) converge, en procédant en trois étapes :

1. **Donner** une majoration, pour tout entier n, de $d(x_n, x_{n+1})$, qui montre que cette quantité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Pour deux entiers n, p, **donner** une majoration de $d(x_n, x_{n+p})$ indépendante de p, avec un majorant qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
3. **En déduire** que la suite (x_n) converge dans X.

Montrer ensuite que la limite de cette suite est un point fixe de T.
Enfin, **montrer** que le point fixe de T est unique.

II.2 Commentaires

(a) Histoire

La méthode du point fixe contractant apparaît pour la première fois en 1890, dans un mémoire du mathématicien français Emile Picard. Sa méthode lui permet de montrer l'existence de solution pour des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles, par une série d'approximations successives. Emile Picard ne peut pas énoncer le théorème du point fixe contractant comme on le fait maintenant, puisque la notion d'espace métrique abstrait ne sera inventée par Maurice Fréchet que 16 ans plus tard. En 1920, Stefan Banach publie un article intitulé “Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales”. Les ensembles abstraits munis des opérations de Banach sont ce que nous appelons maintenant des *espaces vectoriels normés complets*, ou encore des espaces de Banach (voir le chapitre V qui leur est consacré). Banach reprend la méthode de Picard pour en faire un théorème abstrait, valable dans tout espace vectoriel normé complet.

Une présentation sympathique du théorème (en anglais...)

Le théorème du point fixe contractant est maintenant un outil très important, notamment en analyse : en particulier, il fournit une preuve courte du théorème de Cauchy-Lipschitz (existence et unicité de solutions locales pour les équations différentielles) ; mais il a aussi été appliqué avec succès dans bien d'autres contextes.

(b) Existence et unicité des solutions d'équations différentielles

Nous allons voir, sur un exemple simple, comment la méthode de Picard permet de montrer l'existence de solutions d'une équation différentielle. On cherche les fonctions satisfaisant les deux conditions

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1.$$

Bien sûr, le lecteur sait déjà que la fonction exponentielle fournit une solution ; ici le jeu consiste à prétendre qu'on ne connait pas cette fonction, pour comprendre comment on montre son existence.

Le principe est de réussir à transformer le problème en une recherche de point fixe pour une certaine application contractante. Voici une idée naturelle : on pourrait considérer l'application $f \mapsto f'$. Cependant cette idée ne fonctionne pas : on ne sait pas définir un espace métrique de fonctions, qui soit complet, et dans lequel cette application serait contractante. Pour remédier à ceci, on intègre l'équation $f' = f$ pour transformer le problème en une équation intégrale :

$$(f' = f \text{ et } f(0) = 1) \Leftrightarrow \forall x, f(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt.$$

Autrement dit, les solutions à notre problème sont les points fixes de l'application

$$T : f \mapsto \left(x \mapsto f(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt \right).$$

L'application T est un objet plutôt abstrait : elle transforme une fonction en une autre fonction, ce qui explique qu'à l'intérieur de la grande parenthèse on trouve la définition d'une fonction. On dit parfois *opérateur*.

Pour préciser les choses, on se place dans l'espace métrique des fonctions continues bornées sur un intervalle ouvert autour de 0, $X = C_b(]-\alpha, \alpha[, \mathbb{R})$ (la valeur de α sera précisée plus tard) ; on le munit de la distance uniforme d_∞. L'application T va de X dans X. Pour voir si elle est contractante, nous devons estimer

$$d_\infty(T(f), T(g)) = \sup_{x \in]-\alpha,\alpha[} d_{\mathbb{R}}(T(f)(x), T(g)(x)).$$

Or, pour $x \geq 0$,

$$d_{\mathbb{R}}(T(f)(x), T(g)(x)) = \left| \int_0^x f(t)dt - \int_0^x g(t)dt \right| \leq \int_0^x |f(t) - g(t)|\, dt \leq \alpha\, d_\infty(f, g).$$

Dans ces formules, $T(f)$ est un élément de X, c'est-à-dire une fonction de $]-\alpha, \alpha[$ dans $\mathbb{R}$; $T(f)(x)$ est un réel.

Pour $x \leq 0$ on obtient la même majoration. Finalement, en choisissant par exemple $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient $d_\infty(T(f), T(g)) \leq \frac{1}{2} d_\infty(f, g)$, et l'application T est contractante. Puisque l'espace métrique (X, d_∞) est complet, nous pouvons appliquer le théorème du point fixe contractant. La conclusion est que T possède un unique point fixe, autrement dit, notre problème de départ admet une unique solution : nous venons de démontrer qu'il existe une unique fonction f définie sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$ est vérifiant $f(0) = 1$ et $f' = f$. Mais le théorème ne se contente pas de fournir une existence théorique de la solution, il nous donne aussi un moyen de calculer des solutions approchées : il suffit de partir de n'importe quel élément f_0 de X et d'appliquer la transformation T de façon répétée. Choisissons pour f_0 la fonction nulle. Par intégration successive on obtient

C'est une limitation de la méthode de ne donner l'existence que sur un intervalle borné. En contrepartie, cette méthode marche pour une classe très générale d'équations différentielles, dont certaines n'ont pas de solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= 1 + \int_0^x 0dt = 1 \\
f_2(x) &= 1 + \int_0^x tdt = 1 + x \\
f_3(x) &= 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \\
f_4(x) &= 1 + \int_0^x (1 + t + \frac{1}{2}t^2)dt = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \\
f_5(x) &= \ldots
\end{aligned}$$

On reconnait le début du développement en série entière de la fonction exponentielle. Par récurrence, on démontre facilement que pour tout entier positif n,

$$f_n(x) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p!} x^p.$$

Le théorème nous indique que la suite f_n converge uniformément, sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$, vers l'unique fonction f vérifiant $f(0) = 1$ et $f' = f$.

En résumé, dans un cours d'analyse, il y a deux façons assez différentes de définir la fonction exponentielle : comme une fonction égale à sa dérivée, ou bien comme somme d'une série entière. La méthode du point fixe contractant permet de voir que ces deux définitions sont valides, et qu'elles coincident (au moins sur un intervalle ouvert autour de 0). D'autre part, la méthode se généralise à une vaste famille d'équations différentielles, toutes les équations dont le membre de gauche est f' et celui de droite une formule utilisant f et x, comme par exemple (au hasard)

$$f' = \sin(f), \quad f' = f^2 + x, \quad f' = \arctan(xf^2)\ln(x), \quad \dots$$

Une telle équation s'écrit en toute généralité

$$f' = \Phi(f, x)$$

où la fonction Φ est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et vérifie une condition appelée "condition de Lipschitz" (voir l'exercice ci-dessous). A vrai dire, la méthode marche aussi en dimension supérieure, ce qui veut dire qu'elle se généralise aux systèmes d'équations différentielles, comme, par exemple, les célèbres équations de Lotka-Volterra utilisées pour modéliser une interaction proies-prédateurs.

Exercice 51.— En reprenant la même démarche, trouver un intervalle $]-\alpha, \alpha[$ sur lequel l'équation différentielle

$$f' = \sin(f)$$

admet une unique solution f vérifiant $f(0) = 1$. Dans les calculs d'intégrale visant à montrer que T est contractant, on utilisera la majoration $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$, qui est valable pour tout nombres x, y, et qui est une conséquence de l'inégalité des accroissements finis.

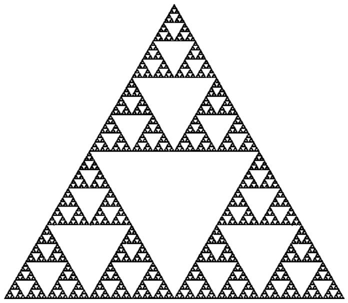
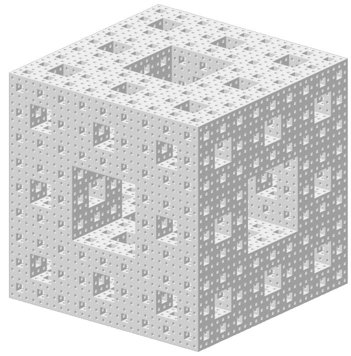
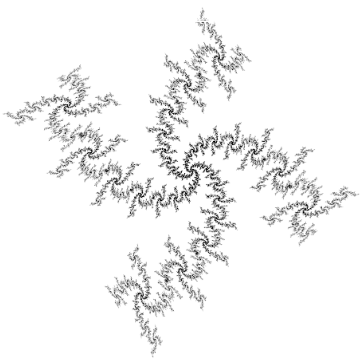
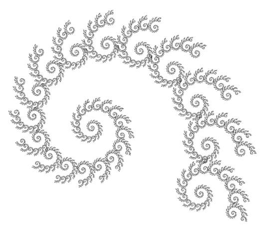
Exercice 52.—(Théorème de Cauchy-Lipschitz) Soit Φ une fonction définie sur un ouvert O de $\mathbb{R}^2$, et vérifiant la condition de Lipschitz : il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall (x, y) \in O, \forall (x, y') \in O, \quad |\Phi(x, y) - \Phi(x, y')| \leq C.\,|y - y'|$$

(on dit que Φ est "lipschitzienne en y"). Soit (x_0, y_0) un point de O. En généralisant la méthode ci-dessus, trouver un $\alpha > 0$ (dépendant de C) tel qu'il existe une unique fonction f, définie sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, vérifiant l'équation différentielle $f' = \Phi(f, x)$ et la condition $f(x_0) = y_0$ (appelée (*condition initiale*). Pour simplifier, on pourra supposer que $O = \mathbb{R}^2$.

(c) Construction d'ensemble fractals

Comment sont fabriqués les dessins "fractals" représentés ci-dessous ? En essayant de répondre à cette question, nous allons être amenés à définir une notion de convergence pour une suite de parties du plan ou de l'espace. Nous verrons que la clé de la construction mathématique de ces fractales, et de leur programmation sur un ordinateur, est une application particulièrement frappante du théorème du point fixe de Banach-Picard.


Pour comprendre ces ensembles, la première clé est de constater leur *auto-similarité* : chacun d'eux est constitué de petites copies de lui-même. Explicitons ceci, par exemple dans le cas du premier dessin, appelé triangle de Sierpinski. Il est constitué de trois petites copies parfaites de lui-même. Appelons A_1, A_2, A_3 les trois sommet du grand triangle, et T_1, T_2, T_3 les homothéties ayant ces points comme centres, et de rapport 1/2. Le triangle de Sierpinski vérifie l'égalité

$$\text{Sierpinski} = T_1(\text{Sierpinski}) \cup T_2(\text{Sierpinski}) \cup T_3(\text{Sierpinski}).$$

Le cube de Menger vérifie une égalité analogue avec 20 homothéties, et les spirales sont constituées respectivement de 5 et de 2 copies, savez-vous les trouver ?... Dans ces deux derniers cas, ces copies correspondent à des homothéties composées avec des translations et des rotations. La fougère de Barnsley, elle, nécessite trois transformations (l'une d'entre elle écrase toute la fougère sur la tige).

L'égalité précédente peut s'interpréter de la façon suivante. Définissons l'application $\mathcal{T}$, qui à un ensemble E associe l'ensemble $T_1(E) \cup T_2(E) \cup T_3(E)$. Le triangle de Sierpinski est un point fixe de cette application. Ceci nous oriente sur la piste du théorème de Banach-Picard...

L'application $\mathcal{T}$ prend une partie du plan et la transforme en une autre.

On trouve sur internet des programmes permettant de dessiner des ensembles fractales. Le principe est le suivant. Il y a deux écrans. Sur celui de gauche, on tracer le dessin de n'importe quel ensemble. Sur celui de droite on peut actionner une transformation analogue à notre $\mathcal{T}$, pour faire apparaitre plusieurs petite copies de l'objet dessiné à gauche. La transformation $\mathcal{T}$ peut être *itérée*, c'est-à-dire appliquée plusieurs fois successivement, entrainant l'affichage des ensembles

Le lecteur est fortement encouragé à jouer avec l'applet java du site http ://gingerbooth.com/ coursewareCBC/detifs.html.

$$E, \quad \mathcal{T}(E), \quad \mathcal{T}(\mathcal{T}(E)), \quad \mathcal{T}(\mathcal{T}(\mathcal{T}(E))), \ldots$$

où E est le dessin initial. Miracle : on constate visuellement que *la suite de dessins "converge" vers le dessin d'un objet fractal* ! Le menu permet de jouer avec plusieurs jeux de transformations, pour obtenir notamment des variantes des quatre dessins plans ci-dessus.

Essayons donc de définir mathématiquement nos ensembles fractals en suivant cette piste. Notre transformation $\mathcal{T}$ est définie sur l'ensemble des parties du plan, un "gros" ensemble sur lequel nous ne connaissons pas encore de distance. Notre premier travail est donc de définir une notion de distance entre deux ensembles du plan. Cette distance donnera naissance à un espace métrique complet sur lequel nous pourrons tenter d'appliquer le théorème du point fixe contractant : ceci démontrera l'existence (et l'unicité !) d'un ensemble "Sierpinski" satisfaisant l'égalité ci-dessus.

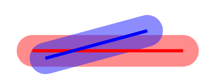
Distance de hausdorff La distance de Hausdorff prend le point de vue suivant : deux ensembles seront déclarés proches si tout point de l'un des deux est proche d'au moins un point de l'autre. Précisons cette idée. Etant donné une partie E du plan et un ensemble r, on définit le *r-voisinage de E*,

$$V(E,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists y \in E, d(x,y) < r\}.$$

Exercice 53.— Montrer que $V(E,r)$ est la réunion de toutes les boules de rayon r centrées en un point de E.

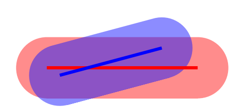
Par exemple, le r-voisinage d'un segment a une forme de stade. Les eaux territoriales françaises sont définie juridiquement comme le 22224 mètres-voisinage des côtes (sauf au niveau du Pas de Calais ; notons au passage que la définition juridique adoptée d'un "d'un partage médian du littoral pour les États voisins dont les côtes sont distantes de moins de 24 milles" est loin d'être sans ambiguité...). La distance de Hausdorff entre deux parties E_1, E_2 est alors définie par la formule :

$$d_{\text{Hausdorff}}(E_1,E_2) = \inf\{r > 0 \mid E_1 \subset V(E_2,r) \text{ et } E_2 \subset V(E_1,r)\}.$$



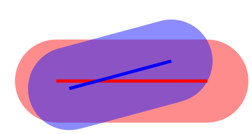
$r = 0.1$

De façon plus visuelle, on peut imaginer faire grandir r en partant de 0, et dessiner pour chaque valeur de r le r-voisinage de chacun des deux ensembles ; la distance de Hausdorff est alors le premier moment ou chacun des deux r-voisinages contient la totalité de l'autre ensemble. Les dessins ci-contre illustrent ce procédé dans le cas de deux segments.



$r = 0.2$

Cette formule définit-elle une distance sur l'ensemble des parties du plan ? Pas tout à fait. Il faut d'abord exclure les ensembles non bornés, pour être sûr d'obtenir une valeur finie. Ensuite, il y a le problème des ensembles à distance nulle, illustré par l'exercice suivant.



$\boxed{r = 0.27}$

Exercice 54.— Montrer que pour tout ensemble E,

$$d_{\text{Hausdorff}}(E, \text{Adhe}(E)) = 0.$$

Donner un exemple de deux ensembles à distance nuls.

On peut néanmoins éviter tous les problèmes en se restreignant aux parties fermées et bornées du plan.

Théorème. *L'application $d_{\text{Hausdorff}}$ est une distance sur l'ensemble $X = \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ des parties fermées bornées non vides du plan.*

Un second théorème est crucial pour l'utilisation du théorème de Banach-Picard.

Théorème. *L'espace métrique $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^2), d_H)$ est complet.*

L'exercice 61 propose de démontrer ce dernier théorème.

Retour aux fractales Donnons-nous des transformations en nombre fini, notons-les $T_1, \dots, T_N$. Dans le cas du triangle de Sierpinski il s'agissait d'homothéties, mais seule la contraction des distances est importante.

Une *transformation* est une application d'un espace dans lui-même.

Exercice 55.—

1. Soit $\mathcal{T}$ définie par

$$\mathcal{T}(E) = T_1(E) \cup \cdots \cup T_N(E).$$

Montrer que l'image par $\mathcal{T}$ d'un ensemble fermé borné non vide est encore un ensemble fermé borné non vide.

2. On suppose que nos N transformations sont contractantes. Montrer que la transformation $\mathcal{T} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ est alors contractante pour la distance de Hausdorff.

Toutes les hypothèses du théorème de Banach-Picard sont maintenant vérifiées. L'application de ce théorème produit immédiatement l'énoncé suivant.

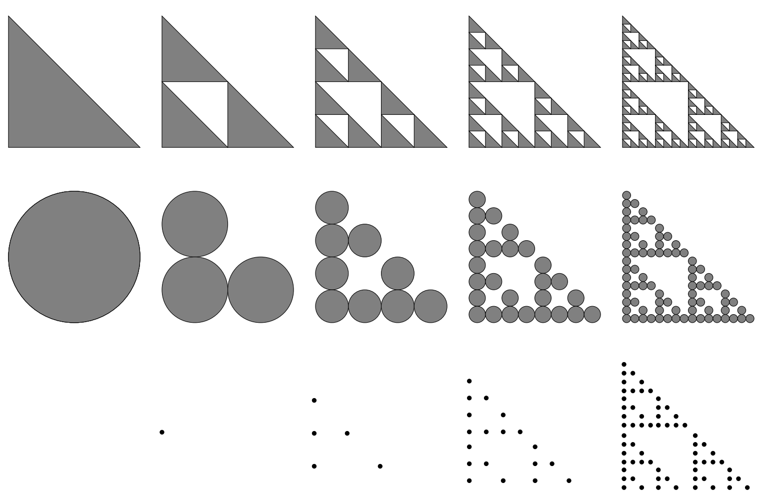
Théorème. *Soient $T_1, ..., T_N$ des applications contractantes du plan dans lui-même. Soit $\mathcal{T} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ l'application*

$$E \longmapsto T_1(E) \cup \cdots \cup T_N(E).$$

Alors il existe un unique ensemble E_∞ tel que $\mathcal{T}(E_\infty) = E_\infty$. De plus, quel que soit le fermé borné E_0, la suite d'ensembles

$$E_0, \quad \mathcal{T}(E_0), \quad \mathcal{T}(\mathcal{T}(E_0)), \quad \mathcal{T}(\mathcal{T}(\mathcal{T}(E_0))), \quad \dots$$

obtenus en itérant la transformation $\mathcal{T}$ converge vers E_∞ dans l'espace métrique $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^2), d_{\text{Hausdorff}})$.



Trois choix possibles pour l'ensemble E_0, trois suites d'ensembles qui convergent vers le même ensemble fractal...

II.3 Exercices

Exercice 56.— Montrer que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas complet. On donnera trois arguments différents (1) à l'aide de la proposition sur les sous-espaces métriques, (2) à l'aide de la propriété disant qu'une suite convergente est de Cauchy, (3) en utilisant juste la définition d'une suite de Cauchy.

Exercice 57.— Soit (x_n) une suite vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{1}{n+1}.$$

Montrer qu'elle est de Cauchy. Plus généralement, montrer qu'une suite (x_n) est de Cauchy si et seulement si il existe une suite (ε_n) de nombres réels positifs, qui tend vers 0, et telle que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, d(x_n, x_{n+p}) \leq \varepsilon_n.$$

Exercice 58.— Soit (x_n) une suite de Cauchy dans un espace métrique X, (y_n) une autre suite dans X, on suppose que la suite réelle $(d(x_n, y_n)$ tend vers 0. Montrer que la suite (y_n) est aussi une suite de Cauchy.

Exercice 59.— Soit Φ un homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et l'intervalle $]0,1[$; on peut par exemple prendre

$$\Phi(t) = \frac{1}{\pi} \arctan(t) + \frac{1}{2}.$$

Soit d la distance définie sur $\mathbb{R}$ en "transportant la distance de $]0,1[$ par Φ^{-1}", c'est-à-dire définie par

$$d(x, y) = |\Phi(x) - \Phi(y)|.$$

1. Rappeler pourquoi $]0,1[$, muni de la distance usuelle, n'est pas complet. En déduire que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.

2. La distance d est-elle équivalente à la distance usuelle ? Est-elle topologiquement équivalente à la distance usuelle ?

Exercice 60.—(La distance de Hausdorff est une distance !) Soit (X, d) un espace métrique. On considère l'ensemble $\mathcal{F}(X)$ des parties fermées bornées non vides de X. On le munit de la distance de Hausdorff définie par la formule

$$d_{\text{Hausdorff}}(E_1, E_2) = \inf\{r > 0 \mid E_1 \subset V(E_2, r) \text{ et } E_2 \subset V(E_1, r)\}$$

où

$$V(E, r) = \{x \in X \mid \exists y \in E, d(x, y) < r\}$$

est le r-voisinage de E (voir la section(c) des commentaires). On voudrait montrer que les axiomes de distances sont bien vérifiés. La symétrie est évidente...

1. Soient E_1, E_2 des fermés bornés non vides tels que $d_{\text{Hausdorff}}(E_1, E_2) = 0$. Supposons qu'il existe un point x de E_1 qui n'est pas dans E_2. Construire une suite de points de E_2 qui converge vers x. Qu'en déduit-on ? Montrer que la distance de Hausdorff vérifie l'axiome de séparation.

2. On voudrait maintenant démontrer l'inégalité triangulaire. On considère trois ensemble fermés bornés non vides E_1, E_2, E_3. On note $d_{12} = d_{\text{Hausdorff}}(E_1, E_2)$, $d_{23} = d_{\text{Hausdorff}}(E_2, E_3)$, on se donne un $\varepsilon > 0$.

Soit x un point de E_1. Trouver un point z de E_3 tel que $d(x,z) < d_{12} + d_{23} + 2\varepsilon$. Qu'a-t-on montré, en termes de r-voisinages où $r = d_{12} + d_{23} + 2\varepsilon$? En déduire que $d_{\text{Hausdorff}}(E_1, E_3) \leq r$. Conclure.

Exercice 61.— (complétude de la distance de Hausdorff) Soit (X, d) un espace métrique complet. On considère l'ensemble $\mathcal{F}(X)$ des parties fermées bornées non vides de X. On le munit de la distance de Hausdorff (voir l'exercice précédent et les commentaires). On admet que cette formule définit une distance sur $\mathcal{F}(x)$. Le but de cet exercice est de montrer que l'espace métrique $(\mathcal{F}(X), d_{\text{Hausdorff}})$ est complet. A cette fin, on considère une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties fermées bornées non vides de X, et on suppose que c'est une suite de Cauchy pour la distance de Hausdorff. On pose

$$E_\infty = \limsup(E_n) := \{x \in X \mid \forall \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0\ B(x,\varepsilon) \cap E_n \neq \emptyset\}.$$

L'exercice consiste à montrer que la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers E_∞ dans l'espace métrique $(\mathcal{F}(X), d_{\text{Hausdorff}})$.

1. Ecrire E_∞ à partir de E_n et des symboles d'intersection, d'union et d'adhérence (on pourra s'inspirer de l'exercice 68). En déduire que E_∞ est fermé.

2. En utilisant l'hypothèse que $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, avec $\varepsilon = 1$, montrer que E_∞ est borné.

3. On se donne un $\varepsilon > 0$ (on pourra supposer dans un premier temps, pour simplifier, que $\varepsilon = 1$; ceci ne change rien aux raisonnements qui suivent). Pour tout entier k, il suit de la définition d'une suite de Cauchy qu'il existe un entier que nous noterons n_k et qui vérifie :

$$\forall n \geq n_k\ d_{\text{Hausdorff}}(E_{n_k}, E_n) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Le but de cette partie est de montrer que $d_{\text{Hausdorff}}(E_{n_0}, E_\infty) \leq 2\varepsilon$. Pour cela, nous allons voir que chacun des deux ensembles E_{n_0}, E_∞ est inclus dans le 2ε-voisinage de l'autre.

a. Montrer que $E_\infty \subset V(E_{n_0}, 2\varepsilon)$.

b. Soit x_0 un élément quelconque de E_{n_0}. Construire par récurrence une suite (x_k) vérifiant, pour tout k,

— $x_k \in E_{n_k}$,

— $d(x_k, x_{k+1}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

c. Montrer que la suite (x_k) est de Cauchy dans (X, d).

d. On note x_∞ sa limite. Montrer que x_∞ appartient à E_∞. En particulier, nous venons de montrer que cet ensemble n'est pas vide, c'est bien un élément de $\mathcal{F}(X)$.

e. Majorer la distance de x_0 à x_∞. En déduire que $E_{n_0} \subset V(E_\infty, 2\varepsilon)$ et conclure que $d_{\text{Hausdorff}}(E_{n_0}, E_\infty) \leq 2\varepsilon$.

f. Qu'a-t-on montré pour E_∞ et la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en terme de distance de Hausdorff ? Montrer enfin, en utilisant une propriété élémentaire du cours, que la suite converge vers E_∞.

III Compacité

III.1 Théorie

(a) Suites extraites, valeurs d'adhérence

Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace métrique X. On appelle *suite extraite* ou *sous-suite* de la suite (x_n) une suite

$$(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots) \text{ avec } n_1 < n_2 < n_3 < \ldots .$$

Extraire une suite consiste donc à "oublier" certains termes de la suite ; cette nouvelle suite est aussi notée $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Exercice 62.—(double extraction) Montrer qu'une suite extraite d'une suite extraite de (x_n) est encore une suite extraite de (x_n).

Un élément ℓ est appelé *valeur d'adhérence* de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers ℓ.

Exercice 63.—

1. Soit (x_n) une suite convergente, ℓ sa limite. Montrer que toute suite extraite de (x_n) converge également vers ℓ. Autrement dit une suite convergente a une unique valeur d'adhérence, qui est sa limite.

2. Donner un exemple de suite réelle ayant deux valeurs d'adhérence. Représenter cette suite sur un dessin.

3. Donner un exemple de suite réelle ayant une seule valeur d'adhérence, mais admettant une sous-suite qui tend vers $+\infty$. Faire un dessin. Cette suite est-elle convergente ?

Exercice 64.— Soit (x_n) une suite d'éléments de X, et ℓ un élément. Supposons qu'il existe des termes de la suite, de rangs arbitrairement grands, et arbitrairement proches de ℓ :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall N > 0 \ \exists n \geq N, \quad d(x_n, \ell) < \varepsilon.$$

Montrer qu'il existe une suite extraite de (x_n) convergent vers ℓ.

(b) Compacité

Un espace métrique (X, d) est *compact* si toute suite d'éléments de X admet une valeur d'adhérence ; autrement dit, si de toute suite on peut extraire une sous-suite convergente. Une partie A d'un espace métrique est dite compacte si le sous-espace métrique (A, d) est compact.

Proposition. *Toute partie compacte de (X, d) est fermée. Si de plus (X, d) est compact, alors toute partie fermée est compacte.*

Recette de preuve.— Si A n'est pas fermé dans X il existe une suite d'éléments de A qui converge vers un point de $X \setminus A$. Cette suite n'a pas de valeur d'adhérence dans (A, d).

Réciproquement, soit A une partie fermée de l'espace compact (X, d). **Prendre** une suite dans A, **extraire** dans X, conclure.

Proposition. *Le produit d'un nombre fini d'espaces métriques compacts est compact.*

Recette de preuve.— On fait la preuve dans le cas d'un produit $X_1 \times X_2$ de deux espaces compacts. Rappelons-nous que la convergence d'une suite dans cet espace équivaut à la convergence des deux "suites coordonnées". Etant donnée une suite, **extraire une première** fois en utilisant la compacité de X_1, puis **extraire une seconde** fois en utilisant celle de X_2.

Proposition. *("L'image continue d'un compact est compacte") Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces métriques. Si X est compact, alors $f(X)$ est compact.*

Noter que l'ensemble $f(X)$, image de X par f, est un sous-espace métrique de Y.

Recette de preuve.— A partir d'une suite dans $f(X)$, **produire** une suite dans X, **utiliser** la compacité de X, puis la continuité de f pour **conclure**.

Corollaire. *Si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont deux espaces métriques homéomorphes, le premier est compact si et seulement si le second est compact.*

Cet énoncé dit que la compacité est une propriété topologique.

Recette de preuve.— Appliquer la proposition précédente aux applications f et f^{-1}.

Corollaire. *Si $f : X \to Y$ est une bijection continue entre deux espaces métriques, et si (X, d_X) est compact, alors sa réciproque f^{-1} est continue, et f est un homéomorphisme.*

Recette de preuve.— Utiliser le critère de continuité concernant les parties fermées, et deux des propositions ci-dessus.

Proposition. *Tout espace métrique compact est complet.*

Recette de preuve.— **Démontrer** d'abord que dans tout espace métrique, toute suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence est convergente. **En déduire** la preuve.

(c) Compacité dans $\mathbb{R}^N$

Théorème (Bolzano-Weierstrass)**.** *Tout intervalle $[a, b]$ est compact. Autrement dit, toute suite bornée de $\mathbb{R}$ a une valeur d'adhérence.*

Démonstration. Remarquons d'abord qu'il suffit de montrer que $[0, 1]$ est compact, puisque tout intervalle $[a, b]$ est homéomorphe à $[0, 1]$ (utiliser l'application affine $x \mapsto (b - a)x + a$).

La preuve de la compacité dépend de la construction adoptée pour $\mathbb{R}$. Dans tous les cas, on se donne une suite (x_n) dans l'intervalle $[0, 1]$, dont il nous faut extraire une sous-suite convergente.

Preuve basée sur l'axiome de la borne supérieure Cet axiome spécifie que toute partie bornée dans $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, et a pour conséquence le théorème selon lequel toute suite monotone bornée est convergente. Puisque notre suite est bornée, on peut considérer les quantités

$$\begin{array}{rcl} y_0 & = & \sup\{x_0, x_1, x_2, \ldots\} \\ y_1 & = & \sup\{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \\ y_2 & = & \sup\{x_2, x_3, x_4, \ldots\} \\ & \ldots & \end{array}$$

On obtient ainsi une suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante. Puisqu'elle est minorée par 0, elle converge : notons L sa limite. Il reste à voir que L est une valeur d'adhérence de la suite (x_n) (en fait, il s'agit de la plus grande des valeurs d'adhérence, aussi appelée *limite supérieure* de la suite). on va utiliser le critère de l'exercice 64.

Soit $\varepsilon > 0$, il s'agit de trouver un terme de la suite, d'indice arbitrairement grand, dans l'intervalle $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$. On y trouve d'abord un y_k (avec k arbitrairement grand), en utilisant la définition de L comme limite de la suite (y_k)), puis un x_n (avec $n \geq k$), en utilisant la définition de y_k comme borne supérieure de $\{x_k, x_{k+1}, \ldots\}$.

Preuve basée sur l'écriture décimale On utilise que tout nombre $x \in [0,1]$ admet une écriture décimale $x = 0,\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\cdots$ (y compris $1 = 0,999...$) ; et réciproquement, que toute écriture décimale de ce type définit un nombre dans $[0,1]$.

On considère la première décimale de chacun des termes x_n. Cela nous donne une suite dans l'ensemble fini $\{0,1,\ldots,9\}$. D'après le principe des tiroirs, l'un des chiffres de 0 à 9 apparaît une infinité de fois, notons-le α_1 ; autrement dit il existe une suite (x_n^1), extraite de (x_n), dont les termes ont tous α_1 pour première décimale. De même, on peut extraire de la suite (x_n^1) une suite (x_n^2) de termes ayant tous un même chiffre α_2 pour deuxième décimale (remarquons que leur première décimale est bien sûr α_1). Par récurrence, on construit une infinité d'extractions $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n^3)_{n\in\mathbb{N}}, ...$ de la suite initiale, chacune extraite de la suite précédente, les x_n^i ayant pour $i$ème décimale un certain chiffre α_i.

Considérons alors le nombre

$$y = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots.$$

Nous allons vérifier que y est une valeur d'adhérence de la suite initiale ; plus précisément, montrons que la suite extraite $(x_i^i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers y. Fixons un entier i. Puisque chaque suite est extraite de la précédente, le terme x_i^i apparaît dans chacune des suites $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$. Ses i premières décimales sont donc $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i$. On en déduit

$$\left|y - x_i^i\right| \leq 10^{-i}$$

ce qui prouve que la suite $(x_i^i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers y, comme voulu. □

Tout intervalle borné $[a,b]$ est compact, et donc complet. On en déduit la propriété fondamentale suivante.

Corollaire. *L'espace $\mathbb{R}$ est complet.*

Recette de preuve.— **Utiliser** que toute suite de Cauchy est bornée, et la complétude de tout intervalle $[a, b]$.

Proposition. *Les sous-espaces compacts de $\mathbb{R}^N$ sont les parties fermées et bornées.*

On ne spécifie pas la distance, ce qui signifie qu'il s'agit de l'une des distances usuelles d_1, d_2, d_∞. Comme elles sont topologiquement équivalentes, elles déterminent la même notion de compacité pour les parties de $\mathbb{R}^N$.

Recette de preuve.—Il y a deux implications à montrer. Pour la première, on a déjà vu que tout sous-espace compact est une partie fermée. Montrer que c'est aussi une partie bornée, en montrant que toute partie non bornée contient une suite qui n'a aucune sous-suite convergente.

Pour la réciproque : 1) En utilisant des propriétés démontrées précédemment, **montrer** d'abord que tout "cube" $[a, b]^N$ est compact. 2) Etant donné une partie fermée et bornée E de $\mathbb{R}^N$, **trouver** un cube qui la contient. **En déduire** que E est compacte en utilisant à nouveau l'une des propriétés démontrées plus haut.

Proposition. *Soit (X, d) un espace compact et $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes : il existe a, b dans X tels que, pour tout x dans X,*

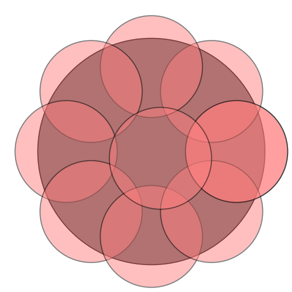
$$f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Recette de preuve.— Commencer par le cas particulier où X est un sous-espace métrique de $\mathbb{R}$, et f est l'identité : autrement dit, **montrer** que toute partie compacte A de $\mathbb{R}$ contient deux éléments a, b tels que $A \subset [a, b]$. Pour ce cas, prendre pour a et b les bornes inférieures et supérieures de A, **montrer** qu'elles sont chacune dans l'adhérence de A, et conclure. **En déduire** le cas général en appliquant ceci à $A = f(X)$. Lesquelles des propriétés précédentes a-t-on utilisé dans la preuve ?

(d) Compacité et recouvrements

Une famille de parties d'un ensemble X dont la réunion est égale à X est appelée *recouvrement* de X.

Lemme. *Soit (X, d) un espace métrique compact. Pour tout $\alpha > 0$ on peut recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon α.*



Un recouvrement du disque unité par 9 disques de rayon 0.45

Recette de preuve.— On raisonne par contraposée. Si la conclusion n'est pas vérifiée, on peut construire par récurrence une suite de points dont tous les termes sont à distance $\geq \alpha$ les uns des autres. Cette suite ne peut pas avoir de valeur d'adhérence.

Théorème. *Un espace métrique (X, d) est compact si et seulement si*

— *il est complet,*

— (précompacité) *pour tout $\alpha > 0$ on peut recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon α.*

Recette de preuve.— 1) Tout espace métrique compact est complet : **partir** de la définition de la complétude, **utiliser** la définition de la compacité, et l'une des propriétés élémentaires des suites de Cauchy. Ceci termine la preuve de l'implication directe, puisqu'on a obtenu la seconde propriété au paragraphe sur les recouvrements.

2) Réciproque. Dans un espace précompact (c'est-à-dire vérifiant la deuxième propriété du théorème), pour toute suite et tout $\varepsilon > 0$, **montrer** qu'on peut extraire une sous-suite dont tous les termes sont à distance $< \varepsilon$ les uns des autres (utiliser le principe des tiroirs). Soit maintenant (x_n) une suite dans X. En appliquant récursivement la propriété précédente, **construire** des suites $(x_n^1), (x_n^2), \dots, (x_n^k), \dots$ dont chacune est extraite de la précédente, la suite (x_n^k) ayant tous ses termes à distance $< 1/k$ les uns des autres. On définit une suite (y_k) extraite de (x_n) en posant $y_k = x_k^k$ (procédé diagonal). **Vérifier** que la suite (y_n) est de Cauchy : on a donc montré que dans un espace précompact, de toute suite on peut extraire une suite de Cauchy. Puisqu'on a supposé X complet, elle converge. **Conclure**.

Lemme (Lebesgue)**.** *Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ une famille d'ouverts qui recouvrent un espace métrique compact (X, d). Alors il existe $\alpha > 0$ tel que toute boule de rayon α est incluse dans l'un des ouverts U_i (on dit que α est un nombre de Lebesgue du recouvrement).*

Recette de preuve.— Sinon il existe une suite de boules (B_n) dont les rayons tendent vers 0, chaque boule n'étant incluse dans aucun des ouverts U_i. La suite des centres admet une valeur d'adhérence, qui est incluse dans l'un des U_i (**pourquoi ?**). En utilisant l'ouverture de U_i, **en déduire** que B_n est incluse dans U_i pour i assez grand, contradiction.

Théorème (Borel-Lebesgue)**.** *("De tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini") Un espace métrique (X, d) est compact si et seulement si, pour toute famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts qui recouvre X, il existe une sous-famille finie $U_{i_1}, \dots, U_{i_N}$ qui recouvre encore X.*

Recette de preuve.— Soit (X, d) un espace métrique compact. Le lemme de Lebesgue fournit un réel $\alpha > 0$. Le premier lemme nous dit que X est recouvert par un nombre fini de boules de rayon α. **Conclure** l'implication directe en appliquant la conclusion du lemme de Lebesgue à ces boules.

Réciproquement, supposons que (X, d) ne soit pas compact : il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sans valeur d'adhérence. En écrivant qu'un point x de X n'est pas valeur d'adhérence, **obtenir** une boule $B(x, \varepsilon(x))$ qui ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite. La famille de toutes les boules $\{B(x, \varepsilon(x))\}_{x \in X}$ recouvre X, mais on ne peut pas en extraire un recouvrement fini (**pourquoi ?...**).

Exercice 65.— Déduire du théorème de Borel-Lebesgue une caractérisation duale, par les fermés, des espaces métriques compacts. (Aide : à quelle condition, portant sur les complémentaires des U_i, la famille $(U_i)_{i \in I}$ recouvre-t-elle X ?)

Proposition III.1. *Toute intersection décroissante de compacts non vides est non vide.*

Ce critère permet par exemple de voir que l'ensemble de Cantor n'est pas vide. En effet, il est construit comme l'intersection d'une suite décroissante $C_0, C_1, C_2, \ldots$ où C_i est la réunion de 2^i intervalles fermés (ici représenté les uns au dessous des autres, image extraite de Wikipedia).

Recette de preuve.— Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties compactes d'un espace métrique X. On suppose que cette suite est décroissante, c'est-à-dire que K_n contient K_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. On raisonne par contraposition : on suppose que l'intersection de tous les K_n est vide, et on veut montrer que l'un des K_n est vide. Sous cette hypothèse, **montrer** que les complémentaires $K_0 \setminus K_n$ forment un recouvrement de K_0 par des ouverts. **Extraire** un sous-recouvrement fini, et **conclure**.

(e) Continuité uniforme

Une application $f : X \to Y$ est *uniformément continue* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $x_1, x_2 \in X$,

$$d(x_1, x_2) < \alpha \Rightarrow d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

Autrement dit, f est uniformément continue si elle est continue et si, dans la définition de la continuité en un point x, on peut choisir le même α pour tous les x.

Si f est k-lipschitzienne, alors elle est uniformément continue : en effet pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$ vérifie la définition.

Théorème (Heine)**.** *Toute application continue définie sur un espace métrique compact est uniformément continue.*

Voir les commentaires pour la comparaison entre continuité et continuité uniforme.

Recette de preuve.—Etant donné un $\varepsilon > 0$, la continuité de f donne en chaque point x un réel $\alpha(x) > 0$; **écrire** la propriété vérifiée par $\alpha(x)$. La famille de boules $B(x, \alpha(x)/2)$ recouvre X. **Extraire** un sous-recouvrement fini

$$B\left(x_1, \frac{\alpha(x_1)}{2}\right), \ldots, B\left(x_2, \frac{\alpha(x_N)}{2}\right),$$

ce qui permet de définir un nombre α comme le minimum des nombres $\alpha(x_i)/2$. Il reste à **vérifier** que ce nombre α convient. Pour ceci, commencer par montrer que lorsqu'on a deux points de X à distance plus petite que α, on peut trouver un indice i tel que la boule $B(x_i, \alpha(x_i))$ contient nos deux points. Utiliser ensuite le centre de cette boule pour obtenir la continuité uniforme (avec un "2ε" à la place du "ε").

Exercice 66.— Ecrire une preuve un peu plus simple en utilisant le lemme de Lebesgue.

III.2 Commentaires

Certains espaces métriques X, comme la droite réelle, sont "trop gros" : il contiennent des suites sans valeurs d'adhérence (toute suite qui tend vers $+\infty$, par exemple), ou ils admettent des fonctions continues $X \to \mathbb{R}$ qui ne sont pas bornées. La compacité est une façon d'empêcher ces deux phénomènes ; on peut donc la voir comme une propriété de petitesse. La propriété disant qu'un compact peut être recouvert par un nombre fini de boules arbitrairement petites va aussi dans ce sens. Attention, cette interprétation peut aussi être trompeuse : $[0, 1]$ est compact alors que $]0, 1]$ ne l'est pas, pourtant le second semble plus "petit" que le premier...

La notion de compacité est très intéressante, d'un part parce qu'il y a beaucoup d'espaces compacts (voir la partie “construction d'espaces compacts”), d'autre part parce que ces espaces ont des propriétés très fortes (voir la partie “applications”).

Il s'agit d'une notion intrinsèque : Si A est une partie d'un espace métrique (X, d), la définition de la compacité de (A, d) ne fait pas référence à l'espace ambiant X (autrement dit, quand on réfléchit à la compacité de A il faut “oublier” le reste de X). Par exemple, $]0, 1]$ n'est pas compact, parce que la suite $(1/n)$ n'a pas de valeur d'adhérence dans cet espace (bien qu'elle en ait évidemment dans $\mathbb{R}$).

Le théorème d'Arzéla-Ascoli permet d'obtenir des résultats d'existence de solutions d'équations différentielles, dans des cas qui échappent au théorème du point fixe contractant (théorème de Cauchy-Peano).

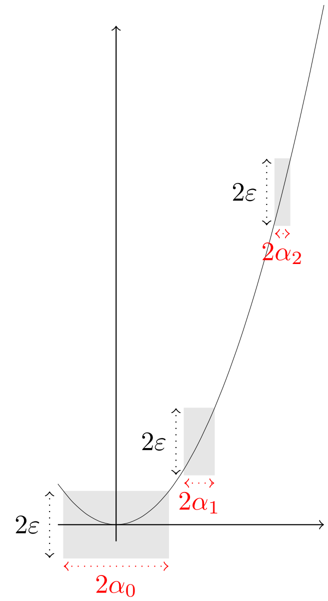
(a) Continuité et continuité uniforme

Deux exemples vont nous aider à comprendre les différences entre la continuité, la continuité uniforme, et le caractère lipschitzien.

Considérons d'abord la fonction réelle $x \mapsto x^2$. Cette fonction est continue : pour un $\varepsilon > 0$ fixé, pour chaque point x, on peut trouver un α vérifiant la définition de la continuité :

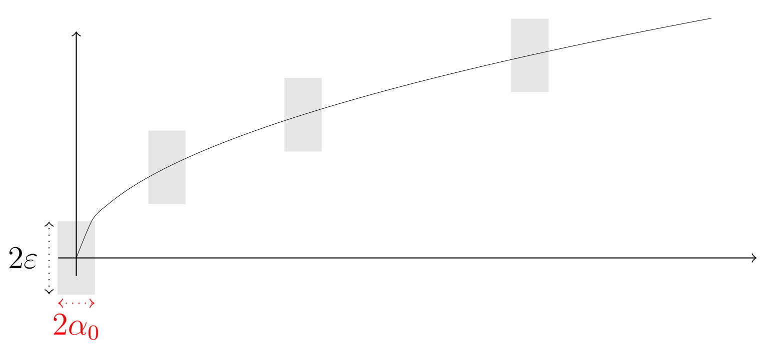
$$\forall x', d(x, x') < \alpha \Rightarrow d(x^2, x'^2) < \varepsilon.$$

Le dessin ci-contre montre les meilleures valeurs possibles pour α en trois points différents, pour la même valeur de ε (meilleures au sens que ce sont les plus grands α possibles). On voit que plus x est grand plus on doit choisir α petit ; ceci est lié au fait que la pente augmente : en un certain sens, la fonction est “moins continue” en un point x très grand, puisqu'à une petite variation de x correspond une grande variation de x^2. On peut même estimer la valeur de α : en un point x la pente de la courbe est donnée par la dérivée qui vaut $2x$, or cette pente est à peu près égale au rapport $\frac{\varepsilon}{\alpha}$, d'où la meilleure valeur possible $\alpha \simeq \frac{\varepsilon}{x}$, et cette valeur tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini. Il est donc impossible de trouver un $\alpha > 0$ qui convienne pour tous les x : on voit que notre fonction n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.



Si on part de $x = 0$ et qu'on l'augmente de $\delta x = 0,1$, la fonction x^2 augmente de $0,01$; si on part de $x = 1$ et qu'on l'augmente à nouveau de $\delta x = 0,1$, la fonction x^2 augmente (environ) de $0,2$; si on fait la même chose en partant de $x = 10$, de combien augmente x^2 ? Et en partant de $x = 100$? de $x = 1000$?

Considérons maintenant la fonction racine carrée. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$. Cette fois-ci la pente décroît, et pour un $\varepsilon > 0$ donné, le α_0 correspondant à la continuité en 0 marche en tous les points de $\mathbb{R}^+$: cette fonction est uniformément continue.



Sur cette figure, tous les rectangles ont la même taille ; pour un ε fixé, le même α marche en tout point du graphe.

Par contre, cette fonction n'est pas lipschitzienne, parce que la pente du graphe au point $(0,0)$ est $+\infty$. Montrons précisément ceci, en raisonnant par l'absurde : on suppose qu'il existe une constante $k > 0$ telle que, pour tous $x, x' \geq 0$,

$$d(\sqrt{x} - \sqrt{x'}) \leq kd(x, x').$$

Cette inégalité doit en particulier être vérifiée pour $x' = 0$ et pour tout $x \geq 0$, ce qui nous donne $\sqrt{x} \leq kx$. En divisant par x on obtient que pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \leq k$$

ce qui est manifestement absurde puisque le membre de gauche tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 67.— Démontrer précisément que $x \mapsto x^2$ ne vérifie pas la définition de la continuité uniforme sur $\mathbb{R}$. *Aide : on peut prendre $\varepsilon = 1$, raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe un α qui marche, et trouver une contradiction en prenant $x' = x + \alpha/2$ et en faisant tendre x vers $+\infty$.*

III.3 Exercices

Exercice 68.—

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égal à l'ensemble

$$A := \bigcap_{N\geq 0} \mathrm{Adhe}(\{x_N, x_{N+1}, \ldots\}).$$

Aide : partir de la définition des valeurs d'adhérence, intervertir deux quantificateurs pour faire apparaître la définition de l'adhérence de l'ensemble $\{x_N, x_{N+1}, \ldots\}$. En déduire que cet ensemble est fermé.

2. Déterminer l'adhérence de l'ensemble $\{\frac{1}{n}, n > 0\}$ des inverses des entiers strictement positifs.

3. Tester la formule de la première question sur la suite $(1/n)_{n>0}$. *Aide : il s'agit de décortiquer la formule ; déterminer d'abord ce que vaut* $\mathrm{Adhe}(\{x_0, x_1, \ldots\})$, *puis* $\mathrm{Adhe}(\{x_1, x_2, \ldots\})$, *et en général* $\mathrm{Adhe}(\{x_N, x_{N+1}, \ldots\})$ *; déterminer ensuite l'intersection de ces ensembles.*

Exercice 69.— Montrer que toute suite de Cauchy ayant au moins une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence.

Exercice 70.— Montrer qu'un espace métrique compact est borné. *Aide : dans un espace X supposé non borné, construire d'abord une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle $d(x_0, x_n)$ tend vers $+\infty$. Montrer qu'on ne peut pas en extraire une sous-suite convergente.* Donner un exemple d'espace métrique borné qui n'est pas compact.

Exercice 71.— Nous avons vu que si $f : X \to Y$ est une bijection continue et si X est compact, alors f^{-1} est continue. Montrer, par un contre-exemple, que l'énoncé devient faux si on enlève l'hypothèse de compacité sur X. *Aide : considérer la fonction* $\theta \mapsto e^{i\theta}$*, définie sur* $]0, 2\pi]$.

Exercice 72.— Dans un espace métrique compact, montrer que toute suite ayant une unique valeur d'adhérence est convergente.

Exercice 73.— Donner un exemple de recouvrement de $[0, 1]$ par des boules de rayon $1/n$.

Exercice 74.— Donner un exemple de recouvrement de $[0, 1]$ par deux intervalles ouverts. Pour votre recouvrement, donner un $\alpha > 0$ qui vérifie la conclusion du lemme de Lebesgue. Donner un exemple de recouvrement de $\mathbb{R}$ par des ouverts, qui ne vérifie pas la conclusion du lemme de Lebesgue.

Exercice 75.— Dessiner un recouvrement du carré $[0, 1]^2$ par deux boules. Déterminer géométriquement un nombre $\alpha > 0$ qui satisfait la conclusion du lemme de Lebesgue pour votre recouvrement (quels sont les points du carré qui sont les plus contraignants concernant la valeur de α ?...).

Exercice 76.—(partiel 2012) Soit X un espace métrique compact, et A une partie de X. On suppose que A est *localement finie* : pour tout point x de X, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B(x, \varepsilon)$ ne contient qu'un nombre fini de points de A.

1. Montrer que A ne contient qu'un nombre fini de points.

2. (*) Montrer que le résultat ne tient plus si, dans la définition de "localement fini", on remplace "pour tout point x de X" par "pour tout point x de A".

Exercice 77.— Trouver l'erreur dans la réponse suivante à la première question de l'exercice précédent. *Par hypothèse, pour tout x de X, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $B(x, \varepsilon) \cap A$ ne contient qu'un nombre fini de points. Par compacité, on peut recouvrir X par un nombre fini de boules $B(x_1, \varepsilon), \ldots, B(x_k, \varepsilon)$. On a*

$$A \subset A \cap B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup A \cap B(x_k, \varepsilon)$$

et puisque A est une réunion finie d'ensembles finis, il ne contient qu'un nombre fini de points.

Exercice 78.— Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction localement bornée : tout point est inclus dans une boule sur laquelle la fonction est bornée. Montrer que si X est compact, alors f est bornée sur X.

Exercice 79.— Montrer que l'ensemble des fonctions continues et affines par morceaux est dense dans $(C([0, 1], \mathbb{R}), d_\infty)$. *Aide : utiliser la continuité uniforme.*

Exercice 80.— On se place dans $C_b([0,1],\mathbb{R})$. Deux variantes au choix :

1) Soit n un entier, dessiner une fonction continue $f_n : [0,1] \to [0,1]$, qui s'annule en dehors de l'intervalle

$$\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$$

et qui prend la valeur 1 au milieu de cet intervalle. Que vaut $d_\infty(f_n, f_m)$ pour $n \neq m$? En déduire que la suite (f_n) n'a pas de valeur d'adhérence.

2) Pour tout n, soit $f_n : x \mapsto x^n$. Pour n fixé, que vaut $d_\infty(f_n, f_m)$ lorsque m est très grand ? Formaliser. En déduire que cette suite n'a pas de valeur d'adhérence.

Exercice 81.— On se place dans un espace métrique. Soit (u_n) une suite convergent vers u. Montrer que la partie $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{u\}$ est compacte.

Exercice 82.— Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$; ceci revient à dire que pour toute suite (x_n) dans $\mathbb{R}^N$,

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, 0) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (f(x_n)) = +\infty.$$

1. Donner des exemples d'applications vérifiant cette hypothèse, et d'applications qui ne la vérifient pas.

2. Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.

3. En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|P(x)| \geq |P(x_0)|$.

Exercice 83.— Soit ABC un triangle dans le plan. Montrer qu'il existe un point M du plan tel que la somme des distances de M à A, B et C est minimale.

Exercice 84.— Etant donnés deux polynômes $P(X), Q(X)$ à coefficients réels, on définit $d(P,Q)$ comme le maximum des valeurs absolues des coefficients du polynôme $P(X) - Q(X)$. Il est facile de voir que ceci définit une distance sur l'ensemble $\mathbb{R}[X]$.

1. Calculer, pour tout entiers positifs p, q, la distance de 0 au polynôme X^p, puis la distance entre les deux polynômes X^p et X^q.

2. En déduire que la suite $(X^p)_{p\geq 0}$ d'élements de $\mathbb{R}[X]$ est bornée mais n'admet pas de sous-suite convergente.

3. Montrer que, dans cet espace métrique, la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 n'est pas compacte.

Exercice 85.— (Une autre preuve du lemme de Lebesgue) On se place sous les hypothèses du lemme de Lebesgue. Pour chaque $x \in X$, on pose

$$R(x) = \sup\{r > 0, \exists i \in I, B(x,r) \subset U_i\}.$$

Montrer que cette formule définit une fonction de X dans $]0,+\infty[$, et que cette fonction est continue (elle est même 1-lipschiptzienne). En déduire une nouvelle preuve du lemme.

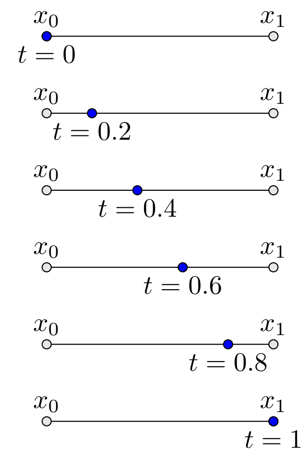
IV Connexité

IV.1 Théorie

(a) Connexité par arcs

Soit (X, d) un espace métrique. Un *chemin* dans X *joignant* un point x_0 à un point x_1, est une application continue $\gamma : [0, 1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$. Un espace métrique (X, d) est *connexe par arcs* si pour tout couple de points x_0, x_1 de X, il existe un chemin joignant x_0 à x_1. Une partie A de (X, d) est dite connexe par arcs si le sous-espace métrique (A, d) l'est.

On dit aussi *courbe*, ou *arc*.



Par exemple, dans $\mathbb{R}^N$, l'application

$$\gamma : t \mapsto (1 - t)x_0 + tx_1$$

est un chemin joignant le point x_0 au point x_1.

Proposition.

1. *L'espace métrique $\mathbb{R}^N$ est connexe par arcs.*
2. *Toute partie convexe de $\mathbb{R}^N$ est connexe par arcs.*
3. *Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Recette de preuve.— La formule donnée avant l'énoncé pour un chemin joignant deux points quelconque montre que $\mathbb{R}^N$ est connexe par arcs. Le même chemin peut être utilisé pour voir que les parties convexes de $\mathbb{R}^N$ sont connexes par arcs, et en particulier que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes par arcs.

Montrer le dernier point en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires et la caractérisation suivante des intervalles : une partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tout triplets $a < b < c$ tels que a et c sont dans A, le point b est aussi dans A.

Concaténation Soient γ, γ' deux chemins dans X, et supposons que $\gamma'(0) = \gamma(1)$. On peut alors définir le *chemin concaténé* $\gamma \star \gamma'$, qui joint le point $\gamma(0)$ au point $\gamma'(1)$, de la façon suivante :

Concaténer signifie “mettre bout à bout”.

$$\gamma \star \gamma' : t \longmapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma'(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Exercice 86.— Vérifier que le chemin concaténé est bien continu (on pourra donner une preuve directe ou utiliser l'exercice 37).

Proposition IV.1.

— *L'image d'un espace métrique connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.*

— *La réunion de parties connexes par arcs ayant un point commun est connexe par arcs.*

— *Un produit fini d'espaces connexes par arcs est connexe par arcs.*

Recette de preuve.— Si γ est un chemin dans X, et $f : X \to Y$ une application continue, alors $f \circ \gamma$ est un chemin dans Y. **En déduire** le premier point. Si A_1, A_2 sont deux parties connexes par arcs ayant un point P en commun, on peut concaténer un chemin de x_1 à P dans A_1 avec un chemin de P à x_2 dans A_2 pour obtenir un chemin de x_1 à x_2 dans $A_1 \cup A_2$. **En déduire** le deuxième point. Soit enfin $X = X_1 \times X_2$ un produit d'espaces connexes par arcs, et $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ deux de ses points. Utiliser un chemin joignant x_1 à y_1 dans X_1 et un chemin joignant x_2 à y_2 dans X_2 pour **fabriquer** un chemin joignant x à y. **En déduire** par récurrence le cas d'un produit d'un nombre fini d'espace connexes par arcs.

Corollaire IV.2 (invariance topologique)**.** *Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques homéomorphes. Alors X_1 est connexe par arcs si et seulement si X_2 est connexe par arcs.*

Pas de preuve, parce que c'est une conséquence immédiate de la proposition.

(b) Composantes connexes par arcs *(optionnel)*

Dans un espace métrique (X, d), on considère la relation définie par $x \sim y$ s'il existe un chemin de x à y. On a, pour tous x, y, z,

1. (réflexivité) $x \sim x$;
2. (symétrie) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$;
3. (transitivité) $x \sim y$ et $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Etant donné un point x, l'ensemble des points y tels que $x \sim y$ est appelé *composante connexe par arcs* de x. On déduit des trois propriétés ci-dessus que les composantes connexes par arcs forment une *partition* de X, ce qui signifie qu'elle sont deux à deux disjointes et le recouvrent. Par exemple, on peut montrer que les composantes connexes par arcs d'un ouvert de $\mathbb{R}$ sont des intervalles ouverts. On en déduit que tout ouvert est réunion disjointe d'un nombre dénombrable d'intervalles ouverts. (Attention, il n'y a pas de propriété analogue pour les fermés).

Exercice 87.— Démontrer les trois propriétés ci-dessus. En déduire que les composantes connexes par arcs forment une partition de X.

(c) Connexité

Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est *connexe* si $\emptyset$ et X sont les seules parties de X qui soient à la fois ouvertes et fermées. Lorsque X n'est pas connexe, il existe donc une partie A, qui n'est ni l'ensemble vide ni X, et qui est à la fois ouverte et fermée ; le complémentaire de A est également une partie non vide qui est à la fois ouverte et fermée. On en déduit :

Proposition. *L'espace métrique X n'est pas connexe si et seulement si il existe une partition $X = O \sqcup O'$ en deux parties ouvertes non vides.*

La notation $O \sqcup O'$ est utilisée pour la réunion lorsque les deux ensembles sont disjoints. Noter que ceci est également une partition en deux fermés (pourquoi ?).

Exercice 88.— (utile) Une application $f : X \to Y$ est dite *localement constante* si :

$$\forall x_0 \in X \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in B(x_0, \varepsilon) \ f(x) = f(x_0).$$

1. Montrer que toute application continue à valeur dans l'espace à deux éléments $Y = \{0, 1\}$ est localement constante.

2. Montrer que, si X est connexe, alors toute application localement constante est constante.

3. Réciproquement, montrer que si toute application continue de X dans $Y = \{0, 1\}$ est constante, alors X est connexe. Enoncer la caractérisation obtenue.

Proposition. *Un espace métrique X est connexe si et seulement si toute fonction continue $f : X \to \{0, 1\}$ est constante.*

Corollaire. *L'intervalle $[0, 1]$ est connexe.*

Recette de preuve.— On considère donc une application continue $f : [0, 1] \to \{0, 1\}$, il s'agit de montrer que f est constante. Quel est le théorème qui permet de conclure ?

Corollaire. *Un espace métrique connexe par arcs est connexe.*

Recette de preuve.— On raisonne par contraposition. Soit X un espace métrique qui n'est pas connexe : il existe une partition $X = O \sqcup O'$ en deux parties ouvertes non vides. Supposons qu'il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \to X$ joignant un point de O à un point de O'. **Fabriquer** alors une partition de $[0, 1]$ en deux ouverts non vides. **Conclure**.

Lorsqu'on "tire en arrière" une partition, on obtient encore une partition (attention, ça ne marche pas si on "pousse en avant"). Voir l'appendice I.

Proposition. *La proposition IV.1 et le corollaire IV.2 sont encore valables en remplaçant partout "connexe par arcs" par "connexe". De plus, l'adhérence d'une partie connexe est connexe.*

On en déduit que l'image d'un espace métrique connexe par une application continue à valeur dans $\mathbb{R}$ est un intervalle.

Recette de preuve.—

• Image d'un connexe par une application continue. Soit $f : X \to Y$. **Montrer** que si A, B forment une partition de Y, alors $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ forment une partition de X. **Conclure** en utilisant un raisonnement par contraposée.

• Réunion de connexes ayant un point commun. Cette fois-ci, on utilise la caractérisation donnée par l'exercice 88. Soit $X = X_1 \cup X_2$ un espace qui est réunion de deux parties connexes dont l'intersection contient un point x. Soit $f : X \to \{0, 1\}$ une application localement constante. **Montrer** que f est constante. **Conclure**.

• Produit de connexes. Soient X_1, X_2 deux espaces métriques connexes, et $X = X_1 \times X_2$ muni de l'une des distances produit. On veut montrer que X est connexe. On considère une partition $X = O \sqcup O'$ de X en deux ouverts. Que cherche-t-on alors à obtenir ?

Soit (x_1, x_2) un point de X. On considère la "tranche horizontale" $X_1 \times \{x_2\}$ et la "tranche verticale" $\{x_1\} \times X_2$ (**faire** un dessin dans le cas du carré $X = [0, 1] \times [0, 1]$). **Montrer** que la tranche horizontale est ou bien entièrement contenue dans O, ou bien entièrement contenue dans O'. Traitons le cas où elle est contenue dans O (l'autre cas est bien sûr analogue). **Montrer** que dans ce cas, la tranche verticale est aussi contenue dans O. **En déduire** que toutes les tranches verticales $\{x'_1\} \times X_2$ (pour tout x'_1 dans X_1) sont aussi contenues dans O. **Conclure**.

Si vous bloquez, relisez les hypothèses.

• L'invariance topologique se déduit du premier point.

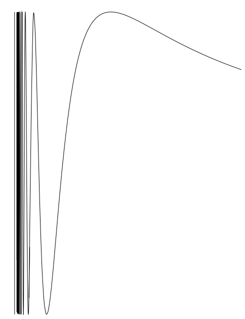
• Adhérence d'un connexe. On peut utiliser à nouveau, par exemple, le critère de l'exercice 88. Soit A une partie connexe d'un espace métrique X. Avec quel objet et quelle hypothèse démarre-t-on la preuve, quel est le but ? Soit $f : \mathrm{Adhe}(A) \to \{0,1\}$ une application. **Montrer** que si f est localement constante, alors elle est constante sur A. **Montrer** que si f est constante sur A, alors elle est constante sur $\mathrm{Adhe}(A)$. **Conclure**.

Exercice 89.— Redémontrer le premier point à l'aide du critère de l'exercice 88. Redémontrer le dernier point sans ce critère.

Exercice 90.— Montrer que les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (*Aide : utiliser la caractérisation des intervalles vue plus haut*). Avec le corollaire ci-dessus, on en déduit un nouvel argument montrant qu'une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$ est un intervalle.

IV.2 Commentaires

(a) Connexité et connexité par arcs



Nous avons vu que la connexité par arcs entraîne a connexité. La réciproque est fausse, comme le montre le dessin ci contre. On a dessiné le graphe de la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ sur un intervalle du type $]0, \alpha]$, ainsi que le segment vertical de longueur 2 centré en l'origine. Dans la version électronique de ce texte, vous pouvez zoomer sur le dessin pour distinguer plus d'oscillations du graphe ; il faut imaginer qu'au voisinage de 0 le graphe possède une infinité d'oscillations, chacune d'amplitude verticale égale à 2 unités : on a beau zoomer, on voit sans cesse le même dessin ! L'ensemble obtenu est connexe mais n'est pas connexe par arcs, parce qu'un chemin reliant un point du graphe à un point du segment ne peut pas être continu (ce point n'est pas facile à démontrer en détail).

Pour éviter les ensembles comme celui-ci, on introduit la notion de connexité locale. On peut alors montrer, sous de bonnes hypothèses, que la connexité est équivalente à la connexité par arcs :

Théorème. *Tout espace métrique complet, connexe, localement connexe, est connexe par arcs.*

La preuve se trouve par exemple dans le livre Un Max de Math, problème 15.

Exercice 91.— On note A le graphe de la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ sur l'intervalle du type $]0, \pi]$.

1. Montrer que sur n'importe quel intervalle du type $[1/(a+2\pi), 1/a]$, la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ prend toutes les valeurs entre 0 et 1. Dessiner le graphe au-dessus d'un intervalle de ce type lorsque x est très proche de 0.

2. Montrer que $\bar{A} = A \cup \{(0,0)\} \times [-1,1]$.

3. Montrer que A est connexe par arcs. En déduire que $\bar{A}$ est connexe.

4. Pour montrer que $\bar{A}$ n'est pas connexe par arcs, on raisonne par l'absurde, en considérant un chemin $\gamma : [0,1] \to \bar{A}$ allant du point du graphe d'absisse π à un point $(0,0)$ du segment vertical ; on note $\gamma_x(t), \gamma_y(t)$ les coordonnées du point $\gamma(t)$ dans le plan.

a. Montrer qu'il existe $\tau \geq 0$ tel que le point $\gamma(t) = (0, y_0)$ est sur le segment vertical mais tous les points $\gamma(t)$ avec $t < \tau$ sont sur le graphe.

b. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit, et $x = \gamma_x(\tau - \varepsilon)$. Montrer qu'il existe $t \in [\tau - \varepsilon, t_0]$ tel que

$$\frac{1}{\gamma_x(t)} = \frac{1}{x} + 2\pi.$$

c. En déduire que pour tout point $(0, \alpha)$ du segment, il existe une suite (t_n) décroissante et convergeant vers τ telle que la suite $(\gamma_y(t_n))$ converge vers $(0, \alpha)$.

d. Conclure en montrant que γ ne satisfait pas le critère de continuité séquentiel en τ.

(b) Connexité et homéomorphismes

Non avons vu que la connexité est une propriété topologique : un espace connexe n'est jamais homéomorphe à un espace qui ne l'est pas. La connexité fournit ainsi une façon de montrer que deux espaces ne sont pas homéomorphes. On peut aussi utiliser cette propriété en l'appliquant à des parties de l'espace. Par exemple, le plan $\mathbb{R}^2$ privé d'un point est connexe par arcs, mais pas $\mathbb{R}$ privé d'un point, ce qui permet de montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 92.— Montrer en détail que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes, en suivant l'idée ci-dessus.

En réalité on peut montrer que $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ ne sont homéomorphes pour aucune valeurs de $p \neq q$. Une première façon de faire ça est de généraliser la notion de connexité par arcs. Ainsi, on montre par exemple que $\mathbb{R}^3$ privé d'un point est simplement connexe, alors que $\mathbb{R}^2$ privé d'un point ne l'est pas (mais ce point est plus délicat), ce qui montre que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas homéomorphe.

IV.3 Exercices

Exercice 93.— Montrer que le graphe d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I est une partie connexe par arcs du plan.

Exercice 94.— Soit X le graphe de la fonction $x \mapsto 1/x$, de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$. Montrer que X n'est pas connexe.

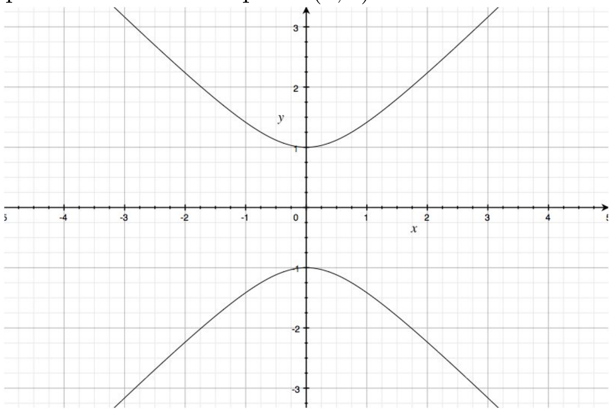
Exercice 95.— Montrer que toute application continue d'un espace métrique connexe dans $\mathbb{Z}$ est constante.

Exercice 96.— (Version en dimension un du théorème de Borsuk-Ulam). On note $\mathbb{S}^1$ le cercle unité de centre 0 dans le plan ; on le voit comme un sous-espace métrique du plan. Soit f une application continue de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux points du cercle, diamétralement opposés, qui ont la même image par f. *Aide : utiliser la connexité du cercle et la fonction auxiliaire définie par $g(v) = f(v) - f(-v)$ (noter que v et $-v$ sont diamétralement opposés).*

Exercice 97.—(partiel 2012) Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère la partie $A = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 = -1\}$, qui est dessinée ci-dessous.

1. La partie A est-elle connexe par arcs ? Donner une preuve complète de votre réponse.

2. Déterminer la composante connexe du point $(0, 1)$ dans A.



V Espaces vectoriels normés, espaces de Banach

V.1 Théorie

(a) Définitions

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une *norme sur E* est une application de E dans $\mathbb{R}^+$, souvent notée $x \mapsto \|x\|$, vérifiant :

1. (séparation) $\forall x \in E,\ \|x\| = 0$ ssi $x = 0$,
2. (homogénéité) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\quad \|\lambda x\| = |\lambda| \,.\, \|x\|$,
3. (inégalité triangulaire) $\forall x, y \in E,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Le couple $(E, \|.\|)$ est alors appelé *espace vectoriel normé*.

Proposition. *Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé, la fonction définie sur $E \times E$ par $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance.*

La preuve est immédiate. Le couple (E, d) est appelé *espace métrique associé* à $(E, \|.\|)$. Toutes les notions métriques et topologiques des chapitres précédents ont donc un sens dans un espace vectoriel normé : suites convergentes, ouverts, *etc.*. Un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire tel que le couple (E, d) est un espace métrique complet, est appelé *espace de Banach*.

En gros, un espace vectoriel normé est un espace métrique dans lequel on sait faire des combinaisons linéaires.

Exemple I : espaces vectoriels normés de dimension finie Pour un vecteur $x = (x_1, \dots, x_N)$ de $\mathbb{R}^N$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i| \,, \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} , \qquad \|x\|_\infty = \max_{i=1}^{N} |x_i| \,.$$

Proposition. *Les applications $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, $\|.\|_\infty$ sont des normes, qui font de $\mathbb{R}^N$ un espace de Banach.*

Recette de preuve.— Dans les trois cas, la seule difficulté concerne l'inégalité triangulaire. On a construit au premier chapitre des distances d_1, d_2, d_∞ sur les ensembles produit, et en particulier sur l'ensemble $\mathbb{R}^N$ (p8). Les inégalités triangulaires pour les trois normes se déduisent de celles de ces trois distances. Enfin, on a vu au chapitre sur la complétude que ces distances font de $\mathbb{R}^N$ un espace métrique complet.

Exemple II : espaces de fonctions Soit maintenant $E = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées d'un espace métrique (X, d) dans $\mathbb{K}$. Pour $f \in E$ on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \,.$$

Proposition. *Cette formule définit une norme sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, qui fait de cet ensemble un espace de Banach.*

Recette de preuve.— Ici encore, l'inégalité triangulaire peut être vue comme une conséquence de l'inégalité triangulaire pour la distance d_∞, vue dans la partie sur les espaces de fonctions. La complétude a été démontrée dans les chapitres précédents.

Autres exemples De nombreux espaces de fonctions ou de suites sont complets, par exemple l'espace $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions intégrables, ou l'espace $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrable, et aussi les espaces de suites analogues $\ell^1(\mathbb{R})$ et $\ell^2(\mathbb{R})$; ou encore les espaces de Sobolev. La complétude de ces espaces joue un rôle essentiel en Analyse fonctionnelle, et en particulier dans l'étude des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles.

Exercice 98.—(indispensable)

1. Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites convergentes dans $(E, \|.\|)$. Montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est convergente. Si (λ_n) est une suite convergente de réels, montrer que la suite $(\lambda_n u_n)$ converge. Avec le critère séquentiel de continuité, ces résultats s'interprètent en disant que les applications $(u, v) \mapsto u + v$ et $(\lambda, u) \mapsto \lambda.u$ sont continues.

2. Montrer, pour tout $x, y \in E$, l'inégalité

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| .$$

Cette inégalité signifie exactement que l'application $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne de $(E, \|.\|)$ vers $(\mathbb{R}, |.|)$.

(b) Dimension finie

Une *isométrie* entre les deux espaces vectoriels normés $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ est une application $\Phi : E \to F$ qui est un isomorphisme d'espaces vectoriels (application linéaire bijective) et telle que, pour tout x dans E, $\|\Phi(x)\|_F = \|x\|_E$.

Deux espaces isométriques ont les mêmes propriétés métriques : $(E, \|.\|_E)$ est complet si et seulement si $(F, \|.\|_F)$ est complet, une partie A de E est bornée si et seulement si $\Phi(A)$ est bornée, A est fermée si et seulement si $\Phi(A)$ est fermée, *etc.*. Les preuves de toutes ces propriétés sont immédiates.

Deux normes $\|.\|_1, \|.\|_2$ sur un même espace vectoriel E sont *équivalentes* s'il existe $K > 0$ telle que, pour tout x dans E,

$$\|x\|_1 \leq K \|x\|_2 \text{ et } \|x\|_2 \leq K \|x\|_1 .$$

Les distances associées sont alors équivalentes ; en particulier la topologie est la même, et la notion de complétude est la même ; il est clair que la notion de partie bornée aussi.

Théorème. *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, et la boule unité fermée est compacte. Tous les espaces vectoriels normés de dimension finie sont complets.*

Recette de preuve.— Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie : par définition, il admet une base finie $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_N)$. Cette base permet de définir une norme particulière

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} x_i e_i \right\|_{\infty,\mathcal{B}} = \max(|x_1|, \ldots |x_N|).$$

Nous allons montrer que la norme $\|.\|$, sur laquelle nous n'avons aucune information, est équivalente à cette norme particulière. Il y a deux inégalités à établir ; on va obtenir la première assez facilement, en utilisant seulement la définition d'une norme. De façon un peu surprenante, on pourra ensuite déduire de cette première inégalité la deuxième inégalité.

(1) Soit $\Phi : \mathbb{R}^N \to E$ l'isomorphisme $(x_i) \mapsto \sum x_i e_i$. **Montrer** que Φ est une isométrie de $(\mathbb{R}^N, \|.\|_\infty)$ vers $(E, \|.\|_{\infty,\mathcal{B}})$. **En déduire** que dans l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|_{\infty,\mathcal{B}})$ est complet, et que les compacts sont les fermés bornés. En particulier, la sphère unité de cet espace est compacte (**pourquoi ?**).

(2) **Trouver** une constante C_1 telle que pour tout x de E,

$$\|x\| \leq C_1 \|x\|_{\infty,\mathcal{B}}$$

(décomposer x dans la base $\mathcal{B}$). En particulier l'application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ est lipschitzienne de $(E, \|.\|_{\infty,\mathcal{B}})$ vers $(\mathbb{R}^+, |.|)$, et a fortiori continue.

(3) D'autre part on a vu que la sphère unité de $(E, \|.\|_{\infty,\mathcal{B}})$ est compacte. Cette application y atteint donc son minimum, ce qui nous apprend que ce minimum est strictement positif (**pourquoi ?**) : il existe $C_2 > 0$ tel que pour tout x de E,

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_{\infty,\mathcal{B}}} \right\| \geq C_2$$

ce qui donne la deuxième inégalité recherchée : les deux normes sont donc équivalentes. En particulier, les notions de fermés, de bornés, de compacts sont les même.

(4) **En déduire** que toutes les normes sont équivalentes.

(5) Montrons que la boule unité B de $(E, \|.\|)$ est compacte. En utilisant la continuité de la norme (exercice 98, deuxième point), **montrer** que c'est un ensemble fermé de l'espace métrique associé à $(E, \|.\|)$. D'autre part il est clairement borné. Par équivalence des normes, la topologie de $(E, \|.\|)$ est la même que celle de $(E, \|.\|_{\infty,\mathcal{B}})$, et dans cet espace on a vu que les fermés bornés sont compacts. Donc B est compacte.

Pas facile de s'y retrouver quand on considère plusieurs normes différentes sur un même espace...

(6) En utilisant le point (1) ci-dessus, **montrer** que $(E, \|.\|)$ est complet.

Corollaire. *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel normé est fermé.*

Recette de preuve.— Utiliser la complétude !

(c) Continuité des applications linéaires

On considère deux espaces vectoriels normés E et F (avec $E \neq \{0\}$).

Proposition. *Soit $L : E \to F$ une application linéaire. Sont équivalentes :*
(i) L est lipschitzienne,
(ii) L est continue,
(iii) L est continue en 0,
(iv) L est bornée sur la boule $B(0,1)$,
(v) L est bornée sur la sphère $S(0,1) := \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$,
(vi) il existe $C > 0$ tel que, pour tout x, $\|L.x\| \leq C\|x\|$.

On notera souvent $L.x$ l'image d'un vecteur x de E par l'application linéaire L. Cette notation rappelle le produit matriciel auquel elle correspond en dimension finie.

Lorsque L est continue, on a les égalités

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|L.x\|}{\|x\|} = \sup_{x \in B(0,1)} \|L.x\| = \sup_{x \in S(0,1)} \|L.x\| = \inf\{C \mid \forall x, \|L.x\| \leq C\|x\|\}.$$

Cette égalité dit notamment que les bornes des points (iv) et (v) sont égales, et égales à la "meilleure" constante C du point (vi).

Recette de preuve.— Le point-clé est de remarquer que (évidemment) pour tout vecteur x non nul, le vecteur

$$\frac{x}{\|x\|}$$

Cette remarque est facile mais très utile !

est de norme 1. Utiliser cette remarque pour **montrer** l'implication $(v) \Rightarrow (vi)$. Pour l'implication $(iii) \Rightarrow (iv)$, **appliquer** la définition de la continuité en 0 avec $\varepsilon = 1$. On en déduit une boule de rayon α, centrée en 0, sur laquelle L est bornée. Etant donné un vecteur x de la boule unité, par quel nombre suffit-il de le multiplier pour obtenir un vecteur de la boule de rayon α ? **En déduire** (iv). Toutes les autres implications sont immédiates.

Les trois premières égalités suivent à nouveau, essentiellement, de la remarque-clé. Pour la dernière inégalité, appelons

$$A = \left\{ \frac{\|L.x\|}{\|x\|} \mid x \neq 0 \right\}.$$

Soit B l'ensemble des majorants de A ; **expliciter** l'ensemble B (quel quantificateur utilisez-vous ?). La borne supérieure étant le plus petit des majorants, on a $\sup A = \inf B$. **En déduire** l'égalité voulue.

Proposition. *Si $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés et si E est de dimension finie, alors toutes les applications linéaires de E dans F sont continues.*

Recette de preuve.— On considère une application linéaire $L : E \to F$. D'après le critère de continuité obtenu à la section précédente, il s'agit de trouver une constante C telle que, pour tout $x \in E$, $\|L.x\|_F \leq C \|x\|_E$. **Trouver** une constante C' telle que

$$\left\| L.\left(\sum x_i e_i\right) \right\|_F \leq C' \|x\|_{\infty,\mathcal{B}}$$

(on a repris la notation $\|x\|_{\infty,\mathcal{B}}$ introduite au début de la preuve du théorème sur les espaces vectoriels normés de dimension finie). **Utiliser** maintenant l'équivalence des normes en dimension finie pour en déduire la continuité de L.

Exercice 99.— La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ définit une application linéaire $x \mapsto M.x$ de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|.\|_\infty$. Montrer par un calcul direct que cette application vérifie le dernier item de la proposition (elle est donc continue).

Exercice 100.— Soient N_1, N_2 deux normes sur un même espace vectoriel E. Supposons que l'identité soit continue de (E, N_1) vers (E, N_2), ainsi que de (E, N_2) vers (E, N_1). Ecrire la condition (vi) ci-dessus. Qu'obtient-on ?

Exercice 101.— Applications bilinéaires

1. Soit $b : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire. Montrer les équivalences entre :

(i) b est continue,

(ii) b est continue en $(0, 0)$,

(iii) il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$,

$$\|b(x_1, x_2)\|_F \leq C \|x_1\|_{E_1} \|x_2\|_{E_2}.$$

2. Montrer que la quantité

$$\|(x_1, x_2)\| \stackrel{def}{=} \sup_{x_1 \in B_{E_1}(0,1), x_2 \in B_{E_2}(0,1)} \|b(x_1, x_2)\|_F$$

définit une norme sur l'espace vectoriel des applications bilinéaires continues.

3. Montrer qu'en dimension finie toutes les applications bilinéaires sont continues.

On aurait des résultats analogues pour les applications multilinéaires continues (voir Wikipedia).

V.2 Commentaires

VI Appendice I : ensembles et applications

La mauvaise manipulation des ensembles, notamment lorsque on prend leur image ou leur image inverse par une application, est une source majeure d'erreurs en Licence de maths.

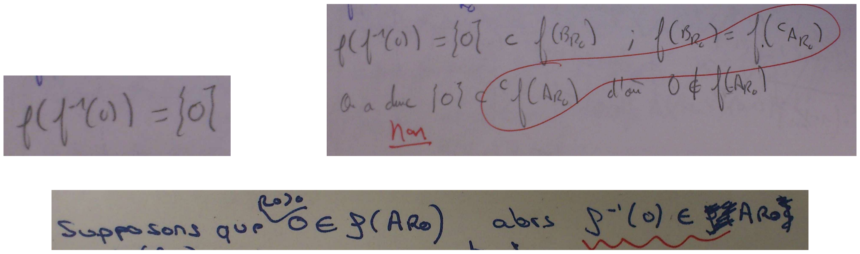


Figure 1 – Quelques extraits de réponses à un problème de topologie...

On a très souvent besoin de propriétés du genre

$$y \in f(A^c) \Rightarrow y \notin f(A),$$

$$f^{-1}(f(A)) = A,$$

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2),$$

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2),$$

etc.. Toutes ces propriétés sont très tentantes, elles ont "l'air vraies", mais malheureusement certaines sont vraies et d'autres sont fausses. Attention au sens de ces mots : par exemple, dire que la propriété

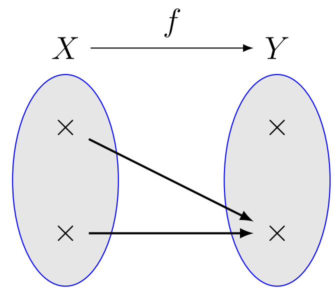
$$y \in f(A^c) \Rightarrow y \notin f(A)$$

est vraie signifie qu'elle est vraie "tout le temps", dans tous les contextes, c'est-à-dire quels que soient l'ensemble A et l'application f. Inversement, elle est déclarée fausse dès qu'on trouve un contre-exemple. Essayons de voir comment, avec un peu d'effort, on peut arriver à déméler le vrai du faux.

VI.1 Contre-exemples, ou comment démasquer les propriétés fausses

Pour démasquer une propriété fausse, il suffit d'avoir un contre-exemple. Se souvenir d'un contre-exemple est la meilleure façon de ne pas être tenté d'utiliser une propriété fausse. Nous allons essayer de fabriquer des contre-exemples les plus simples possibles, pour qu'ils soient faciles à retenir.

Commençons par fabriquer une application f entre deux ensembles X et Y qui ne soit ni injective, ni surjective. Pour la simplicité, on voudrait que X et Y aient le moins d'éléments possible. Pour que f ne soit pas injective il faut que X ait au moins deux éléments x_1, x_2 qui ont la même image. Pour qu'elle ne soit pas surjective, il faut ensuite, que Y ait un élément y différent de l'image commune à x_1 et x_2. Ceci conduit à l'exemple suivant :

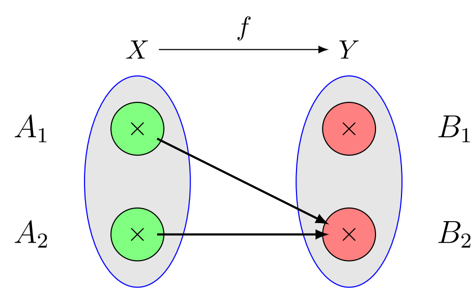


Bien que très simple, cette application va nous fournir des contre-exemples à de nombreuses propriétés.

La première chose à faire est de savoir déterminer sans se tromper l'image et l'image réciproque d'un ensemble. Rappelons que l'image d'une partie A de X, c'est l'ensemble des images des éléments de A, autrement dit $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$. L'image réciproque d'une partie B de Y, c'est l'ensemble des éléments de X dont l'image est dans B, autrement dit $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$. A vrai dire, ce sont les seules définitions raisonnables, si on a en tête que l'image directe prend une partie de X pour fabriquer une partie de Y, et que l'image réciproque prend une partie de Y pour fabriquer une partie de X.

L'image réciproque d'un ensemble B est aussi appelée "image inverse", ou "tiré en arrière" de B.

Exercice 102.—On a dessiné quatres sous-ensembles contenant chacun un unique élément.



1. Déterminer l'image des ensembles dessinés, lorsque ça a un sens. Réponse p61

2. Déterminer l'image réciproque des ensembles dessinés, lorsque ça a un sens. Réponse

3. Si ceci vous a paru difficile, continuez : dessinez un diagramme d'application "en patates", comme ci-dessus, mais plus compliqué. Vérifiez que votre application en est bien une : de tout point de l'ensemble de départ, il doit partir une unique flèche ! Arrangez-vous aussi pour que votre application ne soit ni injective ni surjective. Déterminer alors l'image directe de deux ou trois parties de l'ensemble de départ, et l'image réciproque de quelques parties de l'ensemble d'arrivée.

Exercice 103.—

1. Déterminer $f(f^{-1}(Y))$. Mêmes questions pour B_1 et B_2. Déterminer $f^{-1}(f(A_1))$, même chose pour A_2. Réponse

2. Parmi les propriétés suivantes, trouver des contre-exemples pour trois d'entre elles. Dessiner soigneusement chaque contre-exemple.

$$(1) f^{-1}(f(A)) \subset A \qquad (2) A \subset f^{-1}(f(A))$$

$$(3) f(f^{-1}(B)) \subset B \qquad (4) B \subset f(f^{-1}(B))$$

$$(5) f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2) \qquad (6) f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$$

$$(7) f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \qquad (8) f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cap B_2).$$

Réponses ?

Exercice 104.— Soit maintenant g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^2$. Pour toutes les propriétés qui ont été déclarées fausse à l'exercice précédent, fabriquer un contre-exemple pour cette application f.

Aide

VI.2 Démonstrations

Il y a quand même quelques propriétés vraies !

D'abord le plus facile (et le plus important en maths) : *l'opération "tirer en arrière" est entièrement compatible avec les opérations ensemblistes.*

Exercice 105.— Démontrer les propriétés suivantes, où $f : X \to Y$ est une application quelconque, et B, B' deux parties quelconques de Y.

1. $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$, autrement dit "en tirant en arrière une intersection on obtient l'intersection des tirés en arrière".

2. $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.

3. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

VI.3 Mots et images mentales

Il suffit parfois d'exprimer soigneusement les différents ensembles, avec des mots, pour en déduire leurs propriétés. Par exemple, considérons $f(A \cap A')$. C'est l'ensemble des $f(x)$ pour x dans $A \cap A'$, autrement dit, l'ensemble des images des éléments qui sont *à la fois* dans A et dans A'. L'ensemble $f(A) \cap f(A')$, lui, est l'ensemble des éléments qui sont *à la fois* l'image d'un élément x de A et l'image d'un élément x' de A' (attention, x n'est pas forcément égal à x' !) Ayant écrit ceci, on voit que la première propriété est plus contraignante que la seconde (non ?). Donc le premier ensemble est inclus dans le second. (On sent aussi pourquoi la réciproque doit être fausse, voir le contre-exemple fabriqué plus haut).

A lire lentement !...

Les dessins, ou les images mentales, sont aussi très utiles. Considérons par exemple l'ensemble $f^{-1}(f(A))$, en représentant f à l'aide d'un diagramme avec deux patates, comme ci-dessus. Il est fabriqué en partant de A, (1) en suivant d'abord toutes les flèches qui en partent, on obtient ainsi $f(A)$, (2) puis en remontant toutes les flèches possibles à partir de tous les points de $f(A)$. Si x est un élément de A, de cet élément part une flèche qui aboutit en $f(x)$ (on retrouve le fait que $f(x)$ appartient à $f(A)$) ; bien sûr, de $f(x)$ on peut remonter la *même* flèche ; on trouve ainsi que x, étant l'un des éléments obtenus après la deuxième étape de construction, est dans $f^{-1}(f(A))$. Puisque x était un élément quelconque de A, on a donc démontré la propriété $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Exercice 106.— Ecrire un argument plus traditionnel en vous inspirant du paragraphe précédent.

En suivant la même méthode et en raisonnant symétriquement, prenons une partie B de Y, et essayons de montrer que B est incluse dans $f(f^{-1}(B))$. On part d'un élément y de B, on remonte une flèche qui aboutit en y...

Exercice 107.— Qu'est-ce qui ne marche pas ?

Le problème vient du fait qu'il peut arriver qu'aucune flèche n'aboutisse en y (typiquement si f n'est pas surjective). Le diagramme représentant f n'est pas du tout symétrique entre la gauche et la droite : de chaque point x dans l'ensemble de départ part une unique flèche (ce qui nous permet de parler de l'image de x), alors que pour un élément dans l'ensemble d'arrivée il peut n'y avoir aucune flèche qui arrive, où plusieurs (ce qui correspond au défaut d'injectivité ou de surjectivité de f). Pour chaque x au départ, $f(x)$ est un élément bien défini de l'ensemble d'arrivée. Alors que pour un y dans l'ensemble d'arrivée, "$f^{-1}(y)$" ne définit pas un élément en général. *L'ensemble* $f^{-1}(\{y\})$ est bien défini, c'est l'image réciproque du singleton $\{y\}$, autrement dit l'ensemble des antécédants de y ; mais cet ensemble peut être vide ou au contraire contenir plein d'élements.

Le fait que l'élément x a une et une seule image, vient de la définition de ce qu'est une application ; ceci **n'a rien à voir avec l'injectivité ou la surjectivité**.

VI.4 Que retenir ?

Avant tout, il faut retenir la démarche : pour savoir si une propriété ensembliste est vraie ou fausse, on la teste d'abord sur des exemples les plus simples possibles, en particulier à l'aide du diagramme en patate de "l'application ni injective ni surjective la plus simple du monde". Si la propriété résiste aux tests, elle a des chances d'être vraie, on cherche à la démontrer.

Bien sûr, ça peut aussi aider de retenir quelques propriétés. En particulier ce qui suit :

- Quand on prend l'*image réciproque* d'une opération ensembliste, tout marche bien !
- L'ensemble $f^{-1}(f(A))$ n'est pas toujours égal à A, et de même pour $f(f^{-1}(B))$ et B ; dans les deux cas, seule l'une des deux inclusions est vraie. Si on retient ceci, on trouve celle qui est fausse en testant rapidement sur notre application f, et on en "déduit" celle qui est vraie.
- Pour l'image directe d'opérations ensembliste, il faut se méfier... Pour l'intersection, seule l'une des deux inclusions est vraie. Pour la réunion, ça marche ! Pour le complémentaire, rien n'est vrai...

Voir l'exercice 105.

Un dernier exercice pour la route !

Exercice 108.—

1. Démontrer que l'union de l'image est égale à l'image de l'union. Réponse

2. Montrer que l'image du complémentaire n'est pas toujours contenu dans le complémentaire de l'image. Montrer qu'il ne le contient pas toujours non plus. Réponse

---

VI.5 Aides et Réponses

• *Images directes ?* Prendre l'image n'a de sens que pour les parties de X. L'ensemble $f(A_1)$ est l'ensemble des éléments obtenus en "suivant toutes les flèches qui parte de A_1". On trouve $f(A_1) = B_2 = f(A_2)$.

• *Images inverses ?* Pour déterminer l'image inverse d'un sous-ensemble B de l'ensemble d'arrivée, on remonte toutes les flèches qui arrivent dans B. On trouve $f^{-1}(B_1) = \emptyset$ et $f^{-1}(B_2) = X$.

Retour à l'exercice

• *Déterminer* $f(f^{-1}(Y))$ Il faut d'abord déterminer l'image inverse de Y, puis l'image directe de l'ensemble obtenu. On remonte toutes les fléches aboutissant dans Y, on obtient tout l'ensemble X. On suite alors toutes les flèches qui partent de X, on obtient l'ensemble B_2. La réponse est donc $f(f^{-1}(Y)) = B_2$.

On part de B_1, on remonte toutes les flèches : comme il n'y a aucune flèche aboutissant dans B_1, on trouve l'ensemble vide. L'image directe de l'ensemble vide est l'ensemble vide. Donc $f(f^{-1}(B_1)) = \emptyset$.

Pour B_2, on trouve $f(f^{-1}(B_2)) = B_2$.

• *Contre-exemples :* Désolé, mais l'exercice n'est vraiment efficace que si vous le faites tout seul ! Ici vous devriez avoir tout ce qu'il faut pour y arriver. Pour savoir quelles sont les propriétés fausses, vous trouverez des indications dans la fin de la section.

Retour à l'exercice

• *Contre-exemples avec la fonction* $g : x \mapsto x^2$ Inspirez-vous de ce que nous avons fait avec la fonction f. Il faut à nouveau utiliser le défaut d'injectivité et de surjectivité de g : autrement dit, commencez par trouver deux réels x_1, x_2 qui ont la même image par g, puis un réel y_2 qui n'a pas d'antécédent. Avec fabriquez vos ensembles avec ces trois éléments (et aussi $y_1 = f(x_1)$).

• *L'image de l'union et l'union des images* $f(A_1 \cup A_2)$, c'est l'ensemble des éléments qui s'écrivent $f(x)$ pour un élément x qui est dans A_1 ou dans A_2. $f(A_1) \cup f(A_2)$, par contre, c'est l'ensemble des éléments qui s'écrivent $f(x)$ pour un élément x qui est dans A_1, ou bien qui s'écrivent $f(x)$ pour un élément x qui est dans A_2. C'est pareil, non ?

• *Image du complémentaire et complémentaire de l'image :* Utiliser les diagrammes en patates, les contre-exemples ne sont pas difficiles à trouver...

Retour à l'exercice

VII Appendice II : quelques schémas