**Topologie et calcul différentiel (3MA260)**
**Corrigé du partiel du CS/A du 27 octobre 2021**

**Exercice 1.**

1. Comme $A+B=B+A$ on peut supposer que $A$ est ouvert. Si $x \in A+B$ alors $x=a+b$. Or $a \in A$ et $A$ est ouvert. Donc $\exists r>0$ tel que $B(a,r) \subset A$ ainsi $B(x,r)=\{b\}+B(a,r) \subset A+B$. Ceci étant vrai pour tout $x \in A+B$, $A+B$ est ouvert.
2. Pour $r \in \mathbb{Q}$, comme $i \in \mathcal{I}$, on a $r-i \in \mathcal{I}$. Donc $r=i+r-i \in \mathcal{I}+\mathcal{I}$. D'autre part, si $i \in \mathcal{I}$, $2i \in \mathcal{I}$ et $-i \in \mathcal{I}$ (car $\mathbb{Q}$ est un corps). Donc $i=2i+-i \in \mathcal{I}+\mathcal{I}$. Ainsi $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathcal{I} \subset \mathcal{I}+\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$, c'est-à-dire $\mathcal{I}+\mathcal{I}=\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ mais que ni $\mathbb{Q}$ ni $\mathcal{I}$ ne le sont, on voit que la réciproque de l'énoncé de la question 1 n'est pas vraie.
3. D'après le cours si $A$ et $B$ sont compacts, alors $A \times B$ est compact. Or $A+B=\varphi(A\times B)$ où $\varphi : (x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to x+y \in \mathbb{R}^d$ est continue, donc $A+B$ est compact comme image continue d'un compact.
4. Si $A$ et $B$ sont fermés, $A+B$ n'est pas forcément fermé comme le prouve l'exemple suivant. Soient $A=\{(x,y);(x,y) \in ]0,+\infty[^2,\ y \geqslant 1/x\}$ et $B=\{(-x,y);(x,y) \in ]0,+\infty[^2,\ y \geqslant 1/x\}$. Ils sont tous deux fermés dans $\mathbb{R}^2$. Mais $A+B=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y>0\}$ qui n'est pas fermé ; en effet, on a clairement $A+B \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y>0\}$ et si $y_0>0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, on peut écrire $(x_0,y_0)=(R,y_0/2)+(x_0-R,y_0/2)$ pour tout $R \in \mathbb{R}$. En prenant $R>|x_0|$, on aura que $(R,y_0/2) \in A$ et $(x_0-R,y_0/2) \in B$. Donc $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y>0\} \subset A+B$
5. Supposons que $A$ est compact et $B$ est fermé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $A+B$ qui converge vers, disons, $x_\infty$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n=a_n+b_n$ où $a_n \in A$ et $b_n \in B$. Comme $A$ est compact, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $a_{\varphi(n)}$ converge vers, disons, $a_\infty \in A$. Ainsi $b_{\varphi(n)}=x_{\varphi(n)}-a_{\varphi(n)}$ converge vers $b_\infty=x_\infty-a_\infty \in B$ comme $B$ est fermé. Donc $x_\infty=a_\infty+b_\infty \in A+B$. On a donc montré que toute suite de $A+B$ qui converge a sa limite dans $A+B$ c'est-à-dire que $A+B$ est fermé.
6. D'après le cours si $A$ et $B$ sont connexes par arcs, alors $A\times B$ est connexe par arcs. Or $A+B=\varphi(A\times B)$ où $\varphi : (x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to x+y \in \mathbb{R}^d$ est continue, donc $A+B$ est connexe par arcs comme image continue d'un connexe par arcs.

**Exercice 2.**

1. Soit $r \in \mathbb{R}$. Par définition de la métrique induite, l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q};\ x<r\}$ est fermé dans $\mathbb{Q}$ si et seulement si il existe $F$ fermé de $\mathbb{R}$ tel que $\{x \in \mathbb{Q};\ x<r\}=F\cap\mathbb{Q}$. Si $r$ est irrationnel, on voit que $\{x \in \mathbb{Q};\ x<r\}=]-\infty,r[\cap\mathbb{Q}=]-\infty,r]\cap\mathbb{Q}$ car $r \notin \mathbb{Q}$. Donc $\{x \in \mathbb{Q};\ x<r\}$ est fermé dans $\mathbb{Q}$. D'autre part, si $r \in \mathbb{Q}$, alors $\{x \in \mathbb{Q};\ x<r\}$ n'est pas fermé dans $\mathbb{Q}$ : en effet, la suite $(r-1/n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de $\{x \in \mathbb{Q};\ x<r\}$ qui converge vers $r \notin \{x \in \mathbb{Q};\ x<r\}$. On voit donc que $r \notin \mathbb{Q}$ est une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q};\ x<r\}$ soit fermé dans $\mathbb{Q}$
2. Si les fermés bornés de $\mathbb{Q}$ étaient tous compacts, alors les intervalles $[a,b]\cap\mathbb{Q}$ seraient compacts ; ils seraient donc complets (voir le cours). Donc $\mathbb{Q}$ serait complet ce qui n'est pas le cas.

**Exercice 3.**

1. L'inégalité des accroissements finis nous dit sous les conditions de l'énoncé que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $|f(a)-f(b)| \leqslant M|b-a|$ où $M=\sup\limits_{c\in[a,b]}|f'(c)|<+\infty$. On voit donc que $\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\varepsilon/M$ tel que $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$, si $|b-a|<\delta$ alors $|f(a)-f(b)|<\varepsilon$. Ainsi $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
2. Considérons la fonction $f(x)=\dfrac{\sin(e^x)}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée $f'(x)=\frac{e^x\cos(e^x)}{1+x^2}-\frac{2x\sin(e^x)}{(1+x^2)^2}$ n'est pas bornée puisqu'aux points $x_n=\log 2\pi n$ (pour $n \geqslant 1$), elle vaut $f'(x_n)=\frac{2\pi n}{1+\log^2 2\pi n}$ qui tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. $f$ est néanmoins uniformément continue. En effet, prenons

$\varepsilon > 0$. On a clairement $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = 0$. Donc il existe $A > 0$ tel que si $|x| \geqslant A$, $|f(x)| < \varepsilon/4$. D'autre part, comme $[-A, A]$ est compact et que $f$ y est continue, elle y est uniformément continue. Donc, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall (x, y) \in [-A, A]^2$, si $|x - y| \leqslant \delta$ alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon/2$. Ainsi $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, si $|x - y| \leqslant \delta$

— soit $(x, y) \in [-A, A]^2$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon/2 \leqslant \varepsilon$,
— soit $x > A$ et $y > A$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x)| + |f(y)| \leqslant \varepsilon$,
— soit $x > A$ et $y \in [A - \delta, A]$, alors
$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x)| + |f(A)| + |f(A) - f(y)| \leqslant \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/2 \leqslant \varepsilon$,
— soit $x < -A$ et $y < -A$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x)| + |f(y)| \leqslant \varepsilon$,
— soit $x < -A$ et $y \in [-A, -A + \delta]$, alors
$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x)| + |f(A)| + |f(A) - f(y)| \leqslant \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/2 \leqslant \varepsilon$,
— soit on a l'une des options ci-dessus où les rôles de $x$ et $y$ ont intervertis ;

donc, dans tous les cas, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

On voit donc que $f$ est uniformément continue.

En suivant l'idée du calcul qui précède, on montre que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$ alors $f$ est uniformément continue.