

## Topologie et calcul différentiel (3MA260)

Partiel du CS/A du 27 octobre 2021

**Durée : 1h30. Sans documents. Téléphones portables éteints et rangés.**

Toutes les réponses devront être dûment justifiées.

On pourra admettre le résultat d'une question non traitée en le mentionnant clairement dans la copie.

**Exercice 1.** On considère  $\mathbb{R}^d$  muni de sa distance  $d_\infty$ . Pour  $A \subset \mathbb{R}^d$  et  $B \subset \mathbb{R}^d$  non vides, on définit l'ensemble  $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$ .

1. Montrer que  $A + B$  est ouvert si  $A$  ou  $B$  est ouvert.
2. Soit  $\mathcal{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Calculer  $\mathcal{I} + \mathcal{I}$  et montrer que la réciproque de l'énoncé précédent n'est pas vraie.
3. Si  $A$  et  $B$  sont compacts,  $A + B$  est-il forcément compact ?
4. Si  $A$  et  $B$  sont fermés,  $A + B$  est-il forcément fermé ?
5. Montrer que, si  $A$  est compact et  $B$  est fermé alors  $A + B$  est fermé.
6. Si  $A$  et  $B$  sont connexes par arcs,  $A + B$  est-il forcément connexe par arcs ?

**Exercice 2.** Soit  $\mathbb{Q}$  muni de la métrique induite par la métrique usuelle sur  $\mathbb{R}$ .

1. Soit  $r \in \mathbb{R}$ .  
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur  $r$  pour que l'ensemble  $\{x \in \mathbb{Q}; x < r\}$  soit fermé dans  $\mathbb{Q}$ .
2. Montrer que les compacts de  $\mathbb{Q}$  ne sont pas les sous-ensembles fermés bornés de  $\mathbb{Q}$ .

**Exercice 3.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que si  $f'$ , la dérivée de  $f$ , est bornée alors  $f$  est uniformément continue.
2. Montrer que la réciproque n'est pas vraie.