Analyse réelle et analyse harmonique

Frédéric Klopp

16 mars 2022

Table des matières

Préface

Ces notes sont très largement inspirées des chapitres 2, 6 et 7 de l'ouvrage [4] et des chapitres 1, 2 et 3 de l'ouvrage [2].

Chapitre 1

Mesures de Borel positives, intégration et espaces L^p

1.1 Quelques rappels

Définition 1.1. Soit X un ensemble.

L'ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ est une *topologie* sur X 1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$; 2. si $(V_i)_{i\in I}$, $V_i \in \mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i\in I} V_i \in \mathcal{T}$; 3. si $n \geq 1$ et $(V_i)_{1\leq i\leq n}$, $V_i \in \mathcal{T}$, alors $\bigcap_{1\leq i\leq n} V_i \in \mathcal{T}$. $(X, \mathcal{T})$ est alors un *espace topologique*.	L'ensemble $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ est une σ-*algèbre* sur X 1. $X \in \mathcal{S}$; 2. $V \in \mathcal{S} \Longrightarrow X \setminus V \in \mathcal{S}$; 3. si $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $E_i \in \mathcal{S}$, alors $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \mathcal{S}$. $(X, \mathcal{S})$ est alors un *espace mesurable*.

L'*intérieur* d'un ensemble E, notée $\overset{\circ}{E}$, est le plus grand ouvert contenu dans cet ensemble ; c'est aussi la réunion de tous les ouverts contenu dans cet ensemble. Les *fermés* sont les complémentaires des ouverts. L'*adhérence* d'un ensemble E, notée $\overline{E}$, est le plus petit fermé contenant cet ensemble ; c'est aussi l'intersection de tous les fermés contenant cet ensemble (par la définition des fermés et le 1.(c) de la définition 1.1). On dit que V est un *voisinage* du point x s'il existe un ouvert U tel que $x \in U \subset V$.

Définition 1.2. Un ensemble $K \subset X$ est *compact* si, de tout recouvrement ouvert de K (i.e. une famille d'ouverts $(O_j)_{j\in J}$ tels que $K \subset \bigcup_{j\in J} O_j$), on peut extraire un sous recouvrement fini (i.e. il existe $j_1, \cdots, j_n$ dans J tels que $K \subset O_{j_1} \cup \cdots \cup O_{j_n}$).
Un ensemble est dit *relativement* compact s'il est inclus dans un compact.

Exercice 1.3. Montrer qu'un fermé contenu dans un compact est compact.

Définition 1.4. $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique est dit séparé (ou de Hausdorff) si et seulement si pour tous $(x, y) \in X^2$, il existe U voisinage de x et V voisinage de y tels que $U \cap V = \emptyset$.

Théorème 1.5. *Soit X un espace de Hausdorff, $K \subset X$ un compact et $x \in X \setminus K$. Alors il existe U et V ouverts de X tels que $K \subset U$, $x \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.*

Démonstration. Comme X est un espace de Hausdorff, pour chaque $y \in K$ il existe U_y voisinage de y et V_y voisinage de x tel que $U_y \cap V_y = \emptyset$. Alors $(U_y)_{y\in K}$ est un recouvrement ouvert de K dont on peut extraire le recouvrement fini $(U_{y_j})_{1\le j\le J}$ (car K est compact). Ainsi $U = \bigcup_{1\le j\le J} U_{y_j}$ est un ouvert contenant K et $V := \bigcap_{1\le j\le J} V_{y_j}$ est un ouvert contenant x. On a clairement $V \cap U = \emptyset$. $\square$

Exercice 1.6. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Montrer que si $(K_i)_{1\le i\le n}$ sont des compacts deux à deux disjoints dans X, un espace de Hausdorff, alors il existe $(V_i)_{1\le i\le n}$ des ouverts deux à deux disjoints tels que $K_i \subset V_i$ pour $1 \le i \le n$.

Le complémentaire d'un compact dans un espace de Hausdorff est ouvert comme réunion des voisinages ouverts de chacun de ses points construits par le théorème 1.5. On obtient ainsi

Corollaire 1.7. *Un sous ensemble compact d'un espace de Hausdorff est fermé.*

Exercice 1.8. Montrer que, dans un espace de Hausdorff, l'adhérence d'un sous-ensemble d'un compact est compacte.
Montrer que, dans un espace de Hausdorff, un ensemble est relativement compact (i.e. contenu dans un compact) si et seulement si son adhérence est compacte.

Théorème 1.9. *Soient $(K_i)_{i\in I}$ des compacts de X, un espace de Hausdorff tels que $\bigcap_{i\in I} K_i = \emptyset$. Alors il existe $\{i_1, \cdots, i_n\} \subset I$ tel que $\bigcap_{1\le j\le n} K_{i_j} = \emptyset$.*

Démonstration. On définit l'ouvert $V_i = (K_i)^c$ et on choisit $i_0 \in I$. Comme K_{i_0} ne rencontre pas tous les $(K_i)_{i\neq i_0}$, $(V_i)_{i\neq i_0}$ est un recouvrement ouvert de K_{i_0}, on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $K_{i_0} \subset \bigcup_{1\le j\le n} V_{i_j}$. Ainsi $\bigcap_{0\le j\le n} K_{i_j} = \emptyset$. $\square$

Définition 1.10. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit *localement compact* si et seulement si tout point admet un voisinage compact.

Théorème 1.11. *Soit U un ouvert de X, un espace de Hausdorff localement compact et $K \subset U$ un compact. Alors il existe un ouvert V relativement compact tel que $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

Démonstration. Comme tout point de K admet un voisinage compact, on peut trouver un recouvrement fini de K par des ouverts relativement compacts. La réunion de ces ouverts, disons, O, est ouverte relativement compacte. Si $U = X$, on pose $V := O$ et la preuve est achevée.
Si $U \neq X$, soit C le complémentaire de U. Par le théorème 1.5, pour tout $c \in C$, il existe V_c un ouvert tel que $K \subset V_c$ et $c \notin \overline{V_c}$. Ainsi si on pose $K_c := C \cap \overline{O} \cap \overline{V_c}$, K_c est compact et l'intersection $\bigcap_{c\in C} K_c$ est vide.
Par le théorème 1.9, il existe $c_1, \cdots, c_n$, des points de C, tels que $C \cap \overline{O} \cap \overline{V_{c_1}} \cap \cdots \cap \overline{V_{c_n}} = \emptyset$. On pose alors $V := O \cap V_{c_1} \cap \cdots \cap V_{c_n}$ qui a les propriétés annoncées comme $\overline{V} \subset \overline{O} \cap \overline{V_{c_1}} \cap \cdots \cap \overline{V_{c_n}}$. $\square$

Définition 1.12. Soit X un espace topologique et f une fonction de X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ (où $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$).
- f est semi-continue inférieurement si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x;\ f(x) > \alpha\}$ est ouvert;
- f est semi-continue supérieurement si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x;\ f(x) < \alpha\}$ est ouvert.

On vérifie alors que

1. une fonction à valeurs réelles est continue si et seulement si elle est à la fois semi-continue inférieurement et semi-continue supérieurement.
2. Les fonctions indicatrices d'ouverts sont semi-continues inférieurement, celles de fermés semi-continues supérieurement.
3. L'infimum d'une famille de fonctions semi-continues supérieurement est semi-continue supérieurement.
4. Le supremum d'une famille de fonctions semi-continues inférieurement est semi-continue inférieurement.

Exercice 1.13. Montrer que l'opposé d'une fonction semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) est semi-continue supérieurement (resp. inférieurement).
Montrer qu'une somme de fonctions semi-continues inférieurement (resp. supérieurement) est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement).

Définition 1.14. Soit $f : X \to \mathbb{C}$. Le support de f, noté supp$f$, est l'adhérence de $\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$.

On notera $\mathcal{C}_c(X)$ l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ continues à support compact. C'est un espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) pour l'addition usuelle des fonctions (et la multiplication par un scalaire). C'est une algèbre si on la munit du produit des fonctions.

Proposition 1.15. *Soient X et Y des espaces topologiques et $f :\ X \to Y$ continue. Alors si $K \subset X$ est compact, $f(K)$ est compact dans Y.*

Exercice 1.16. Démontrer la proposition 1.15.

Notations. La notation $K \prec f$ désigne un compact K dans X et un fonction f dans $\mathcal{C}_c(X)$ tels que $0 \leq f \leq 1$ et $f_{|K} = 1$.
La notation $f \prec V$ désigne un ouvert V dans X et un fonction f dans $\mathcal{C}(X)$ tels que $0 \leq f \leq 1$ et supp $f \subset V$.
On notera $K \prec f \prec V$ quand, à la fois, on a $K \prec f$ et $f \prec V$.

Théorème 1.17. *(Lemme d'Urysohn) Soit X un espace de Hausdorff localement compact, V un ouvert de Xet $K \subset V$ un compact de X. Alors il existe $f \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $K \prec f \prec V$.*

Démonstration. On pose $r_1 = 0$ et $r_2 = 1$. Soit $\{r_i; i \geq 3\} =]0,1[\cap \mathbb{Q}$ (où $r_i \neq r_j$ si $i \neq j$). Grâce au théorème 1.17, on construit V_0 puis V_1 ouverts relativement compacts tels que

$$K \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset V_0 \subset \overline{V_0} \subset V. \tag{1.1}$$

Pour $n \geq 2$, supposons que l'on a construit $V_{r_1}, \cdots, V_{r_n}$ ouverts relativement compacts de telle façon que si $r_i < r_j$ alors $\overline{V_{r_j}} \subset V_{r_i}$. Soit $r_i = \max\{r_k; r_k < r_{n+1},\ 1 \leq k \leq n\}$ et $r_j = \min\{r_k; r_k > r_{n+1},\ 1 \leq k \leq n\}$. Par le théorème 1.17, on construit $V_{r_{n+1}}$ tel que

$$\overline{V_{r_j}} \subset V_{r_{n+1}} \subset \overline{V_{r_{n+1}}} \subset V_{r_i}.$$

Par récurrence, on construit ainsi une famille d'ouverts relativement compacts $(V_r)_{r \in]0,1[\cap \mathbb{Q}}$ tels que $K \subset V_1$, $\overline{V_0} \subset V$ et

$$s > r \Longrightarrow \overline{V_s} \subset V_r. \tag{1.2}$$

Pour $r \in]0,1[\cap \mathbb{Q}$ et $x \in X$, posons

$$f_r(x) = r\mathbf{1}_{V_r} = \begin{cases} r \text{ si } x \in V_r, \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \quad g_r(x) = r + (1-r)\mathbf{1}_{\overline{V_r}} = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \overline{V_r}, \\ r \text{ sinon} \end{cases}. \tag{1.3}$$

Les remarques qui suivent la définition 1.12 nous disent que pour tout r, f_r est semi-continue inférieurement et g_r semi-continue supérieurement.
On pose alors

$$f = \sup_{r\in]0,1[\cap\mathbb{Q}} f_r \quad \text{et} \quad g = \inf_{r\in]0,1[\cap\mathbb{Q}} g_r. \tag{1.4}$$

Ainsi f est semi-continue inférieurement et g semi-continue supérieurement ; elles prennent clairement leur valeurs dans $[0,1]$. De plus, f est constante égale à 1 sur K et son support est contenu dans $\overline{V_0}$. Pour achever la preuve du lemme d'Urysohn, il suffit de démontrer que $f = g$.
On a $f \leq g$. En effet, on ne peut avoir $f_r(x) > g_s(x)$ que si $r > s$, $x \in V_r$ et $x \notin \overline{V_s}$. Or, $r > s$ implique $V_s \subset V_r$. Ainsi, on voit que pour tout (r,s), on a $f_r \leq g_s$. On en déduit que $f \leq g$.
Supposons maintenant qu'il existe x tel que $f(x) < g(x)$. Il existe donc des rationnels r et s tels que $f(x) < r < s < g(x)$. Comme $f(x) < r$, on a $x \notin V_r$; mais comme $g(x) > s$, on a $x \in \overline{V_s}$ ce qui contredit (1.2). On a donc $f = g$. Ceci achève la preuve du lemme d'Urysohn. □

On va maintenant utiliser le lemme d'Urysohn pour construire une partition continue de l'unité.

Théorème 1.18. *Soient $V_1, \cdots, V_n$ des ouverts de X un espace de Hausdorff localement compact et K un compact tel que $K \subset V_1 \cup \cdots \cup V_n$. Alors, pour $1 \leq i \leq n$, il existe $f_i \prec V_i$ telles que $K \prec f_1 + f_2 + \cdots + f_n$.*

Démonstration. Par le théorème 1.11, tout point $x \in K$ est contenu dans un ouvert W_x relativement compact d'adhérence contenue dans l'un des $(V_i)_{1\leq i\leq n}$. On peut donc recouvrir K par un nombre fini de ces ouverts $K \subset W_{x_1} \cup \cdots \cup W_{x_m}$. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose $F_i = \displaystyle\bigcup_{\substack{1\leq j\leq m \\ \overline{W_{x_j}}\subset V_i}} \overline{W_{x_j}}$ qui est compact. Le lemme d'Urysohn nous donne alors $g_i \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $\mathbf{1}_{F_i} \leq g_i \leq \mathbf{1}_{F_i'}$ où F_i' est un compact de V_i. On pose

$$\begin{aligned} f_1 &= g_1, \\ f_2 &= (1-g_1)g_2, \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ f_n &= (1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_{n-1})g_n. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Pour $1 \leq i \leq n$, on a $f_i \in \mathcal{C}_c(X)$ et $0 \leq f_i \leq \mathbf{1}_{F_i'}$. D'autre part,

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = 1 - (1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_n).$$

Or comme $K \subset F_1 \cup \cdots \cup F_n$, $(1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_n)$ s'annule sur K ; ainsi $\mathbf{1}_K \leq f_1 + f_2 + \cdots + f_n$. Ceci complète la preuve du théorème 1.18. □

1.2 Le théorème de représentation de Riesz

On va démontrer le

Théorème 1.19. *(Théorème de représentation de Riesz pour les mesures positives) Soit X un espace de Hausdorff localement compact. Soit Λ une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(X)$ (i.e. pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$, si $f \geq 0$ alors $\Lambda f \geq 0$). Alors, il existe $\mathcal{S}$ une σ-algèbre sur X contenant les boréliens de X et une unique mesure positive μ sur $\mathcal{S}$ telle que*

1. *pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$, $\Lambda f = \displaystyle\int_X f(x)d\mu(x)$;*

2. *si $K \subset X$ est compact alors $\mu(K) < +\infty$;*
3. *pour $E \in \mathcal{S}$, $\mu(E) = \inf\{\mu(V);\ E \subset V,\ V$ ouvert$\}$;*
4. *si E est ouvert ou si $E \in \mathcal{S}$ tel que $\mu(E) < +\infty$ alors $\mu(E) = \sup\{\mu(K);\ K \subset E,\ K$ compact$\}$;*
5. *si $E \in \mathcal{S}$, $A \subset E$ et $\mu(E) = 0$ alors $A \in \mathcal{S}$.*

La propriété 1 qui relie la mesure à la forme linéaire est bien sûre celle qui présente le plus grand intérêt. Elle caractérise la mesure μ. On verra plus loin que les propriétés 2, 3 et 4 sont reliées ; dans des espaces "raisonnables", 3 et 4 (en fait une version plus forte au sens où elle est vraie pour tout $E \in \mathcal{S}$) sont des conséquences de 2 (voir les théorèmes 1.34 et 1.35). La propriété 5 dit simplement que la mesure est complète (on sait que l'on peut toujours compléter une mesure).
Un autre théorème de représentation de Riesz bien connu est celui sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ qui dit que toute forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$ est représentée par un vecteur de $\mathcal{H}$ i.e. $\Lambda f = \langle v, f\rangle$ pour un unique $v \in \mathcal{H}$. Dans ce cadre, le fait que Λ est continue est une hypothèse cruciale. À première vue, il n'y a pas d'hypothèse de continuité dans le théorème 1.19. En fait, une forme de continuité découle de la positivité. En effet celle-ci implique que, pour K un compact de X, il existe $C_K > 0$ telle que, pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $\operatorname{supp} f \subset K$, on a $|\Lambda f| \le C_K \|f\|_\infty$. D'abord il suffit de démontrer ceci pour f à valeur réelles, le cas général découlant de la linéarité et de la séparation en parties réelle et imaginaire. Ensuite, si on construit $g \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $g_{|K} = 1$ par le lemme d'Urysohn, alors, pour f à valeurs réelles, les fonctions $g(\|f\|_\infty \pm f)$ sont continues à support compact et positives. Comme Λ est linéaire et positive, on a

$$0 \le \|f\|_\infty \Lambda g \pm \Lambda(gf) = \|f\|_\infty \Lambda g \pm \Lambda f$$

car $gf = f$. Ainsi $|\Lambda f| \le C_K \|f\|_\infty$ pour $C_K = \Lambda g \ge 0$.

Preuve du théorème de représentation. Commençons par montrer l'unicité. En vertu de 3 et 4, les valeurs de μ sur les compacts la déterminent entièrement. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures vérifiant le théorème 1.19. Soit $K \subset X$ compact et $\varepsilon > 0$. Par 2 et 3, il existe un ouvert V tel que $K \subset V$ et $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$. Par le lemme d'Urysohn, il existe $K \prec f \prec V$. Ainsi

$$\mu_1(K) \le \int_X f d\mu_1 = \Lambda f = \int_X f d\mu_2 \le \mu_2(V) \le \mu_2(K) + \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mu_1(K) \le \mu_2(K)$. En échangeant les rôles de μ_1 et μ_2, on obtient $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ pour tout K compact, soit encore, $\mu_1 = \mu_2$ par les remarques faites en début de preuve.
Construction de $\mathcal{S}$ et μ. Pour V ouvert de X, on définit

$$\mu(V) := \sup_{f \prec V} \Lambda f. \tag{1.6}$$

On a clairement que si $V_1 \subset V_2$ ouverts, $\mu(V_1) \le \mu(V_2)$. Ainsi, si E est ouvert dans X, on a

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V);\ E \subset V,\ V \text{ ouvert}\}. \tag{1.7}$$

Pour tout $E \subset X$, on définit $\mu(E)$ par (1.7).

Remarque 1.20. On définit μ sur toutes les parties de X. Pour garantir que μ est σ-additive, on va se restreindre à une σ-algèbre plus petite.

Soit $\mathcal{S}_F$ l'ensemble des parties E de X telles que $\mu(E) < +\infty$ et

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K);\ K \subset E,\ K \text{ compact}\}. \tag{1.8}$$

Soit $\mathcal{S}$ la famille des $E \subset X$ telle que $E \cap K \in \mathcal{S}_F$ pour tout K compact de X.
Montrons que μ et $\mathcal{S}$ ont les propriétés annoncées. Clairement μ est monotone (i.e. si $A \subset B$, $\mu(A) \leq \mu(B)$) et si $\mu(E) = 0$ alors $E \in \mathcal{S}_F$ et $E \in \mathcal{S}$.
Remarquons que la positivité et la linéarité de Λ entraîne que si f et g dans $\mathcal{C}_c(X)$ vérifie $f \leq g$ alors $\Lambda f \leq \Lambda g$.

Lemme 1.21. *Soient $(E_i)_{i\geq 1}$ des parties de X. Alors* $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \leq \sum_{i\geq 1} \mu(E_i)$.

Démonstration. Si $\mu(E_i) = +\infty$ pour l'un des i, alors la conclusion du lemme 1.21 est trivialement vraie. On les supposera donc tous les $(\mu(E_i)_{i\geq 1}$ finis.
Montrons d'abord que $\mu(E_1 \cup E_2) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2)$ si E_1 et E_2 sont ouverts. Choisissons g telle que $g \prec E_1 \cup E_2$. Alors par le théorème 1.18, pour $i \in \{1, 2\}$, on construit $f_i \prec E_i$ et telles que $f_1 + f_2 = 1$ sur le support de g. Ainsi $g = gf_1 + gf_2$ et

$$\Lambda g = \Lambda(gf_1) + \Lambda(gf_2) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2).$$

En prenant le supremum de cette inégalité sur l'ensemble des $g \prec E_1 \cup E_2$, par (1.6), on obtient $\mu(E_1 \cup E_2) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par (1.7), pour tout $i \geq 1$, il existe V_i ouvert contenant E_i tel que $\mu(V_i) < \mu(E_i) + 2^{-i}\varepsilon$. Soit $V = \bigcup_{i\geq 1} V_i$. Choisissons $f \prec V$. Comme f est de support compact, il existe $n \geq 1$ tel que $f \prec V_1 \cup \cdots \cup V_n$.
En appliquant l'inégalité pour deux ouverts, on calcule

$$\Lambda f \leq \mu(V_1 \cup \cdots \cup V_n) \leq \mu(V_1) + \cdots + \mu(V_n) \leq \sum_{i\geq 1} \mu(E_i) + \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $f \prec V$ et comme $\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \subset V$, on a

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \leq \mu(V) \leq \sum_{i\geq 1} \mu(E_i) + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, ceci achève la preuve du lemme 1.21. □

Lemme 1.22. *Si K est compact alors $K \in \mathcal{S}_F$ et $\mu(K) = \inf_{K \prec f} \Lambda f$.*

Le point 2 du théorème 1.19 est une conséquence immédiate de ce lemme.

Démonstration. Pour $K \prec f$ et $0 < \alpha < 1$, on définit l'ouvert $V_\alpha := \{x \in X; f(x) > \alpha\}$. Ainsi, $K \subset V_\alpha$ et $\alpha\, g \leq f$ si $g \prec V_\alpha$. Donc,

$$\mu(K) \leq \mu(V_\alpha) = \sup_{g \prec V_\alpha} \Lambda g \leq \frac{1}{\alpha} \Lambda f.$$

En laissant tendre α vers 1^-, on obtient

$$\mu(K) \leq \Lambda f \text{ si } K \prec f. \tag{1.9}$$

Ainsi $\mu(K) < +\infty$. Comme (1.8) est clairement vraie pour $E = K$, on voit que $K \in \mathcal{S}_F$.
Par (1.7), pour $\varepsilon > 0$, il existe $V \supset K$ tel que $\mu(V) \leq \mu(K) + \varepsilon$. Par le lemme d'Urysohn (le théorème 1.17), on construit f telle que $K \prec f \prec V$. Ainsi $\Lambda f \leq \mu(V) \leq \mu(K) + \varepsilon$. En laissant ε tendre vers 0^+, on obtient $\inf_{K \prec f} \Lambda f \leq \mu(K)$ ce qui complète la preuve du lemme 1.22. □

Lemme 1.23. *$\mathcal{S}_F$ contient tous les ouverts sur lesquels μ est finie (i.e. on a (1.8) pour tout E ouvert tel que $\mu(E) < +\infty$).*

Démonstration. Soit E ouvert et $\alpha < \mu(E)$. Alors il existe $f \prec E$ tel que $\alpha < \Lambda f$. Pour tout U ouvert contenant K, le support de f, on a $f \prec U$ donc $\Lambda f \leq \mu(U)$. Ainsi $\Lambda f \leq \mu(K)$. On trouve ainsi un compact $K \subset E$ tel que $\alpha < \mu(K)$. Ceci nous donne (1.8). □

Lemme 1.24. *Supposons que $E = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$ où pour tout $i \geq 1$, $E_i \in \mathcal{S}_F$ et pour tout $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$. Alors*

$$\mu(E) = \sum_{i \geq 1} \mu(E_i). \tag{1.10}$$

Si, de plus, $\mu(E) < +\infty$, alors $E \in \mathcal{S}_F$.

Démonstration. Montrons d'abord que si K_1 et K_2 sont des compacts disjoints alors

$$\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2). \tag{1.11}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par le lemme d'Urysohn, il existe $f \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $f_{|K_1} = 1$, $f_{|K_2} = 0$ et $0 \leq f \leq 1$. Par le lemme 1.22, il existe $g \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $K_1 \cup K_2 \prec g$ et $\Lambda g \leq \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$. On remarque que $K_1 \prec fg$ et $K_2 \prec (1-f)g$. Comme Λ est linéaire, de (1.9), on tire

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) \leq \Lambda(fg) + \Lambda((1-f)g) = \Lambda g < \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, en se souvenant du Lemme 1.21, on a démontré (1.11).
Si $\mu(E) = +\infty$ alors l'égalité souhaitée découle du lemme 1.21. Soit $\varepsilon > 0$ et supposons que $\mu(E) < +\infty$ donc $E_i \in \mathcal{S}_F$ pour tout i. Pour tout i, il existe donc $H_i \subset E_i$ compact tel que

$$\mu(H_i) > \mu(E_i) - 2^{-i}\varepsilon. \tag{1.12}$$

Posant $K_n = H_1 \cup \cdots \cup H_n$, de (1.11), on tire

$$\mu(E) \geq \mu(K_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(H_i) > \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) - \varepsilon. \tag{1.13}$$

Ceci étant vrai pour tout n et tout $\varepsilon > 0$, en se souvenant du lemme 1.21, on obtient (1.10).
Montrons enfin que E vérifie (1.8) (et donc que $E \in \mathcal{S}_F$) si $\mu(E) < +\infty$. Pour $\varepsilon > 0$, par (1.10), il existe $N > 0$ tel que

$$\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(E_i) + \varepsilon. \tag{1.14}$$

Donc, par (1.13), on a $\mu(E) \leq \mu(K_N) + 2\varepsilon$ ce qui prouve que E vérifie (1.8). Ainsi $E \in \mathcal{S}_F$. □

Lemme 1.25. *Si $E \in \mathcal{S}_F$ et $\varepsilon > 0$, il existe K compact et V ouvert tel que $K \subset E \subset V$ et $\mu(V \setminus K) \leq \varepsilon$.*

Démonstration. D'après nos définitions, on sait qu'il existe $K \subset E$ et $V \supset E$ tels que $\mu(V) - \varepsilon/2 < \mu(E) < \mu(K) + \varepsilon/2$. Comme $V \setminus K$ est ouvert, il est dans $\mathcal{S}_F$ par le lemme 1.23. Alors le lemme 1.24 nous dit que

$$\mu(K) + \mu(V \setminus K) = \mu(V) < \mu(K) + \varepsilon.$$

Ceci démontre le lemme 1.25. □

Lemme 1.26. *Si $(A_1, A_2) \in \mathcal{S}_F \times \mathcal{S}_F$ alors $A_1 \setminus A_2$, $A_1 \cup A_2$ et $A_1 \cap A_2$ sont dans $\mathcal{S}_F$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$; par le lemme 1.25, il existe $(K_i)_{i\in\{1,2\}}$ compacts et $(V_i)_{i\in\{1,2\}}$ ouverts tel que $K_i \subset A_i \subset V_i$ et $\mu(V_i \setminus K_i) < \varepsilon$ pour $i \in \{1, 2\}$. Comme

$$A_1 \setminus A_2 \subset V_1 \setminus K_2 \subset (V_1 \setminus K_1) \cup (V_2 \setminus K_2) \cup (K_1 \setminus V_2),$$

le lemme 1.21 montre que

$$\mu(A_1 \setminus A_2) \leq 2\varepsilon + \mu(K_1 \setminus V_2).$$

Or $K_1 \setminus V_2$ est un compact de $A_1 \setminus A_2$, ceci prouve de $A_1 \setminus A_2$ satisfait (1.8) et, ainsi, $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{S}_F$.
Comme $A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup A_2$, on applique le lemme 1.24 pour obtenir que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{S}_F$. Enfin, comme $A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2)$, on a aussi que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{S}_F$. □

Lemme 1.27. *$\mathcal{S}$ est une σ-algèbre contenant tous les boréliens de X.*

Démonstration. Dans toute la preuve, K est un compact de X. Si $A \in \mathcal{S}$ alors $A^c \cap K = K \setminus (A \cap K)$; $A^c \cap K$ est donc élément de $\mathcal{S}_F$ comme différence de deux éléments de $\mathcal{S}_F$. Ainsi $A^c \in \mathcal{S}$.
Supposons que $A = \bigcup_{i\geq 0} A_i$ où $A_i \in \mathcal{S}$. Posons $B_1 = A_1 \cap K$ et

$$B_n = (A_n \cap K) \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1}) \quad \text{pour} \quad n \geq 2.$$

Alors, par le lemme 1.26, les $(B_i)_{i\geq 1}$ sont des éléments de $\mathcal{S}_F$ deux à deux disjoints et $A \cap K = \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i$. Ainsi $A \cap K \in \mathcal{S}_F$ par le lemme 1.25 et $A \in \mathcal{S}$.
Enfin, si F est fermé dans X alors $F \cap K$ est compact donc élément de $\mathcal{S}_F$. Donc $F \in \mathcal{S}$. En particulier $X \in \mathcal{S}$. Ainsi $\mathcal{S}$ est une σ-algèbre contenant tous les fermés de X ; elle contient donc la σ-algèbre engendrée par ces fermés c'est-à-dire la σ-algèbre des boréliens de X. Ceci achève la preuve du lemme 1.27. □

Lemme 1.28. *$\mathcal{S}_F$ est l'ensemble des éléments E de $\mathcal{S}$ tels que $\mu(E) < +\infty$.*

Ceci nous donne le point 4 du théorème 1.19.

Démonstration. Si $E \in \mathcal{S}_F$, alors les lemmes 1.22 et 1.26 montrent que $E \cap K \in \mathcal{S}_F$ pour tout K compact de X. Ainsi $E \in \mathcal{S}$.
Réciproquement, si $E \in \mathcal{S}$ tel que $\mu(E) < +\infty$ et si $\varepsilon > 0$, il existe $V \supset E$ ouvert tel que $\mu(V) < +\infty$; Par les lemmes 1.23 et 1.24, il existe $K \subset V$ compact tel que $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$. Comme $E \cap K \in \mathcal{S}_F$, il existe $H \subset E \cap K$ compact tel que

$$\mu(E \cap K) < \mu(H) + \varepsilon.$$

De l'inclusion $E \subset (E \cap K) \cup (V \setminus K)$, on tire

$$\mu(E) \leq \mu(E \cap K) + \mu(V \setminus K) \leq \mu(H) + 2\varepsilon.$$

Ainsi $E \in \mathcal{S}_F$. □

Comme conséquence des lemmes 1.22, 1.24 et 1.27, on obtient le

Lemme 1.29. *μ définit une mesure sur $\mathcal{S}$.*

Enfin, pour achever la démonstration du théorème de représentation de Riesz, il nous suffit de démontrer le

Lemme 1.30. *Pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$, on a $\Lambda f = \int_X f d\mu$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer l'égalité pour f à valeurs réelles (par linéarité des deux membres de l'égalité). En fait, en échangeant f avec $-f$, on voit qu'il suffit de démontrer, pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$ à valeurs réelles, l'inégalité

$$\Lambda f \leq \int_X f d\mu. \tag{1.15}$$

Soit K le support de $f \in \mathcal{C}_c(X)$ à valeurs réelles. Soit $[a, b]$ un intervalle contenant l'image de f (qui est compacte car $f \in \mathcal{C}_c(X)$). Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$ tels que $\max_{1 \leq i \leq n}(y_i - y_{i-1}) \leq \varepsilon$ et

$$y_0 < a < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = b. \tag{1.16}$$

Pour $1 \leq i \leq n$, posons

$$E_i = \{x;\ y_{i-1} < f(x) \leq y_i\} \cap K. \tag{1.17}$$

Étant continue, f est Borel mesurable ; les ensembles $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont donc des boréliens disjoints dont la réunion vaut K. Pour $1 \leq i \leq n$, on peut trouver $V_i \supset E_i$ ouverts tels que $f_{|V_i} \leq y_i + \varepsilon$ et

$$\mu(V_i) \leq \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}. \tag{1.18}$$

Par le théorème 1.18, on construit, pour $1 \leq i \leq n$, $h_i \prec V_i$ telles que $h_1 + \cdots + h_n = 1$ sur K. Ainsi $f = h_1 f + \cdots + h_n f$ et le lemme 1.22 nous dit que

$$\mu(K) \leq \Lambda\left(\sum_{i=1}^n h_i\right) = \sum_{i=1}^n \Lambda h_i.$$

Comme $h_i f \leq (y_i + \varepsilon) h_i$ et $y_i - \varepsilon \leq f$ sur E_i, on calcule

$$\begin{aligned}
\Lambda f = \sum_{i=1}^n \Lambda(h_i f) &\leq \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)\Lambda h_i = \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon)\Lambda h_i - |a| \sum_{i=1}^n \Lambda h_i \\
&\leq \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon)(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}) - |a| \sum_{i=1}^n \Lambda h_i = \sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon)\mu(E_i) + 2\varepsilon\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) \\
&\leq \int_X f\, d\mu + \varepsilon(2\mu(K) + |a| + b + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, la preuve de (1.15) est complète. □

Ceci achève la preuve du théorème 1.19. □

1.3 Mesures de Borel positives

Définition 1.31.

1. Une mesure μ définie sur la σ-algèbre des boréliens $\mathcal{B}$ d'un espace de Hausdorff localement compact, disons, X est appelée une *mesure borélienne* sur X.
2. On dit qu'elle est intérieurement régulière si $\forall E \in \mathcal{B}$, $\mu(E) = \sup\{\mu(K);\ K \subset E,\ K \text{ compact}\}$.
3. On dit qu'elle est extérieurement régulière si $\forall E \in \mathcal{B}$, $\mu(E) = \inf\{\mu(V);\ E \subset V,\ V \text{ ouvert}\}$.
4. On dit qu'elle est régulière si elle est intérieurement régulière et extérieurement régulière

La mesure construite dans le Théorème 1.19 n'est pas forcément régulière dans le sens défini ci-dessus : elle est extérieurement régulière mais la régularité intérieure n'est vraie que sur des ensembles spéciaux. Cela ne peut être amélioré sans hypothèse supplémentaire (voir [6, Chapitre 2, exercice 17]). On va maintenant voir qu'avec un léger renforcement des hypothèses, ce problème disparaît.

Définition 1.32.

1. Un sous-ensemble E d'un espace topologique est dit σ-compact s'il est la réunion dénombrable de compacts.
2. Un sous-ensemble E d'un espace topologique est appelé F_σ s'il est réunion dénombrable de fermés.
3. Un sous-ensemble E d'un espace topologique est appelé G_δ s'il est intersection dénombrable d'ouverts.
4. Un sous-ensemble E d'un espace mesuré (X, μ) est dit σ-fini s'il est la réunion dénombrable d'ensembles de mesure finie.

Exercice 1.33. Montrer qu'un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) de dimension finie muni d'une norme est σ-compact.

Théorème 1.34. *Supposons que X est un espace de Hausdorff localement compact, σ-compact. Supposons que $\mathcal{S}$ et μ sont respectivement une σ-algèbre sur X et une mesure positive sur cette σ-algèbre satisfaisant aux propriétés (2)-(5) du Théorème 1.19.*
Alors $\mathcal{S}$ et μ vérifient

1. *pour tout $E \in \mathcal{S}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F, fermé de X, et V, ouvert de X, tels que $F \subset E \subset V$ et $\mu(V \setminus F) < \varepsilon$;*
2. *la mesure μ est une mesure de Borel régulière ;*
3. *si $E \in \mathcal{S}$, il existe des ensembles A et B tels que A est un F_σ, B un G_δ, $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$.*

Démonstration. On sait que $X = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup \cdots$ où $(K_i)_{i \geq 1}$ sont des compacts. Si $E \in \mathcal{S}$ et $\varepsilon > 0$ alors, pour $n \geq 1$, $\mu(K_n \cap E) < +\infty$ et il existe V_n ouvert tel que $V_n \supset K_n \cap E$ et

$$\mu(V_n \setminus (K_n \cap E)) \leq 2^{-n-1}\varepsilon.$$

Si $V = \bigcup_{n \geq 1} V_n$ alors $V \setminus E \subset \bigcup_{n \geq 1} (V_n \setminus (K_n \cap E))$ ainsi

$$\mu(V \setminus E) < \varepsilon/2. \tag{1.19}$$

De même pour E^c, on peut trouver un ouvert $W \supset E^c$ tel que $\mu(W \setminus E^c) < \varepsilon/2$. On pose alors $F = W^c$. On a $F \subset E$ et $E \setminus F = W \setminus E^c$. Ceci démontre le point 1.
Tout fermé de X est lui aussi σ-compact (car l'intersection d'un fermé et d'un compact est compact dans un espace de Hausdorff). Ainsi le point 1 implique la régularité intérieure de μ (la régularité extérieure ayant été supposée vraie) ; on a donc démontré le point 2.
Pour $j \geq 1$, on peut choisir $\varepsilon = 1/j$ dans (1.19) ; on obtient ainsi, pour $j \leq 1$, F_j fermé et V_j ouvert tels que $F_j \subset E \subset V_j$ et $\mu(V_j \setminus F_j) < 1/j$. Posons $A = \cup_j F_j$ et $B = \cap_j V_j$. Alors A est un F_σ, B un G_δ et $\mu(B \setminus A) = 0$ car $\mu(B \setminus A) \leq \mu(V_j \setminus F_j) < 1/j$ ceci pour tout $j \geq 1$. Ceci démontre le point 3 et achève la preuve du théorème 1.34. □

On va utiliser ce résultat pour obtenir le

Théorème 1.35. *Soit un espace de Hausdorff localement compact dans lequel tout ouvert est σ-compact. Sur cet espace, toute mesure borélienne positive vérifiant que tout compact est de mesure finie est régulière.*

Exercice 1.36. Soit X un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) de dimension finie muni d'une norme. Montrer que tout ouvert de X est σ-compact.

Démonstration. Pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$, on peut définir $\Lambda f := \int_X f(x)d\mu(x)$. Comme $\mu(K)$ est finie pour K compact, l'intégrale est bien convergente et on a $|\Lambda f| \leq \mu(\operatorname{supp} f)\,\|f\|_\infty$. Par linéarité de l'intégrale, Λ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_c(X)$; comme μ est positive, Λ est positive. Par le théorème 1.19, on peut lui associer une mesure borélienne λ qui vérifie alors

$$\int_X f d\lambda = \Lambda f = \int_X f d\mu. \tag{1.20}$$

Pour démontrer le théorème 1.35, il suffit de montrer que λ et μ coïncident.
Soit V un ouvert de X. Alors par hypothèse, il existe $(K_j)_{j\geq 1}$ des compacts de X tels que $V = \cup K_j$. Par le lemme d'Urysohn (le théorème 1.17), pour $j \geq 1$, on peut trouver $f_j \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $K_j \prec f_j \prec V$. Soit $g_n = \max(f_1, \cdots, f_n)$. On a $g_n \in \mathcal{C}_c(X)$ et $g_n(x) \nearrow \mathbf{1}_V(x)$ en tout point $x \in X$. Ainsi (1.20) et le théorème de convergence monotone impliquent

$$\lambda(V) = \lim_{n\to+\infty} \int_X g_n d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_X g_n d\mu = \mu(V). \tag{1.21}$$

Soit E un borélien de X et $\varepsilon > 0$. En appliquant le théorème 1.34 à μ, on construit F fermé et V ouvert tels que $F \subset E \subset V$ et $\mu(V \setminus F) < \varepsilon$. Ainsi $\mu(V) \leq \mu(F) + \varepsilon \leq \mu(E) + \varepsilon$.
Or $V \setminus F$ est ouvert ; donc, par (1.21), on a $\lambda(V \setminus F) < \varepsilon$ c'est-à-dire $\lambda(V) \leq \lambda(E) + \varepsilon$. Par conséquent,

$$\lambda(E) \leq \lambda(V) = \mu(V) \leq \mu(E) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \mu(E) \leq \mu(V) = \lambda(V) \leq \lambda(E) + \varepsilon$$

ainsi $|\lambda(E) - \mu(E)| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $\lambda(E) = \mu(E)$. Ceci prouve le théorème 1.35. □

1.3.1 La mesure de Lebesgue

Nous allons maintenant construire la mesure de Lebesgue qui est un cas particulier des mesures positives construites dans le chapitre précédent.

Définition 1.37.
1. On appelle *boîte* un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ de la forme $[a_1, b_1[\times[a_2, b_2[\times\cdots\times[a_d, b_d[$ (où $a_i \leq b_i$ pour $1 \leq i \leq d$).
2. Le point $(a_1, \cdots, a_d)$ est appelé le *coin* de la boîte.
3. Le *volume* de la boîte $B := [a_1, b_1[\times[a_2, b_2[\times \cdots \times [a_d, b_d[$ est le réel positif ou nul $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdot (b_d - a_d)$; il est noté $\mathrm{Vol}(B)$.
4. Pour $\delta > 0$ et $(a_1, \cdots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, la *$\delta$-boîte de coin* $(a_1, \cdots, a_d)$ est la boîte $\underset{1\leq i\leq d}{\times}[a_i, a_i + \delta[$.

On construit la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ par le

Théorème 1.38. *Il existe une unique mesure complète λ_d définie sur une σ-algèbre $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$\lambda_d(B) = Vol(B)$ pour toute boîte B ;*
2. *la σ-algèbre $\mathcal{S}$ contient tous les boréliens ; plus précisément, $E \in \mathcal{S}$ si et seulement s'il existe des ensembles A et B tels que A est un F_σ, B un G_δ, $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$; de plus, λ_d est régulière ;*
3. *λ_d est invariante par translation i.e. si $E \in \mathcal{S}$ et $x \in \mathbb{R}^d$, alors $x + E \in \mathcal{S}$ et $\lambda_d(x + E) = \lambda_d(E)$.*

De plus, λ_d vérifie

4. *si μ est une mesure borélienne positive sur $\mathbb{R}^d$, finie sur tout compact qui, de plus, est invariante par translation, alors il existe $c \geq 0$ telle que $\mu = c \cdot \lambda_d$;*

5. *pour $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application linéaire et $E \in \mathcal{S}$, on a $T(E) \in \mathcal{S}$ et $\lambda(T(E)) = |det(T)|\,\lambda(E)$ (où $det(T)$ désigne le déterminant de l'application linéaire T).*

Démonstration. Commençons par construire un analogue multidimensionnel des sommes de Riemann. Pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{P}_n = 2^{-n}\mathbb{Z}^d$ i.e. $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des points dont les coordonnées sont toutes des multiples entiers relatifs de 2^{-n}. Soit Ω_n la famille des 2^{-n}-boîtes dont les coins se trouvent en un point de $\mathcal{P}_n$. On vérifie facilement les trois propriétés suivantes de Ω_n :

1. pour n fixé, chaque point de $\mathbb{R}^d$ appartient à exactement une boîte de Ω_n ;
2. si $B \in \Omega_n$ et $B' \in \Omega_r$ et $r < n$ alors soit $B \subset B'$ soit $B \cap B' = \emptyset$;
3. si $B \in \Omega_r$ alors $\mathrm{vol}(B) = 2^{-rd}$ et si de plus $n > r$, B contient exactement $2^{(n-r)d}$ points de $\mathcal{P}_n$.

De plus les familles $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ vérifient

Lemme 1.39. *Tout ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ est une union disjointe dénombrable de boîtes dans $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots$.*

Démonstration. Soit V un ouvert. Clairement V est la réunion des boîtes contenues dans V et appartenant à l'un des Ω_n. De ces boîtes, on peut séparer celles appartenant à Ω_1 de celles appartenant à $\Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \cdots$; par la propriété 2, on peut choisir ces dernières boîtes de façon qu'elle ne rencontrent aucune des boîtes dans Ω_1. Puis, on considère les boîtes appartenant à Ω_2 que l'on sépare de celles appartenant à $\Omega_3 \cup \Omega_4 \cup \cdots$; on peut encore appliquer la propriété 2 à ces dernières boîtes. En continuant cette procédure on obtient la décomposition souhaitée pour l'ouvert V. □

Pour $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, on définit

$$\Lambda_n f = 2^{-nd} \sum_{x\in\mathcal{P}_n} f(x). \tag{1.22}$$

où $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des coins des cubes dans Ω_n. Comme f est à support compact, la somme dans (1.22) ne contient qu'un nombre fini de termes. Λ_n est linéaire et positive.

Montrons que $\Lambda_n f$ converge vers, disons, Λf qui sera donc linéaire et positive. On peut sans perte de généralité supposer que f est à valeurs réelles. Pour $x \in \mathcal{P}_n$, soit B_x^n l'unique boîte de Ω_n dont le coin est x. On définit

$$\Lambda_n^+ f = 2^{-nd} \sum_{x\in\mathcal{P}_n} \sup_{y\in B_x^n} f(y) \quad \text{et} \quad \Lambda_n^- f = 2^{-nd} \sum_{x\in\mathcal{P}_n} \inf_{y\in B_x^n} f(y).$$

Comme f est à support compact, ces sommes sont finies. Clairement, par la propriété 2 des boîtes de Ω_n, on a

$$\Lambda_n^- f \leq \Lambda_{n+1}^- f \quad \text{et} \quad \Lambda_{n+1}^+ f \leq \Lambda_n^+ f \quad \text{et} \quad \Lambda_n^- f \leq \Lambda_n f \leq \Lambda_n^+ f$$

Comme f est uniformément continue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que, si $n \geq N$

$$\forall C \in \Omega_n, \quad 0 \leq \sup_C f - \inf_C f \leq \varepsilon$$

Si f est à support dans $[-k, k[^d$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$), on estime donc, pour $n \geq N$,

$$\Lambda_n^+ f - \Lambda_n^- f = 2^{-nd} \sum_{\substack{C\in\Omega_n \\ C\cap[-k,k[^d\neq\emptyset}} (\sup_C f - \inf_C f) \leq 2^{-nd}(2k)^d 2^{nd}\varepsilon = (2k)^d\varepsilon.$$

Les suites $(\Lambda_n^- f)_n$ et $(\Lambda_n^+ f)_n$ sont donc adjacentes. Ainsi la suite $(\Lambda_n f)_n$ converge vers une limite que l'on note Λf. Celle-ci est bien sûr linéaire et positive.

Remarque 1.40. La somme $\Lambda_n f$ est une somme de Riemann pour f. Nous venons donc juste de construire l'intégrale de Riemann d'une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}^d$.

Le théorème 1.19 nous donne alors une σ-algèbre $\mathcal{S}$ et sur $\mathcal{S}$, une mesure λ_d représentant Λ. Vérifions qu'elle a les propriétés annoncées dans le théorème 1.38. Cette mesure est complète et le théorème 1.35 nous donne le point 2 du théorème 1.38.
Montrons 1. Soit $B = \underset{1\leq i\leq d}{\times}[a_i, b_i[$ une boîte et E_n la réunion des boîtes de Ω_n dont l'adhérence est contenue dans l'intérieur de B. Soit f_n telle que $\overline{E_n} \prec f_n \prec \overset{\circ}{B}$. On pose $g_n = max(f_1, \cdots, f_n)$. On a alors que $g_n \nearrow \mathbf{1}_{\overset{\circ}{B}}$ ponctuellement quand $n \to +\infty$. Par la construction de Λ, pour n tel que $\min_{1\leq i\leq s}(b_i - a_i) > 2^{1-n}$, on a

$$\prod_{j=1}^{d}(b_i - a_i - 2^{-n+1}) \leq \Lambda f_n \leq \Lambda g_n \leq \mathrm{vol}(B)$$

Ainsi $\liminf_{n\to+\infty} \Lambda f_n \geq$vol$(B)$ et, par convergence croissante, $\Lambda g_n = \int_X g_n d\lambda_d \nearrow \lambda_d(\overset{\circ}{B})$ par convergence croissante. Ainsi $\lambda_d(\overset{\circ}{B}) =vol(B)$. Donc $\lambda_d(B) \geq \lambda_d(\overset{\circ}{B}) =vol(B)$. De plus, pour $\varepsilon > 0$

$$\lambda_d(B) \leq \lambda_d(\overset{\circ}{B}+]-\varepsilon,\varepsilon[^d) = \lambda_d\left(\overset{\circ}{\overline{B+[-\varepsilon,\varepsilon[^d}}\right) = \mathrm{vol}\left(B+[-\varepsilon,\varepsilon[^d\right) = \mathrm{vol}(B) + O(\varepsilon). \tag{1.23}$$

En laissant $\varepsilon \to 0^+$, on obtient le point 1.
Pour prouver 3, 4 et 5, on observe que, si λ est une mesure de Borel positive sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\lambda(E) = \lambda_d(E)$ pour toute boîte E alors cette égalité reste vraie pour tout E ouvert de $\mathbb{R}^d$ (par le lemme 1.39) et, donc, pour tout E borélien comme λ et λ_d sont régulières (par le théorème 1.35).
Pour montrer 3, on fixe $x \in \mathbb{R}^d$ et on définit $\lambda_x(E) := \lambda_d(E + x)$ pour E borélien. Clairement, λ_x est une mesure borélienne positive. Par le point 1, $\lambda_x(E) = \lambda_d(E)$ pour toute boîte, donc, pour tout borélien E, on a $\lambda_d(E) = \lambda_d(E+x)$ (d'abord par le Lemme 1.39 pour les ouverts puis par régularité extérieure). Enfin, par le point 2, cette égalité reste vraie sur $\mathcal{S}$.
Supposons que λ vérifie les hypothèses de 4. Pour $n \geq 1$, $[0,1[^d$ se partitionne de la façon suivante $[0,1[^d= \bigcup_{x\in\mathcal{P}_n\cap[0,1[^d} x + [0, 2^{-n}[^d$ où la réunion est disjointe. On en déduit que

$$2^{nd}\lambda([0,2^{-n}[^d) = \lambda([0,1[^d) = c\,\lambda_d([0,1[^d) = c2^{nd}\lambda_d([0,2^{-n}[^d)$$

où $c := \lambda([0,1[^d)$. Donc, par invariance par translation, pour tout $Q \in \Omega_n$, $\lambda(Q) = c\,\lambda_d(Q)$. Le lemme 1.39 et la σ-additivité impliquent alors que pour tout ouvert E de $\mathbb{R}^d$, on a $\lambda(E) = c\,\lambda_d(E)$. Ceci prouve 4.
Démontrons 5. Commençons par le démontrer pour $T = U$ où U est une isométrie i.e. $U\,{}^tU ={}^t U\,U = 1$. L'application $E \mapsto \lambda_d(U(E))$ définit une mesure borélienne qui satisfait à toutes les conditions du point 4. Il existe donc une constante $c(U)$ telle que $\lambda_d(U(E)) = c(U)\lambda_d(E)$. Pour $E = B_2(0,1)$ la boule euclidienne centrée en 0 de rayon 1, on a bien sûr $U(E) = E$. Ainsi $c(U) = 1$.
Soit maintenant T linéaire sur $\mathbb{R}^d$. Si T n'est pas bijective, alors l'image de T est contenue dans un hyperplan de $\mathbb{R}^d$. Il existe donc une isométrie U telle que $E := U(\mathrm{Im}\,T) \subset \{x = x(_1, \cdots, x_d);\ x_1 = 0\}$. On a donc pour tout $\varepsilon > 0$,

$$E \subset \bigcup_{n\geq 1} P_{n,\varepsilon} \quad \text{où} \quad P_{n,\varepsilon} = [-\varepsilon 2^{-d(n+1)}, \varepsilon 2^{-d(n+1)}[\times[-2^n, 2^n[^{d-1}$$

Ainsi $\operatorname{Im} T \subset A_\varepsilon = \bigcup_{n\geq 1} {}^tU(P_{n,\varepsilon})$. Clairement $A_\varepsilon \subset A_{\varepsilon'}$ si $\varepsilon \leq \varepsilon'$. De plus, par ce qui vient d'être montré pour les isométries, on a

$$\lambda_d(A_\varepsilon) \leq \sum_{n\geq 1} \lambda_d(P_{n,\varepsilon}) \leq \varepsilon \sum_{n\geq 1} 2^{-d(n+1)+d+n(d-1)} = \varepsilon.$$

Donc $\operatorname{Im} T$ est contenue dans $\bigcap_{n\geq 1} A_{1/n}$ qui est de mesure nulle. Comme λ_d est complète, $\operatorname{Im} T$ est mesurable et $\lambda_d(\operatorname{Im} T) = 0$. On obtient donc 5 quand $\det(T) = 0$.
Supposons maintenant que $\det(T) \neq 0$. Par le raisonnement fait pour une isométrie, on sait que $\lambda_d(T(E)) = c(T)\lambda_d(E)$ pour tout borélien. On en déduit que si T et T' inversible alors $c(T\,T') = c(T)c(T')$. D'autre part, T peut se décomposer en un produit de matrices $T = T_1\,T_2 \cdots T_m$ où chacune des matrices T_i est de l'une des trois types suivants (ici $\{e_1, e_2, \cdots, e_d\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^d$) :

1. $\{Te_1, Te_2, \cdots, Te_d\}$ est une permutation de $\{e_1, e_2, \cdots, e_d\}$; dans ce cas, si $C = [0,1[^d$, on voit que $T(C) = C$ et donc $c(T) = 1$; clairement, on a $\det T = 1$; donc $c(T) = |\det T|$;
2. $Te_1 = \alpha e_1$ pour $\alpha \neq 0$ et $Te_j = e_j$ si $2 \leq j \leq d$; dans ce cas, on voit que $T(C) = [0,\alpha[\times[0,1[^{d-1}$ si $\alpha > 0$ et $T(C) =]\alpha, 0] \times [0,1[^{d-1}$ si $\alpha < 0$; ainsi $c(T) = |\alpha|$; clairement, on a $\det T = \alpha$; donc $c(T) = |\det T|$;
3. $Te_1 = e_1 + e_2$ pour $\alpha \neq 0$ et $Te_j = e_j$ si $2 \leq j \leq d$; dans ce cas, on voit que $T(C) = \{(x_1, x_2);\ x_1 \leq x_2 \leq x_1 + 1,\ x_1 \in [0,1[\} \times [0,1[^{d-2}\}$ donc $T = T_1 \cup T_2$ où $T_1 = T \cap \{x_2 < 1\}$ et $T_2 = T \cap \{x_2 \geq 1\}$; on a $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ et si on pose $S_2 = T_2 - e_2$, on a $T_1 \cap S_2 = \emptyset$ et $T_1 \cup S_2 = C$; donc $\lambda_d(T(C)) = \lambda_d(C)$ c'est-à-dire $c(T) = 1$; clairement, on a $\det T = 1$; donc $c(T) = |\det T|$.

Comme $T = T_1\,T_2 \cdots T_m$, on calcule

$$c(T) = c(T_1)\,c(T_2) \cdots c(T_m) = |\det T_1|\,|\det T_2| \cdot |\det T_m| = |\det T|.$$

Ceci achève la preuve du théorème 1.38. □

1.3.2 Continuité et mesurabilité

Si la topologie et la σ-algèbre auxquelles réfèrent les deux termes du titre de la section ne sont pas reliées, il n'y a bien sûr pas lieu d'espérer une relation entre ces notions.
Sur un espace de Hausdorff localement compact, il en va tout autrement si la mesure μ et $\mathcal{S}$, la σ-algèbre associée vérifient les propriétés (2)-(5) du théorème 1.19. Nous nous placerons désormais, et pour toute cette section, dans ce cadre.

Théorème 1.41. *(Théorème de Lusin) Soient $f : X \to \mathbb{C}$ mesurable et $A \in \mathcal{S}$ tels que $\mu(A) < +\infty$ et $f(x) = 0$ si $x \notin A$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $g \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que*

$$\mu(\{x \in X;\ f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon. \tag{1.24}$$

On peut de plus choisir g de façon que

$$\sup_{x\in X} |g(x)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)|. \tag{1.25}$$

Démonstration. Soit $f \geq 0$ mesurable positive. On construit une suite croissante de fonctions mesurables simples (i.e. de la forme $\sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}$ où $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $E_i \in \mathcal{S}$), disons, $(s_n)_{n\geq 1}$ telle que $s_n \to f$ simplement sur X. Pour cela, pour $n \geq 1$, on définit

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 2^{-n}k_n \text{ où } k_n \text{ est l'unique entier tel que } 2^{-n}k_n \leq t < 2^{-n}(k_n+1) \text{ quand } t \in [0, n[, \\ 0 \text{ quand } t \geq n. \end{cases}$$

On vérifie que chaque fonction $\varphi_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est borélienne, que

$$0 \leq \inf_{t\in[0,n]} (t - \varphi_n(t)) \leq \sup_{t\in[0,n]} (t - \varphi_n(t)) \leq 2^{-n} \tag{1.26}$$

et si $n \geq m$, on a $\varphi_m \leq \varphi_n$. On pose alors $s_n = \varphi_n \circ f$; la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ satisfait aux conditions requises.

Remarque 1.42. Notons que (1.26) montre que si f est bornée alors la convergence de $(s_n)_n$ vers f est uniforme.

Pour démontrer le théorème, commençons par supposer que $0 \leq f \leq 1$. On pose alors $t_1 = s_1$ et $t_n = s_n - s_{n-1}$ si $n \geq 2$. Par construction des $(s_n)_n$, $2^n t_n$ est l'indicatrice d'un ensemble T_n et

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} t_n(x), \quad \forall x \in X. \tag{1.27}$$

Supposons de plus que A est compact. Soit $\varepsilon > 0$ et V un ouvert relativement compact contenant A. Par le théorème 1.17, on peut trouver des compacts $(K_n)_{n\geq 1}$ et des ouverts $(V_n)_{n\geq 1}$ tels que, pour $n \geq 1$, $K_n \subset T_n \subset V_n \subset V$ et $\mu((V_n \setminus K_n) < 2^{-n}\varepsilon$. Par le lemme d'Urysohn, pour $n \geq 1$, on construit une fonction g_n telle que $K_n \prec g_n \prec V_n$. Posons

$$g(x) = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} g_n(x), \quad \forall x \in X. \tag{1.28}$$

La série converge uniformément sur X et définit donc une fonction continue dont le support est compact (car contenu dans $\overline{V}$). Comme $2^{-n}g_n(x) = t_n(x)$ pour $x \notin (V_n \setminus K_n)$, par (1.27) et (1.28) on sait que f et g coïncide sauf au plus sur $\bigcup_{n\geq 1}(V_n \setminus K_n)$. Or on a $\mu(\bigcup_{n\geq 1}(V_n \setminus K_n)) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(V_n \setminus K_n) \leq \varepsilon$. On a ainsi démontré le théorème 1.41 si f est à valeurs dans $[0, 1]$ et A compact.
Supposons maintenant que A est compact et que f est bornée. On se ramène au cas où f est à valeurs réelles en passant aux parties réelle et imaginaire de f. Pour f à valeurs réelles, bornée à support compact, soit M son supremum supposé non nul. Prenons $A \prec g$. Alors on applique le résultat déjà démontré à $\tilde{f} := (f + M\,g)/2M$ pour obtenir celui annoncé pour f.
Si f est bornée mais que A vérifie seulement $\mu(A) < +\infty$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \subset A$ compact tel que $\mu(A \setminus K) \leq \varepsilon/2$. Puis, on applique le résultat déjà obtenu pour f et K. Ceci démontre donc le premier énoncé du théorème 1.41 quand f est bornée.
Pour obtenir le second énoncé dans ce cas, il suffit de modifier g de la façon suivante. Pour $z \in \mathbb{C}$, posons $\varphi(z) = z$ si $|z| \leq R := \sup_{x\in X} |f(x)|$ et $\varphi(z) = R\,z\,|z|^{-1}$ si $|z| \geq R$. Alors φ est une application continue de $\mathbb{C}$ dans le disque centré en 0 de rayon R. Si g satisfait (1.24) alors $g_1 = \varphi \circ g$ satisfait (1.24) et (1.25).
Enfin, si f n'est pas bornée, on a $\cap_{n\geq 1}\{x;\ |f(x)| > n\} = \emptyset$. Donc, comme $\mu(\{x \in A;\ |f(x)| > 0\}) \leq \mu(A) < +\infty$, on a $\mu(\{x \in A;\ |f(x)| > n\}) \searrow 0^+$ quand $n \to +\infty$ par convergence croissante. On peut alors appliquer le résultat déjà démontré à $f \cdot \mathbf{1}_{\{x;\ |f(x)|\leq n\}}$ (qui est bornée) pour n suffisamment grand pour que $\mu(\{x;\ |f(x)| > n\}) < \varepsilon/2$ et conclure.
Ceci achève la preuve du théorème 1.41. $\square$

Corollaire 1.43. *Sous les hypothèse du théorème 1.41, si* $\sup_{x\in X} |f(x)| \leq 1$ *alors il existe une suite* $(g_n)_{n\geq 1}$ *dans* $\mathcal{C}_c(X)$ *tels que, pour* $n \geq 1$, $\sup_{x\in X} |g_n(x)| \leq 1$ *et, pour* μ*-presque tout* x, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$.

Démonstration. Par le théorème de Lusin, pour chaque $n \geq 1$, on peut trouver $g_n \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $|g_n(x)| \leq 1$ sur X et tel que $\mu(\{x;\ f(x) \neq g_n(x)\}) \leq 2^{-n}$. Comme $\sum_{n\geq 1} \mu(\{x;\ f(x) \neq g_n(x)\}) < +\infty$, on a

$$\mu(\{x; \#\{n; f(x) \neq g_n(x)\} = +\infty\}) = \mu\left(\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq m}\{x;\ f(x) \neq g_n(x)\}\right) = 0.$$

Ainsi, pour presque tout x, à partir d'un certain rang, la suite $(g_n(x))_n$ est constante et égale à $f(x)$. Ceci achève la preuve du corollaire. □

Théorème 1.44. *(Théorème de Vitali-Carathéodory) Soit $f \in L^1(\mu)$, f à valeurs réelles. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe deux fonctions u et v telles que $u \leq f \leq v$, u est semi-continue supérieurement, v est semi-continue inférieurement et*

$$\int_X (v-u)d\mu < \varepsilon. \tag{1.29}$$

Démonstration. Supposons d'abord que $f \geq 0$. En reprenant la construction des suites $(s_n)_n$ et $(t_n)_n$ faite au début de la preuve du théorème 1.41 (voir en particulier, (1.27)), on voit que

$$f = \sum_{n\geq 1} c_n \mathbf{1}_{E_n} \tag{1.30}$$

où $(E_n)_n$ sont des boréliens et les $(c_n)_n$ sont strictement positifs.
Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\int_X f d\mu = \sum_{n\geq 1} c_n \mu(E_n) \tag{1.31}$$

ainsi comme f est intégrable, la série du membre de droite de (1.31) converge. Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème 1.17, on construit des compacts $(K_n)_{n\geq 1}$ et des ouverts $(V_n)_{n\geq 1}$ tels que, pour $i \geq 1$, $K_n \subset E_n \subset V_n$ et

$$c_n \mu((V_n \setminus K_n) < 2^{-n-1}\varepsilon. \tag{1.32}$$

Choisissons N tel que

$$\sum_{i\geq N+1} c_n \mu(E_n) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.33}$$

et posons

$$v = \sum_{n\geq 1} c_n \mathbf{1}_{V_n} \quad \text{et} \quad u = \sum_{n=1}^{N} c_n \mathbf{1}_{K_n}. \tag{1.34}$$

Alors, par les remarques suivant la définition 1.12, u est semi-continue supérieurement et v est semi-continue inférieurement. La définition des $(K_n)_n$ et $(V_n)_n$ et (1.30) impliquent que $u \leq f \leq v$. Enfin, on calcule

$$v - u = \sum_{n=1}^{N} c_n(\mathbf{1}_{V_n} - \mathbf{1}_{K_n}) + \sum_{n\geq N+1} c_n \mathbf{1}_{V_n} \leq \sum_{n\geq 1} c_n(\mathbf{1}_{V_n\setminus K_n}) + \sum_{n\geq N+1} c_n \mathbf{1}_{E_n}. \tag{1.35}$$

Ainsi (1.32) et (1.33) impliquent (1.29).
Dans le cas général, on décompose $f = f^+ - f^-$ où $(f^\pm)$ sont positives mesurables. On construit $u^\pm$ et $v^\pm$ comme ci-dessus pour $f^\pm$ et on pose $u = u^+ - v^-$ et $v = v^+ - u^-$. En se souvenant de l'exercice 1.13, on voit que u et v ont les propriétés requises. Ceci prouve le théorème 1.44. □

Exercice 1.45. Montrer qu'on ne peut pas en général prendre u et v continues.

1.4 Espaces L^p.

Dans toute cette section [1], $(X, \mathcal{S}, \mu)$ désigne un espace mesuré quelconque. Lorsque des hypothèses supplémentaires seront nécessaires, elles seront précisées.

1.4.1 Inégalités de Hölder

Proposition 1.46 (Inégalité de Hölder)**.** *Soit $f, g : X \to [0, +\infty]$ deux fonctions mesurables positives et $t \in]0,1[$. Alors on a*

$$\int f^{1-t} g^t \, d\mu \leq \Big(\int f \, d\mu \Big)^{1-t} \Big(\int g \, d\mu \Big)^t.$$

De plus, si $0 < \int f \, d\mu, \int g \, d\mu < +\infty$, il y a égalité si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que $g = \lambda f$ μ-pp.

Remarque 1.47. Vous noterez que l'inégalité est bien homogène en f et g.

Remarque 1.48. Pour une fonction positive f et $r > 0$ on a

$$\int f^r \, d\mu > 0 \Longleftrightarrow \mu(\{f \neq 0\}) = \mu(\{x \in X \ ; \ f(x) \neq 0\}) \neq 0,$$

ce qui veut dire qu'il existe $A \in \mathcal{S}$, avec $\mu(A) \neq 0$ tel que $f > 0$ sur A. On écrit aussi "$f \not\equiv 0$ μ-pp" qu'il faut comprendre comme "f n'est pas égale à une fonction nulle μ-pp".

Démonstration. D'abord, on remarque que l'inégalité devient une égalité lorsque $f = g$.
Si $\int f \, d\mu = +\infty$, il n'y a rien à montrer. De même, si $\int f \, d\mu = 0$ alors $f = 0$ μ-pp et l'inégalité est triviale. Idem avec g. On supposera donc que $0 < \int f \, d\mu, \int g \, d\mu < +\infty$.
On va utiliser deux fois le Lemme 4.2. Tout d'abord, pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in X$ on a

$$f(x)^{1-t} g(x)^t \leq (1-t) \lambda^{\frac{1}{1-t}} f(x) + t \lambda^{-\frac{1}{t}} g(x)$$

et donc en intégrant on trouve que pour tout $\lambda > 0$,

$$\int f^{1-t} g^t \, d\mu \leq (1-t) \lambda^{\frac{1}{1-t}} \int f \, d\mu + t \lambda^{-\frac{1}{t}} \int g \, d\mu.$$

En prenant l'infimum sur les λ, ou trouve donc bien $\int f^{1-t} g^t \, d\mu \leq \Big(\int f \, d\mu \Big)^{1-t} \Big(\int g \, d\mu \Big)^t$.
Pour la réciproque, on suppose donc que les intégrales sont non-nulles et finies. On reprend la démonstration ci-dessous mais au lieu de prendre l'infimum sur les λ, on suppose qu'on a pris, dès le début le $\lambda = \lambda_0 > 0$ optimal pour lequel l'infimum est atteint (la valeur valeur exacte, dont on n'a pas besoin, est $\lambda_0 = \Big(\frac{\int g \, d\mu}{\int f \, d\mu} \Big)^{t(1-t)} > 0$). Alors on a

$$\Big(\int f \, d\mu \Big)^{1-t} \Big(\int g \, d\mu \Big)^t - \int f^{1-t} g^t \, d\mu = \int \Big[(1-t) \lambda_0^{\frac{1}{1-t}} f(x) + t \lambda_0^{-\frac{1}{t}} g(x)^t - f(x)^{1-t} g(x)^t \Big] \, d\mu.$$

Le terme sous l'intégrale est positif, et donc pour que son intégrale soit nulle, il faut qu'il soit nul μ-pp. Mais par l'étude des cas d'égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique, cela implique que $\lambda_0^{\frac{1}{1-t}} f = \lambda_0^{-\frac{1}{t}} g$ μ-pp. $\square$

Il y a beaucoup de formulations équivalentes de l'inégalité de Hölder. En voici une pour ceux qui préfèrent les p, q. On rappelle que $p/q = p - 1$.

1. Cette section est tirée du polycopié [1] et reproduite ici avec l'aimable autorisation de son auteur.

Proposition 1.49 (Inégalité de Hölder)**.** *Soit $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et $f, g : X \to [0, +\infty]$ deux fonctions mesurables positives sur X. Alors,*

$$\int fg\, d\mu \leq \Big(\int f^p\, d\mu \Big)^{1/p} \Big(\int g^q\, d\mu \Big)^{1/q}.$$

avec égalité lorsque $g = f^{p-1}$. De plus, lorsque $0 < \int f^p\, d\mu, \int g^q\, d\mu < +\infty$ il y a égalité si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que $g^q = \lambda f^p$ (i.e. $g = \tilde{\lambda}\, f^{p-1}$ pour un $\tilde{\lambda} \geq 0$).

Démonstration. On applique la proposition précédente en remplaçant $(1-t)$ par $\frac{1}{p}$, et donc t par $\frac{1}{q}$, et en l'appliquant à f^p à la place de f et g^q à la place de g. □

Le cas le plus rencontré est le cas $p = q = 2$, et l'inégalité s'appelle alors *inégalité de Cauchy-Schwartz.*

Remarque 1.50. Le cas du couple $p = 1$ et $q = \infty$ est trivial et s'énonce comme suit : si f, g sont deux fonctions mesurables positives sur X, alors

$$\int fg\, d\mu \leq \big(\sup g \big) \int f\, d\mu.$$

Remarque 1.51. Une conséquence de l'inégalité de Hölder est que si on se donne p et q dans $]1, +\infty[$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive avec $\int f^p\, d\mu < +\infty$, alors

$$\Big(\int f^p\, d\mu \Big)^{1/p} = \sup_{g \geq 0} \frac{\displaystyle\int fg\, d\mu}{\Big(\displaystyle\int g^q\, d\mu \Big)^{1/q}} = \sup_{g \geq 0,\, \int g^q\, d\mu \leq 1} \int fg\, d\mu.$$

où les sup sont pris sur les fonction mesurables positives telles que $0 < \int g^q\, d\mu < +\infty$). De plus ce sup est atteint. En effet, l'inégalité de Hölder montre que $\dfrac{\displaystyle\int fg\, d\mu}{\Big(\displaystyle\int g^q\, d\mu \Big)^{1/q}} \leq \Big(\int f^p\, d\mu \Big)^{1/p}$, et donc *idem* pour le sup sur g. On voit par ailleurs qu'il y a égalité si $g = f^{p-1}$ par exemple (si f est non nulle ; si f est nulle μ-pp, on prend n'importe que g), ce qui donne à la fois l'égalité voulue, et le fait que le sup est atteint. La deuxième inégalité découle par homogénéité.
On retrouvera une formule similaire lors de l'étude de la dualité $L^p - L^q$.

1.4.2 Inégalité de Minkowski

Proposition 1.52. *Soit $p \in]1, +\infty[$. Si $f, g : X \to [0, +\infty]$ sont deux fonctions mesurables positives sur X, alors*

$$\Big(\int (f+g)^p\, d\mu \Big)^{1/p} \leq \Big(\int f^p\, d\mu \Big)^{1/p} + \Big(\int g^p\, d\mu \Big)^{1/p}.$$

Si $0 < \int f^p\, d\mu, \int g^p\, d\mu < +\infty$, alors il y a égalité si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que $g = \lambda f$ μ-pp.

Démonstration. Soit $q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On rappelle que $q(p-1) = p$. Si f ou g est nulle μ-pp, il n'y a rien à montrer ; on supposera donc que ce n'est pas le cas. Idem si l'une des intégrales de droite vaut $+\infty$. On suppose donc les intégrales du terme de droite sont finies et que l'intégrale du terme de gauche est

non-nulle.
On a

$$\forall a, b \in [0,+\infty], \qquad (a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p+b^p). \tag{1.36}$$

On montrera cette inégalité plus loin. Cela permet de voir, en l'appliquant à $a = f(x)$ et $b = g(x)$ et en intégrant sur X par rapport à $d\mu(x)$ que si les intégrales de droites sont finies, l'intégrale de gauche aussi. Alors, par le cas d'égalité (trivial) dans l'inégalité de Hölder, on sait qu'il existe $H \ge 0$ tel que

$$\Big(\int (f+g)^p\, d\mu\Big)^{1/p} = \int (f+g) H\, d\mu \quad \text{et} \quad \int H^q\, d\mu = 1.$$

De façon explicite $H = \dfrac{1}{\big(\int (f+g)^p\, d\mu\big)^{1/q}}(f+g)^{p-1}$ sur X. On a donc,

$$\Big(\int (f+g)^p\, d\mu\Big)^{1/p} = \int fH\, d\mu + \int gH\, d\mu \le 1 \times \Big(\int f^p\, d\mu\Big)^{1/p} + 1 \times \Big(\int g^p\, d\mu\Big)^{1/p},$$

où l'on a utilisé deux fois l'inégalité de Hölder. Cela montre l'inégalité voulue.
On voit qu'il y a égalité si $g = \lambda f$ μ-pp. Réciproquement, pour qu'il y ait égalité, il faut que dans la preuve ci-dessus, il y ait égalité dans les deux inégalités de Hölder utilisées. Et donc, il faut que μ-pp $f = \lambda_1 H^{p-1}$ et $g = \lambda_2 H^{p-1}$, avec $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Donc il faut que $g = \lambda f$ pour un certain $\lambda > 0$. □

1.4.3 Espace $\mathcal{L}^p$ et espace L^p

Si f est une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note, pour $p \in [1,+\infty[$

$$\| f \|_p := \left(\int_E |\, f\,|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

qu'on appelle[2] *norme* $\mathcal{L}^p$ de f, et lorsque $p = \infty$,

$$\| f \|_\infty := \inf\{a > 0\ ;\ \mu(\{|\, f\,| \ge a\}) = 0\},$$

qu'on appelle[3] *supremum essentiel* de f.

Définition 1.53 ($p \in [1,+\infty[$)**.** On note $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{S}, \mu)$, ou $\mathcal{L}^p(\mu)$, l'ensemble de toutes les fonctions mesurables à valeurs dans ans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que $|\, f\,|^p$ est μ-intégrable, i.e. telles que $\|f\|_p < +\infty$.

Définition 1.54 ($p = \infty$)**.** On note $\mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{S}, \mu)$, ou $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, l'ensemble de toutes les fonctions mesurables f à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui sont *μ-essentiellement bornées*, c'est-à-dire telles qu'il existe $a > 0$ pour lequel $\mu(\{|\, f\,| \ge a\}) = 0$, soit encore telles que $\|f\|_\infty < +\infty$.

On remarquera que pour $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ on a

$$\mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) = 0.$$

En effet, on a $\mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) = \mu\Big(\bigcup_{n\ge 1}\Big\{|f| \ge \|f\|_\infty + \dfrac{1}{n}\Big\}\Big)$ et on conclut par convergence monotone. En particulier, pour toute partie mesurable A on a $\mu(A) = \mu(A \cap \{|f| \le \|f\|_\infty\})$.

2. mais dont nous verrons qu'il ne s'agit en fait que d'une semi-norme
3. mais on devrait dire μ-supremum essentiel

Remarque 1.55. Si on éprouve le besoin de préciser que l'on travaille avec des fonctions réelles ou des fonctions complexes, on peut ajouter "espace $\mathcal{L}^p$-réel" ou "espace $\mathcal{L}^p$-complexe".

Remarque 1.56. Dans les deux définitions ci-dessus, on peut autoriser la fonction $|f|$ à prendre la valeurs $+\infty$ (en particulier on peut considérer des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$). Cela ne change rien du point de vue de l'intégration par rapport à μ, car pour une fonction dans $\mathcal{L}^p$, cela ne peut avoir lieu que sur un ensemble de μ-mesure nulle. En effet, si p est fini, $|f|^p$ μ-intégrable entraîne que $\mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$. Pour $p = +\infty$, si $\|f\|_\infty < +\infty$, cela veut dire qu'il existe $a > 0$ fini tel que $\mu(\{|f| \geq a\}) = 0$, et $\mu(\{|f| = +\infty\}) \leq \mu(\{|f| \geq a\})$.

Proposition 1.57. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on a, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{L}^p$, on a*

1. $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$, *et*
2. $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

En particulier, $(\mathcal{L}^p, \| \cdot \|_p)$ est un espace vectoriel.

Démonstration. Le premier point est évident par linéarité de l'intégrale si $p < \infty$. Si $p = +\infty$,

$$\begin{aligned} \| af \|_\infty &= \inf\{m > 0 : \mu(\{| af | \geq m\}) = 0\} = | a | \inf\{m' > 0 : \mu(\{| af | \geq | a | m'\}) = 0\} \\ &= | a | \, inf\{m' > 0 : \mu(\{| f | \geq m'\}) = 0\} = | a | \, \| f \|_\infty. \end{aligned}$$

Le deuxième point est évident pour $p = 1$ à partir de l'inégalité $|f + g| \leq |f| + |g|$. Pour $p \in]1, +\infty[$, on combine cela avec l'inégalité de Minkowski. Pour le cas $p = \infty$, on remarque que si $a > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ on a,

$$\mu(\{|f + g| \geq a\}) \leq \mu(\{|f| + |g| \ \geq a\}) = \mu\Big(\{|f| + |g| \ \geq a\} \cap \{|f| \leq \|f\|_\infty\} \cap \{|g| \leq \|g\|_\infty\}\Big) = \mu(\emptyset) = 0,$$

et donc $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. □

Par ailleurs, si f est la fonction nulle, on a $\|f\|_p = 0$. Alors que manque-t-il à $\| \cdot \|_p$ pour être une norme sur $\mathcal{L}^p$? Pas grand chose, mais le problème vient du fait que pour $f \in \mathcal{L}^p$ on a

$$\|f\|_p = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \ \ \mu\text{-p.p.}$$

Cela est clair pour $p < +\infty$, puisque dire que la fonction positive $|f|^p$ a une intégrale nulle, cela veut dire qu'elle est nulle μ-pp. Pour $p = \infty$, si $\|f\|_\infty = 0$, alors $\mu(\{|f| > 0\}) = \mu(\bigcap_{n \geq 1} \{|f| \ \geq \frac{1}{n}\}) = 0$, par convergence monotone.

Ainsi, on veut construite un espace tel que f nulle μ-presque partout veut dire que f est le vecteur nul. Pour cela, on fait le quotient de $\mathcal{L}^p$ par la relation d'équivalence suivante

$$f \sim g \Longleftrightarrow f = g \ \ \mu\text{-p.p.} \Longleftrightarrow \|f - g\|_p = 0.$$

Ainsi, on considère l'ensemble quotient $\mathcal{L}^p(\mu)/\sim$ (que l'on notera $L^p(\mu)$) formé par les classes d'équivalences modulo $\sim$. Notez que la relation d'équivalence associée à chaque $\| \cdot \|_p$ ne dépend pas de p et est la même pour tous les espaces $\mathcal{L}^p$: la classe d'une fonction f est constituée par les fonctions qui coïncident avec f μ-presque partout.

Si on note $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions mesurables nulles μ-presque partout, on peut aussi écrire

$$f \sim g \Longleftrightarrow f - g \in \mathcal{N}.$$

Or $\mathcal{N}$ est un espace vectoriel (et un sous-espace vectoriel de tout $\mathcal{L}^p(\mu)$), et il est classique de voir que les structures d'espace vectoriel passent au quotient. En résumé, on obtient la

Définition 1.58. Pour $p \in [1, +\infty]$, on note $L^p(E, \mathcal{S}, \mu)$, ou $L^p(\mu)$, l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de $\mathcal{L}^p(\mu)$ par la relation d'équivalence définie par l'égalité μ-p.p.
Soit $\tilde{f} := \{g \; ; \; g = f \; \mu\text{-p.p.}\}$ la classe d'équivalence de f. Les opérations classiques s'étendent aux classes d'équivalence, avec $\widetilde{af} = a\tilde{f}$ et $\widetilde{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$.
On peut également définir $\| \cdot \|_p$ sur $L^p(\mu)$ par $\| \tilde{f} \|_p = \| f \|_p$, qui ne dépend pas du représentant choisi, car $f = g$ μ-p.p. implique $\| f \|_p = \| g \|_p$.

Remarque 1.59. On fera systématiquement l'abus de notation qui consiste à ne pas différencier fonctions et classes d'équivalences, c'est-à-dire à utiliser le même symbole pour une fonction f et pour sa classe d'équivalence $\overline{f}$.
C'est une question d'habitude. La seule manière de comprendre L^p, c'est de l'utiliser. En fait, sur $L^p(\mu)$ on pense plutôt "$\mathcal{L}^p(\mu)$", c'est-à-dire à des fonctions, plutôt qu'à des classes d'équivalences, mais on se souvient que les objets ne sont définis que μ-pp. Ainsi, par exemple, on a coutume de dire que deux fonctions f et g sont égales dans L^p si elles coïncident μ-pp (même si on devrait simplement dire qu'elle définissent la même classe d'équivalence dans $L^p(\mu)$).

On a alors immédiatement ce que l'on cherchait.

Théorème 1.60. *L'ensemble* $(L^p(\mu), \| \cdot \|_p)$ *est un espace vectoriel normé.*

Exemple 1.61. On note $\ell_p(\mathbb{N})$ ou simplement ℓ_p l'espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$, où m est la mesure de comptage. On distingue parfois les espaces réels $\ell_p^{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$et complexes $\ell_p^{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$.
Soit $u \in \ell^p$. Si $p < \infty$, alors

$$\| u \|_p = \left(\sum_n | u_n |^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

tandis que si $p = +\infty$,

$$\| u \|_\infty = \sup_n | u_n |.$$

Il n'est pas besoin ici de quotienter $\mathcal{L}^p$ car $\| u \|_p = 0$ implique $u = 0$.
On a la même chose pour $\ell^p(\mathbb{Z}) = \mathcal{L}^p(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), m)$.

1.4.4 Convergence dans L^p et convergence simple

Rappelons que la topologie usuelle d'un espace vectoriel normé est la topologie relative à la distance $d(f, g) = \| f - g \|$. Ainsi on dira que la suite (f_n) converge (vers f) dans L^p si

a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^p$ et $f \in L^p$;

b) $\lim_n \| f - f_n \|_p = 0$.

On rappelle que la suite (f_n) converge simplement vers f si $\lim_n f_n(x) = f(x)$ pour μ-presque tout x.
On remarque que si (f_n) converge dans $L^1(\mu)$ vers f, alors $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$. La réciproque est fausse en général.
Le théorème de convergence dominée est généralement énoncé en terme de fonction intégrable, mais on peut aussi en donner une version (équivalente) L^p.

Proposition 1.62. *Convergence L^p-dominée Soit $p \in [1, +\infty[$. Si $f_n \to f$ μ-p.p. et qu'il existe $g \in L^p$ tel que $| f_n | \leq g$ pour tout entier n, alors $f_n \stackrel{L^p}{\to} f$.*

Démonstration. On applique le théorème de convergence dominée. En effet, $| f_n - f |^p \leq (| f_n | + | f |)^p \leq 2^p | g |^p$ μ-p.p., et par hypothèse $| g |^p$ est intégrable, donc comme $| f_n - f |^p \to 0$, μ-p.p., on a la convergence vers 0 de $\int | f_n - f |^p \, d\mu$. $\square$

Proposition 1.63 (Extraction d'une sous-suite convergeant simplement)**.** *Soit $p \in [1, +\infty]$. Si $f_n \stackrel{L^p}{\to} f$, alors il existe une suite extraite de (f_n) qui converge vers f μ-p.p.*
Dans le cas $p = +\infty$, on a bien sûr beaucoup mieux : $f_n \to f$ uniformément en dehors d'un ensemble négligeable (en particulier, $f_n \to f$ μ-p.p., pas besoin de sous-suite).

Démonstration. On traite d'abord le cas $1 \leq p < +\infty$. Si (f_n) converge vers f dans $L^p(\mu)$, on peut trouver une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ tel que pour tout $k \geq 1$,

$$\|f_{n_k} - f\|_p \leq 2^{-k}.$$

Introduisons la suite de fonctions positives $u_k = |f_{n_k} - f|^p$. Par le théorème de Beppo-Levi (convergence monotone) on a

$$\int \sum_{k\geq 0} u_k(x)\, d\mu(x) = \sum_{k\geq 0} \int u_k(x)\, d\mu(x) \leq \sum_{k\geq 0} (2^{1/p})^{-k} < +\infty.$$

Par conséquent, il existe un ensemble de mesure nulle $\mathcal{N}$ tel que $\forall x \in X \setminus \mathcal{N}$, $\sum_{k\geq 0} u_k(x) < +\infty$. Donc, pour $x \in X \setminus \mathcal{N}$ la série réelle $\sum u_k(x)$ est convergente, et donc son terme général tend vers zéro, c'est à dire $f_{n_k}(x) \to f(x)$.
Pour $p = +\infty$, c'est la définition de la convergence dans $L^\infty(\mu)$. □

Exemple 1.64. Dans le cas de l'espace ℓ^p (pour $p < \infty$), une suite (de fonctions, aussi appelées suites ici...) $(u^{(n)})$ converge vers la fonction $u \in \ell^p$ si $\sum_k |\, u_k^{(n)} \,|^p < \infty$, si $\sum_k |\, u_k \,|^p < \infty$ et si

$$\lim_n \sum_k |\, u_k^{(n)} - u_k \,|^p = 0.$$

Ceci implique en particulier que $u_k^{(n)} \longrightarrow u_k$ lorsque $n \to \infty$. En conclusion, dans l'espace ℓ^p (vrai aussi si $p = +\infty$ par b)ii)),

$$f_n \stackrel{\ell^p}{\to} f \qquad \Longrightarrow \qquad f_n \to f \qquad \text{simplement (partout).}$$

Évidemment, on n'a pas la réciproque, comme on peut le voir sur le contre-exemple $u^{(n)} = \mathbf{1}_{\{n\}}$. Alors la suite $(u^{(n)})$ converge simplement vers la fonction nulle car $u_k^{(n)} = 0$ pour tout $k > n$. Néanmoins pour tout n, la fonction $u^{(n)}$ est à distance 1 de la fonction nulle : $\|\, u^{(n)} - 0 \,\|_p = (\sum_k |\, u_k^{(n)} \,|^p)^{1/p} = 1$ pour tout p (même $p = \infty$), et donc ne converge pas vers la suite nulle dans ℓ^p. En effet, ici la plus petite fonction dominant la suite $(u^{(n)})$ est la fonction v constante à 1. Pour $p < \infty$, cette fonction n'est pas dans ℓ^p, donc on ne peut pas appliquer a). De plus, $v \in \ell^\infty$, ce qui montre aussi que la Proposition 1.62 n'est pas valide en général pour $p = \infty$.

Corollaire 1.65. *Soit $p \in [1, +\infty]$. Si l'on a la convergence de la suite (f_n) vers f dans L^p et vers g μ-p.p. alors f et g sont égales μ-p.p.*

Démonstration. On sait qu'il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})$ qui converge μ-p.p. vers f. Or la suite (f_n) converge μ-p.p. vers g, donc la sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ également. Ainsi $f = g$ μ-p.p. □

1.4.5 Complétude des espaces L^p

Théorème 1.66 (Théorème de Riesz–Fisher)**.** *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $L^p(\mu)$. On veut montrer qu'elle converge dans L^p. Remarquons qu'il suffit de montrer qu'une sous-suite $(f_{n_k})_k$ converge. En effet, si f est la limite de cette sous-suite on a alors pour tout n, k,

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f_n\|_p,$$

et chaque terme peut être rendu petit, le premier en prenant k assez grand (par définition de la limite), et le deuxième en prenant k (puisque $n_k \geq k$) et n assez grands, par le caractère de Cauchy.
Le caractère de Cauchy nous permet de trouver une sous-suite (f_{n_k}) tel que

$$\forall k \geq 0, \qquad \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k}.$$

Posons alors

$$u_0 = f_{n_0}, \qquad \text{et pour } k \geq 1 \;\; u_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}},$$

de sorte que pour $N \geq 0$, la somme partielle vérifie

$$U_N := u_0 + u_1 + \ldots + u_N = f_{n_N}.$$

On se demande donc si la série $\sum u_k$ converge dans $L^p(\mu)$.
Posons, pour (presque tout) $x \in E$, et $N \geq 0$,

$$V_N(x) = \sum_{k=0}^{N} |u_k(x)|.$$

Pour x fixé, c'est une suite croissante qui converge vers une limite que l'on note $V(x)$:

$$V(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(x)| \in [0, +\infty].$$

La suite croissante $V_N(x)^p$ converge elle vers $V(x)^p$ lorsque $N \to +\infty$ (en convenant que $(+\infty)^p = +\infty$) et comme

$$\int V_N(x)^p \, d\mu(x) = \Big\| \sum_{k=0}^{N} |u_j| \Big\|_p^p \leq \Big(\sum_{k=0}^{N} \|u_j\|_p \Big)^p \leq \Big(\|f_{n_0}\|_p + \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \Big)^p =: M < +\infty,$$

on a par convergence monotone

$$\int V(x)^p \, d\mu(x) \leq M < +\infty.$$

Cela force l'ensemble $\mathcal{N} := \{V^p = +\infty\} = \{V = +\infty\}$ à être de mesure nulle. Pour $x \notin \mathcal{N}$, on a

$$V(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \; |u_k(x)| < +\infty,$$

ce que veut dire que la série dans $\mathbb{K}$, $\sum u_k(x)$ est elle aussi convergente, car absolument convergente ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est complet). Pour $x \notin \mathcal{N}$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_j(x) = \lim_{N \to +\infty} U_N(x) = \lim_{N \to +\infty} f_{n_N}(x)$$

la somme de cette série convergente. On peut poser $f(x) = 0$ pour $x \in \mathcal{N}$, si on veut, mais ce n'est pas nécessaire si on raisonne μ-pp. Notez que f est une fonction mesurable comme limite simple (presque partout) d'une suite de fonctions mesurables. Par ailleurs, on a μ-pp, par convergence simple,

$$|f|^p \leq \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| \Big)^p = V^p$$

et donc $f \in L^p(\mu)$. Il reste à montrer la convergence dans $L^p(\mu)$. On a que U_N converge simplement vers f et $|U_N| \leq V_N \leq V$. Comme $V \in L^p(\mu)$, on peut conclure par convergence dominée dans $L^p(\mu)$ que U_N converge vers f dans $L^p(\mu)$ dans le cas $p < +\infty$. On a donc bien montré que la sous-suite (f_{n_k}) convergeait dans $L^p(\mu)$. $\square$

1.5 Approximation

Théorème 1.67. *(Approximation par des fonctions simples) Soit $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espace mesuré. Soit S l'ensemble des fonctions s simples à valeurs complexes (i.e. $s = \sum_{1 \le i \le n} \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}$ où $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $E_i \in \mathcal{S}$) telles que $\mu(\{x;\ s(x) \neq 0\}) < +\infty$.*
Pour $1 \le p < +\infty$, S est dense dans $L^p(\mu)$.

Démonstration. Clairement $S \subset L^p(\mu)$ pour tout $1 \le p < +\infty$. Soit maintenant $f \in L^p(\mu)$ telle que $f \ge 0$. On peut alors construire une suite de fonctions simples $(s_n)_{n \ge 1}$ qui converge en croissant vers f (voir le début de la preuve du théorème 1.41). Pour tout $n \ge 1$, $0 \le s_n \le f$. Ainsi $|f - s_n|^p \le f^p$ et le théorème de convergence dominée nous dit que $\|f - s_n\|_p \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc f est dans l'adhérence de S pour la norme $\|\cdot\|_p$. Pour f à valeurs complexes, on la décompose en partie réelle et imaginaire, puis ses parties réelle et imaginaire en différence de partie positive et négative. $\square$

Théorème 1.68. *(Approximation par des fonctions continues) Supposons que $(X, \mathcal{S}, \mu)$ est un espace de Hausdorff localement compact mesuré tel que la mesure μ et la σ-algèbre associée vérifient les propriétés (2)-(5) du théorème 1.19.*
Alors, pour $1 \le p < +\infty$, $\mathcal{C}_c(X)$ est dense dans $L^p(\mu)$.

Remarque 1.69. Dans ce cadre, on peut considérer l'espace vectoriel $\mathcal{C}_c(X)$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$. Alors, $L^p(\mu)$ est le complété de cet espace.

Démonstration. Définissons S comme dans le théorème 1.67. Pour $s \in S$ et $\varepsilon > 0$, par le théorème 1.41 , le théorème de Lusin, il existe $g \in \mathcal{C}_c(X)$ tel que g et s coïncident sauf sur un ensemble de mesure majorée par ε et, de plus, $\|g\|_\infty \le \|s\|_\infty$. Ainsi, pour $1 \le p < +\infty$, $\|g - s\|_p \le 2\varepsilon^{1/p}\|s\|_\infty$. Le théorème 1.68 est alors un corollaire immédiat du théorème 1.67. $\square$

Corollaire 1.70. *Considérons $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue et $p \in [1, +\infty[$. Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on définit $f_x : \ y \in \mathbb{R}^d \mapsto f(y - x)$. Alors $f_x \underset{|x| \to 0}{\to} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Soit $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. En effet, les supports des fonctions $(g_x - g)_{|x| \le 1}$ sont tous contenu dans un compact fixé et ces fonctions sont majorées par $2\|g\|_\infty$. Par continuité, on a $g_x - g \underset{x \to 0}{\to} 0$ en tout point. Le théorème de convergence dominée nous dit alors que $\|g_x - g\|_p \underset{x \to 0}{\to} 0$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.
Comme $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, cette convergence s'étend à $L^p(\mathbb{R}^d)$. En effet, si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, on a $\|f_x - f\|_p \le \|g_x - g\|_p + 2\|f - g\|_p$. $\square$

Remarque 1.71. Le corollaire 1.70 nous dit que, pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, l'application $x \in \mathbb{R}^d \mapsto f_x \in L^p(\mathbb{R}^d)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.72. Soit X un espace de Hausdorff localement compact. Soit $u : \ X \to \mathbb{C}$. On dit que u *s'annule à l'infini* si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\overline{\{x;\ |u(x)| \ge \varepsilon\}}$ est compact.
L'ensemble des fonctions continues sur X s'annulant à l'infini est noté $\mathcal{C}_0(X)$.

Théorème 1.73. *Si X est un espace de Hausdorff localement compact, alors $\mathcal{C}_0(X)$ est la complétion de $\mathcal{C}_c(X)$ pour la métrique définie par la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}_0(X)$ et $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe K compact tel que $|f(x)| < \varepsilon$ si $x \notin K$. Par le lemme d'Urysohn, il existe $g \in \mathcal{C}_c(X)$ tel que $0 \le g \le 1$ et $g_{|K} = 1$. Donc $h := fg \in \mathcal{C}_c(X)$ et $\|f - h\|_\infty \le \sup_{x \notin K} |(1 - g)(x) f(x)| \le \sup_{x \notin K} |f(x)| \le \varepsilon$. Donc, $\mathcal{C}_c(X)$ est dense dans $\mathcal{C}_0(X)$.

Soit $(f_n)_n$ de Cauchy dans $\mathcal{C}_0(X)$. Alors, pour $x \in X$, $(f_n(x))_n$ est de Cauchy donc converge vers $f(x)$. Comme $(f_n)_n$ de Cauchy pour $\|\cdot\|_\infty$, on a que f_n converge uniformément vers f donc f est continue. Enfin, pour $\varepsilon > 0$, il existe n tel que $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon/2$ et K_n un compact tel que $\forall x \notin K_n$, $|f_n(x)| \leq \varepsilon/2$. Donc, $\forall x \notin K_n$, $|f(x)| \leq \varepsilon$. Ainsi $f \in$ appartient à $\mathcal{C}_0(X)$ qui est donc complet. Ceci complète la preuve du théorème 1.73. $\square$

Remarque 1.74. Remarquons que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$ mais $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \neq L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Chapitre 2

Mesures à valeurs complexes et dérivation de mesures

On s'est pour l'instant intéressé à des mesures positives. On va maintenant considérer des mesures à valeurs complexes ou mesures complexes. Ce passage est analogue au passage des séries à termes positifs aux séries à termes complexes.

2.1 Mesures complexes - Variation totale

Définition 2.1. Soit $\mathcal{S}$ une σ-algèbre sur un espace X.
Une *mesure complexe* sur $(X, \mathcal{S})$ est une application $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ telle que, si $E \in \mathcal{S}$ et $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une partition de E dans $\mathcal{S}$ (i.e. $\forall i$, $E_i \in \mathcal{S}$, $\forall i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ et $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i = E$), on a

$$\mu(E) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i). \tag{2.1}$$

Remarque 2.2. D'abord la définition implique que tout ensemble mesurable est de mesure $\mu(E)$ finie.
L'égalité (2.1) requiert implicitement que $\sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu(E_i)| < +\infty$; en effet, pour une partition données, dans la réunion définissant E, on peut réordonner les termes de façon arbitraires. Donc la somme dans le membre de droite de (2.1) doit converger vers la même valeur ce quelque soit la permutation des termes. Ceci impose que la somme converge absolument (voir [5, Théorème 3.56]).

Exercice 2.3. Soient λ une mesure positive sur $(X, \mathcal{S})$ et $h \in L^1(\lambda)$. Pour $E \in \mathcal{S}$, on pose

$$\mu(E) = \int_E h\, d\lambda. \tag{2.2}$$

Montrer que μ est une mesure complexe sur $(X, \mathcal{S})$ que l'on notera $d\mu = h\, d\lambda$.

Définition 2.4. Soit μ une mesure à valeur complexe. On définit sa *variation totale* notée $|\mu| : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ de la façon suivante : pour $E \in \mathcal{S}$, on pose

$$|\mu|(E) = \sup_{(E_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ partition de } E} \sum_{j\in\mathbb{N}} |\mu(E_j)|.$$

Cette définition nous donne immédiatement que

$$\forall E \in \mathcal{S}, \quad |\mu(E)| \leq |\mu|(E). \tag{2.3}$$

Théorème 2.5. *La variation totale d'une mesure complexe μ sur $\mathcal{S}$ est une mesure positive sur $\mathcal{S}$.*

Démonstration. Soit $E \in \mathcal{S}$ et $E = \cup_i E_i$ une partition de E dans $\mathcal{S}$. Pour i tel que $|\mu|(E_i) > 0$, soit $t_i < |\mu|(E_i)$. Ainsi, E_i admet une partition $(A_{ij})_j$ telle que $\sum_j |\mu(A_{ij}| > t_i$. Comme $(A_{ij})_{i,j}$ fournit une partition de E, on a

$$\sum_i t_i \leq \sum_{i,j} |\mu(A_{ij}| \leq |\mu|(E).$$

En faisant $t_i \to |\mu|(E_i)$ pour chaque i tel que $|\mu|(E_i) > 0$, on obtient

$$\sum_i |\mu|(E_i) \leq |\mu|(E). \tag{2.4}$$

Montrons l'inégalité réciproque. Pour cela, soit $(A_j)_j$ une seconde partition de E. Alors, pour i fixé, $(A_j \cap E_i)_j$ est une partition de E_i et pour j fixé, $(A_j \cap E_i)_i$ une partition de A_j. Ainsi

$$\sum_j |\mu(A_j)| = \sum_j \left| \sum_i \mu(A_j \cap E_i) \right| \leq \sum_j \sum_i |\mu(A_j \cap E_i)| = \sum_i \sum_j |\mu(A_j \cap E_i)| \leq \sum_i |\mu|(E_i).$$

Comme ceci vaut pour toute $(A_j)_j$ partition de E, on a

$$|\mu|(E) \leq \sum_i |\mu|(E_i).$$

En se souvenant de (2.4), on voit que $|\mu|$ est σ-additive.
Un calcul trivial donne $|\mu|(\emptyset) = 0$. Ainsi $|\mu|$ est une mesure. □

Théorème 2.6. *Si μ est une mesure complexe sur X, alors $|\mu|(X) < +\infty$.*

Démonstration. On commence par prouver le

Lemme 2.7. *Soient $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes. Alors, il existe $A \subset \{1, \dots, n\}$ tel que*

$$\left| \sum_{j \in A} z_j \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{1 \leq j \leq n} |z_j|.$$

Démonstration. On peut écrire $z_j = |z_j| e^{i\theta_j}$. Pour $-\pi \leq \theta \leq \pi$, soit $A(\theta)$ l'ensemble des j pour lesquels $\cos(\theta_j - \theta) > 0$. Ainsi

$$\left| \sum_{j \in A(\theta)} z_j \right| = \left| \sum_{j \in A(\theta)} e^{-i\theta} z_j \right| \geq \mathrm{Re} \left(\sum_{j \in A(\theta)} e^{-i\theta} z_j \right) = \sum_{j=1}^{N} |z_j| \max(\cos(\theta_j - \theta), 0).$$

On choisit maintenant pour θ la valeur dans $[-\pi, \pi]$ qui maximise la fonction dans le membre de droite de la dernière égalité. La valeur de cette fonction en ce maximum est supérieure à la moyenne de cette fonction sur $[-\pi, \pi]$. On obtient ainsi pour ce θ que, si on pose $A = A(\theta)$ alors

$$\left| \sum_{j \in A} z_j \right| \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} |z_j| \int_{-\pi}^{\pi} \max(\cos(\theta_j - \theta), 0) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \max(\cos(\theta), 0) d\theta \left[\sum_{j=1}^{N} |z_j| \right] = \frac{1}{\pi} \sum_{1 \leq j \leq n} |z_j|.$$

□

Revenons à la preuve du théorème 2.6. Supposons qu'il existe $E \in \mathcal{S}$ tel que $|\mu|(E) = +\infty$. Soit $t = \pi(1+|\mu(E)|)$. Comme $|\mu|(E) > t$, il existe $(E_i)_{i\geq 1}$, une partition de E et un entier N tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} |\mu(E_i)| > t$.
On peut alors appliquer le lemme 2.7 aux complexes $z_i = \mu(E_i)$, $i = 1, \cdots, N$. Ceci nous donne l'existence d'un ensemble $A \subset E$ (A est réunion de E_i bien choisis) tel que $|\mu(A)| > \dfrac{t}{\pi} > 1$. Mais en posant $B = E \setminus A$, on calcule

$$|\mu(B)| = |\mu(E) - \mu(A)| \geq |\mu(A)| - |\mu(E)| > \frac{t}{\pi} - |\mu(E)| = 1.$$

On a donc partitionné $E = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ où $|\mu(A)| > 1$ et $|\mu(B)| > 1$. Évidemment, on a soit $|\mu|(A) = +\infty$ ou $|\mu|(B) = +\infty$.
On peut maintenant réappliquer le même procédé à celui de A et B qui est de mesure $|\mu|$ infinie. En procédant ainsi, par récurrence, on construit une suite d'ensembles mesurables, disons, $(C_j)_j$ deux à deux disjoints tel que pour tout j, $|\mu(C_j)| > 1$. La σ-additivité de μ nous dit que $\mu(\cup_j C_j) = \displaystyle\sum_j \mu(C_j)$. Mais ceci ne se peut car cette dernière série ne converge évidemment pas. On obtient la contradiction souhaitée pour achever la preuve du théorème 2.6. $\square$

Proposition 2.8. *L'application $\mu \mapsto \|\mu\| := |\mu|(X)$ définit une norme sur l'espace vectoriel des mesures complexes sur $(X, \mathcal{S})$ (muni de ses opérations naturelles).*

Exercice 2.9. Démontrer la proposition 2.8.

Définition 2.10. Pour une mesure réelle μ, on définit ses *variations positive et négative* respectivement comme les mesures positives $\mu^+ = \dfrac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ et $\mu^- = \dfrac{1}{2}(|\mu| - \mu)$.

On a $\mu = \mu^+ - \mu^-$ et $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Cette décomposition est la *décomposition de Jordan* de la mesure μ.

2.2 Absolue continuité

2.2.1 Définitions et premières propriétés

Soient λ une mesure positive et μ une mesure quelconque (positive ou complexe) sur $(X, \mathcal{S})$.
Le but de ce chapitre va être de comparer ces deux mesures, plus précisément, essayer d'en définir le quotient ; ce n'est bien sûr pas toujours possible.
Commençons par introduire quelques définitions.

Définition 2.11. On dit que μ est *absolument continue* par rapport à λ si et seulement si, pour $E \in \mathcal{S}$, $\lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$. On note alors $\mu \ll \lambda$.

Exemple 2.12. Soit λ une mesure positive sur X et $f \in L^1(\lambda)$. Alors la mesure $\mu := f\,d\lambda$ définie par $\mu(E) := \int_E f\,d\lambda$ pour $E \in \mathcal{S}$ est absolument continue par rapport à λ.
En passant des fonction indicatrices d'ensembles mesurable aux fonctions simples puis aux fonctions mesurables positives, on voit que μ est définie par la propriété $\displaystyle\int_X g\,d\mu = \int_X gf d\lambda$ pour toute g mesurable positive ou pour toute g telle que fg est λ-intégrable.

Définition 2.13.
1. S'il existe $A \in \mathcal{S}$ tel que, pour tout $E \in \mathcal{S}$, $\mu(E) = \mu(E \cap A)$, on dit que μ est concentrée sur A. De façon équivalente, on peut demander que $\mu(E) = 0$ dès que $E \cap A = \emptyset$.
2. On dit que μ_1 et μ_2, deux mesures sur $(X, \mathcal{S})$, sont *mutuellement singulières* si elles sont concentrées sur des ensembles disjoints. On note alors $\mu_1 \perp \mu_2$.

Proposition 2.14. *Supposons que λ, μ, μ_1 et μ_2 sont des mesures sur $(X, \mathcal{S})$ et que λ est positive. Alors :*

1. *si μ est concentrée sur A, $|\mu|$ l'est aussi ;*
2. *si $\mu_1 \perp \mu_2$ alors $|\mu_1| \perp |\mu_2|$;*
3. *si $\mu_1 \perp \lambda$ et $\mu_2 \perp \lambda$ alors $\mu_1 + \mu_2 \perp \lambda$;*
4. *si $\mu_1 \ll \lambda$ et $\mu_2 \ll \lambda$ alors $\mu_1 + \mu_2 \ll \lambda$;*
5. *si $\mu \ll \lambda$ alors $|\mu| \ll \lambda$;*
6. *si $\mu_1 \ll \lambda$ et $\mu_2 \perp \lambda$ alors $\mu_1 \perp \mu_2$;*
7. *si $\mu \ll \lambda$ et $\mu \perp \lambda$ alors $\mu = 0$.*

Démonstration. On démontre les propriétés dans l'ordre.

1. Si $E \cap A = \emptyset$ et que $(E_j)_j$ est une partition de E alors $\mu(E_j) = 0$ pour tout j. Ainsi $|\mu|(E) = 0$.
2. Ceci suit immédiatement de 1.
3. Pour $i \in \{1, 2\}$, il existe A_i et B_i disjoints tels que μ_i est concentrée sur A_i et λ sur B_i. Ainsi $\mu_1 + \mu_2$ est concentrée sur $A = A_1 \cup A_2$ et λ est concentrée sur $B = B_1 \cap B_2$. Or $A \cap B \subset (A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) = \emptyset$.
4. C'est clair.
5. Si $\lambda(E) = 0$ et que $(E_j)_j$ est une partition de E, alors $\lambda(E_j) = 0$ pour tout j. Comme $\mu \ll \lambda$, on a $\mu(E_j) = 0$ pour tout j. Ainsi $\sum_j |\mu(E_j)| = 0$. On a donc $|\mu|(E) = 0$.
6. Comme $\mu_2 \perp \lambda$, il existe A tel que $\lambda(A) = 0$ et μ_2 concentrée sur A. Comme $\mu_1 \ll \lambda$, pour tout $E \subset A$, $\mu_1(E) = 0$. Ainsi μ_1 est aussi concentrée sur le complémentaire de A.
7. Par le point 6, les hypothèses du point 7 impliquent que $\mu \perp \mu$. Donc $\mu = 0$.

□

2.2.2 Le théorème de Lebesgue-Radon-Nicodym

Ce résultat est le principal de ce chapitre. Il établit la comparaison évoquée ci-dessus.

Théorème 2.15 (Théorème de Lebesgue-Radon-Nicodym)**.** *Soient λ une mesure σ-finie positive et μ une mesure complexe sur $(X, \mathcal{S})$. Alors*

1. *il existe une unique paire de mesures complexes μ_a et μ_s sur $(X, \mathcal{S})$ telles que*

$$\mu = \mu_a + \mu_s, \qquad \mu_a \ll \lambda, \qquad \mu_s \perp \lambda \;; \tag{2.5}$$

   si μ est positive alors μ_a et μ_s le sont aussi ;

2. *il existe une unique fonction $h \in L^1(\lambda)$ telle que $d\mu_a = h d\lambda$.*

La paire (μ_a, μ_s) est appelée *décomposition de Lebesgue* de μ par rapport à λ. La fonction h est appelée *dérivée de Radon-Nicodym* de μ par rapport à λ.
Le point (2) du théorème 2.15 est appelé Théorème de Radon-Nikodym. Si λ est σ-finie, il démontre que si μ est absolument continue par rapport à λ alors μ est de la forme donnée dans l'exemple 2.12.

Démonstration. Commençons par démontrer l'unicité de la paire (μ_a, μ_s). Supposons que (μ'_a, μ'_s) est une autre paire ayant les mêmes propriétés. Alors $\mu_a - \mu'_a = \mu_s - \mu'_s$. Or $\mu_a - \mu'_a \ll \lambda$ et $\mu_s - \mu'_s \perp \lambda$ donc $\mu_a - \mu'_a = \mu_s - \mu'_s = 0$ par les points 3, 4 et 7 de la proposition 2.14.
Pour démontrer l'existence de la décomposition, on va d'abord se ramener au cas $\lambda(X) < +\infty$ et, pour cela, démontrer le

Lemme 2.16. *Soit λ une mesure positive σ-finie sur une σ-algèbre $\mathcal{S}$ sur un ensemble X. Alors, il existe une fonction $w \in L^1(\lambda)$ telle qu'en tout $x \in X$, on a $0 < w(x) < 1$.*

Démonstration. Comme μ est σ-finie, on peut décomposer $X = \cup_{i\geq 1} E_i$ où $E_i \in \mathcal{S}$ et $\lambda(E_i) < +\infty$. Alors, en utilisant le théorème de convergence monotone, on vérifie que la fonction $w = \sum_{i\geq 1} \frac{1}{2^i(1+\lambda(E_i))} \mathbf{1}_{E_i}$ convient □

Soit λ comme dans l'énonce du théorème 2.15. Avec w choisie comme dans le lemme 2.16, la mesure $d\tilde{\lambda} := w\, d\lambda$ est finie et elle a les mêmes ensembles de mesure nulle que λ c'est-à-dire que $\lambda \ll \tilde{\lambda} \ll \lambda$. En effet, si $\tilde{\lambda}(E) = \int_E w d\lambda = 0$ alors, comme elle est positive, w est nulle λ-presque partout sur E or w ne s'annule nulle part ; c'est donc que $\lambda(E) = 0$.
Soit μ comme dans l'énoncé du théorème 2.15. Commençons par supposer que μ positive et finie. Alors la mesure $d\nu = d\mu + w d\lambda$ est aussi positive et finie. Par définition (voir l'exemple 2.12), pour toute f mesurable positive, on a

$$\int_X f d\nu = \int_X f d\mu + \int_X f\, w\, d\lambda \geq \int_X f d\mu.$$

Comme ν est finie, on sait que $L^2(\nu) \subset L^1(\nu) \subset L^1(\mu)$ (par l'inégalité ci-dessus). Donc si $f \in L^2(\nu)$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on calcule

$$\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f|\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\nu \leq \sqrt{\nu(X)} \|f\|_{L^2(\nu)}.$$

Ainsi l'application linéaire $f \mapsto \int_X f d\mu$ est une forme linaire bornée sur $L^2(\nu)$. Par le théorème de Riesz-Fisher (cf [1, Chapitre 4.4]), il existe $g \in L^2(\nu)$ telle que, pour $f \in L^2(\nu)$, on a

$$\int_X f d\mu = \int_X f g d\nu. \tag{2.6}$$

Remarquons que $g \in L^2(\nu)$ n'est définie que ν-presque partout.
Comme $0 \leq \mu \leq \nu$, en appliquant (2.6) à $f = \mathbf{1}_E$ où $E \in \mathcal{S}$ tel que $\nu(E) > 0$, on obtient

$$0 \leq \frac{1}{\nu(E)} \int_E g\, d\nu = \frac{\mu(E)}{\nu(E)} \leq 1$$

On en déduit que ν-presque partout, on a $0 \leq g \leq 1$. On peut donc supposer sans modifier (2.6) que g est à valeurs dans $[0, 1]$. En se souvenant de $d\nu = d\mu + w d\lambda$, réécrivons (2.6) comme

$$\int_X (1-g) f d\mu = \int_X f\, g\, w\, d\lambda. \tag{2.7}$$

Posons $A := \{x;\ 0 \leq g(x) < 1\}$ et $S := \{x;\ g(x) = 1\}$ et définissons deux mesures μ_a et μ_s par $\mu_a(E) = \mu(A \cap E)$ et $\mu_s(E) = \mu(S \cap E)$ pour $E \in \mathcal{S}$.
Pour $f = \mathbf{1}_S$, le membre de gauche de (2.7) s'annule et celui de droite devient $\int_S w d\lambda$. Comme w est positive et ne s'annule pas, on voit que $\lambda(S) = 0$. Donc $\mu_s \perp \lambda$.
Comme g est bornée, dans (2.7), on peut remplacer f par $(1 + g + \cdots + g^n)\mathbf{1}_E$ pour un entier n arbitraire ce qui nous donne

$$\int_{A\cap E} (1-g^n)\, d\mu = \int_E (1-g^n)\, d\mu = \int_E (1 + g + \cdots + g^n)\, g\, w\, d\lambda. \tag{2.8}$$

Comme en tout point $x \in A$, $g^n(x) \searrow 0^+$ quand $n \to +\infty$, le membre de gauche de (2.8) converge vers $\mu(A \cap E) = \mu_a(E)$.
La suite $((1 + g + \cdots + g^n)\, g\, w)_n$ est positive et croissante ; elle converge donc vers une fonction mesurable positive que l'on notera h. Ainsi, par le théorème de convergence monotone, le membre de gauche de (2.8) converge vers $\int_E h d\lambda$ quand $n \to +\infty$. Pour $E = X$, comme λ_a est finie, on obtient que $h \in L^1(\lambda)$. Ceci prouve le point 2 du théorème 2.15. Mais ce point 2 implique immédiatement que $\mu_a \ll \lambda$ (voir l'exemple 2.12). Ceci achève la preuve du théorème 2.15 quand μ est positive.
Pour μ complexe, on écrit $\mu = \mu_r + i\,\mu_i$ où μ_r et μ_i sont des mesures réelles, puis, on applique la construction précédente aux variations positives et négatives de ces mesures.
Le théorème 2.15 est démontré. □

Remarque 2.17. Si μ est positive et σ-finie, les conclusions du théorème 2.15 pour λ et μ restent presque toutes vraies : simplement, la fonction h n'est plus nécessairement intégrable mais elle est mesurable à valeurs positives. Pour voir cela, on décompose $X = \cup_n X_n$ où $(\mu + \lambda)(X_n) < +\infty$ pour tout n. Sur chaque X_n i.e. pour $\lambda_{|X_n}$ et $\mu_{|X_n}$, on applique le théorème 2.15 pour obtenir h_n sur X_n ; l'unicité nous permet de dire que si $\lambda(X_n \cap X_m) \neq 0$, alors $(h_n)_{|X_n \cap X_m} = (h_m)_{|X_n \cap X_m}$. La famille $(h_n, X_n)_n$ définit donc bien une fonction h positive et mesurable qui vérifie la propriété souhaitée. De plus, elle est également "localement" intégrable au sens où, pour tout n, $\int_{X_n} h\, d\lambda < +\infty$.

Remarque 2.18. On ne peut pas simplement omettre l'hypothèse de σ-finitude sur λ. Par exemple, sur $[0, 1]$ on peut supposer que μ est la mesure de Lebesgue et λ la mesure de comptage (toutes deux sur la σ-algèbre de Lebesgue). Alors μ n'a pas de décomposition de Lebesgue par rapport à λ et, bien que λ soit bornée et $\mu \ll \lambda$, il n'existe pas de fonction $h \in L^1(\mu)$ telle que $d\mu = h d\lambda$.

Théorème 2.19. *Soient λ et μ deux mesures sur $(X, \mathcal{S})$ respectivement positive et complexe. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mu \ll \lambda$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tel que* $\sup\limits_{\substack{E \in \mathcal{S} \\ \lambda(E) < \delta}} |\mu|(E) \leq \varepsilon$.

Remarque 2.20. Dans le théorème 2.19, si μ est une mesure positive mais de masse totale infinie, on n'a pas forcément (1) $\Longrightarrow$ (2). On peut par exemple prendre μ égale à la mesure de Lebesgue sur $(0, 1)$ et poser $\mu(E) = \displaystyle\int_E x^{-1} dx$ pour $E \subset (0, 1)$ Lebesgue mesurable.

Démonstration. Supposons 2. Si $\lambda(E) = 0$ alors $\lambda(E) < \delta$ pour tout $\delta > 0$. Donc $|\mu|(E) < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ c'est-à-dire $|\mu|(E) = 0$, soit encore, $\mu(E) = 0$. On obtient donc le point 1.
Supposons que le point 2 est faux. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \geq 1$, $E_n \in \mathcal{S}$ tel que $\lambda(E_n) < 2^{-n}$ et $|\mu|(E_n) > \varepsilon$. Posons

$$\forall n \geq 1, A_n = \bigcup_{m \geq n} E_m \quad \text{et} \quad A = \bigcap_{n \geq 1} A_n.$$

Alors $\lambda(A_n) < 2^{-n+1}$ et $A_{n+1} \subset A_n$. Donc, par convergence monotone $\lambda(A) = 0$ et $|\mu|(A) = \lim\limits_{n \to +\infty} |\mu|(A_n) \geq \varepsilon > 0$ (comme $|\mu|(A_n) \geq |\mu|(E_n)$). Ceci contredit $|\mu| \ll \lambda$ et, en utilisant le point 5 de la proposition 2.14, cela contredit également le point 1.
Ceci achève la preuve du théorème 2.19. □

2.2.3 Conséquences du théorème de Lebesgue-Radon-Nicodym

Les mesures que nous considérons sont σ-finies.

Théorème 2.21 (Décompostion polaire d'une mesure complexe)**.** *Soit μ une mesure complexe sur $(X, \mathcal{S})$. Alors il existe h mesurable telle que $|h(x)| = 1$ pour tout $x \in X$ et $d\mu = h\, d|\mu|$.*

Ce résultat est le pendant pour les mesures complexes de la décomposition polaire des nombres complexes.

Démonstration. On a bien sûr $\mu \ll |\mu|$. Donc le théorème 2.15 garantit l'existence de $h \in L^1(|\mu|)$ telle que $d\mu = h\, d|\mu|$.
Pour $r > 0$, soit $A^r = \{x;\ |h(x)| < r\}$ et soit $(A^r_j)_j$ une partition de A^r. Alors

$$\sum_j |\mu(A^r_j)| = \sum_j \left| \int_{A^r_j} h d|\mu| \right| \leq \sum_j r|\mu|(A^r_j) = r|\mu|(A_r).$$

En maximisant sur les partitions, on obtient que $r|\mu|(A_r) \geq |\mu|(A_r)$. Donc si $r < 1$, $|\mu|(A_r) = 0$. Ainsi $|h| \geq 1$ $|\mu|$-presque partout.
D'autre part, si $|\mu|(E) > 0$, comme $d\mu = h\, d|\mu|$, on a

$$\left| \frac{1}{|\mu|(E)} \int_E h\, d|\mu| \right| = \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leq 1. \tag{2.9}$$

Ainsi $|h| \leq 1$ $|\mu|$-presque partout. En effet, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, $|\mu|(\{1/\varepsilon \geq |h(x)| > 1 + \varepsilon\}) > 0$. On écrit $h(x) = e^{i\theta(x)}|h(x)|$ avec θ mesurable à valeurs dans $[0, 2\pi[$. Ainsi, pour tout $n > 0$, il existe un entier $1 \leq k \leq n$ tel que $|\mu|(E_{n,\varepsilon}) > 0$ où on a posé $E_{n,\varepsilon} := \{1/\varepsilon \geq |h(x)| > 1 + \varepsilon$ et $n\theta(x) \in 2\pi[k-1, k[\}$; alors

$$\frac{1}{|\mu|(E_{n,\varepsilon})} \int_{E_{n,\varepsilon}} h\, d|\mu| = e^{2i\pi k/n} \frac{1}{|\mu|(E_{n,\varepsilon})} \int_{E_{n,\varepsilon}} |h|\, d|\mu| + \frac{1}{|\mu|(E_{n,\varepsilon})} \int_{E_{n,\varepsilon}} |h(x)| \left(e^{i\theta(x)} - e^{2i\pi k/n} \right) d|\mu|.$$

Ainsi, si n est assez grand, on obtient

$$\left| \frac{1}{|\mu|(E_{n,\varepsilon})} \int_{E_{n,\varepsilon}} h\, d|\mu| \right| \geq 1 + \varepsilon - \frac{1}{n\varepsilon} > 1.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, $|\mu|(\{1/\varepsilon \geq |h(x)| > 1 + \varepsilon\}) = 0$. Donc, comme $h \in L^1(|\mu|)$, on a $|h| \leq 1$ $|\mu|$-presque partout.
On voir que, $|\mu|$-presque partout, $|h| = 1$. On peut donc prendre $|h| = 1$ en tout point sans modifier la validité de $d\mu = h\, d|\mu|$. Ceci achève la preuve du théorème 2.21. □

Théorème 2.22. *Soient λ une mesure positive sur $(X, \mathcal{S})$ et $g \in L^1(\lambda)$. Si on pose $d\mu = g\, d\lambda$ alors $d|\mu| = |g|\, d\lambda$.*

Démonstration. Par le théorème 2.21, on peut écrire $d\mu = h\, d|\mu|$ avec $|h| = 1$. Par hypothèse, $d\mu = g\, d\lambda$ et $|\lambda| = \lambda$ (comme λ est positive). Ainsi $d|\mu| = \overline{h}\, d\mu = \overline{h}\, g\, d\lambda$. Or λ et μ sont positives ; donc $\overline{h}g$ est positive λ-presque partout ; comme $|h| = 1$, λ-presque partout, on a $\overline{h}g = |g|$. □

Théorème 2.23 (Décompostion de Hahn)**.** *Soit μ une mesure réelle sur $(X, \mathcal{S})$. Alors il existe deux ensembles A^+ et A^- mesurables tels que $A^+ \cup A^- = X$, $A^+ \cap A^- = \emptyset$ et tels que les variations positives et négatives de μ vérifient $d\mu^+ = \mathbf{1}_{A^+}\, d\mu$ et $d\mu^- = \mathbf{1}_{A^-}\, d\mu$.*

Ce théorème nous dit que l'on peut trouver deux ensembles disjoints tels que l'un porte toute la masse positive de μ et l'autre toute sa masse négative.

Démonstration. Par le théorème 2.21, on écrit $d\mu = h\,d|\mu|$ où $|h| = 1$. Comme μ est réelle, h l'est aussi. Donc h ne prend que les valeurs ± 1. Posons $A^{\pm} = \{x;\ h(x) = \pm 1\}$. Comme $\mu^+ = 1/2(|\mu|+\mu)$ et $[1/2(h+1)]_{|A^+} = 1$ et $[1/2(h+1)]_{|A^-} = 0$, pour $E \in \mathcal{S}$, on a

$$\mu^+(E) = \frac{1}{2}\int_E (1+h)d|\mu| = \int_{E\cap A^+} hd|\mu| = \mu(E\cap A^+).$$

Donc $d\mu^+ = \mathbf{1}_{A^+}\, d\mu$.
Comme $\mu(E) = \mu(E\cap A^+) + \mu(E\cap A^-)$ et comme $\mu = \mu^+ - \mu^-$, on a $d\mu^- = \mathbf{1}_{A^-}\, d\mu$. □

Corollaire 2.24. *Si $\mu = \mu_1 - \mu_2$ où μ_1 et μ_2 sont des mesures positives, alors $\mu_1 \geq \mu^+$ et $\mu_2 \geq \mu^-$.*

On voit ainsi que μ^+ et μ^-, les variations positive et négative de μ, sont minimales parmi toutes les décompositions possibles de μ en différence de deux mesures positives.

Preuve du corollaire 2.24. Supposons que $\mu = \mu_1 - \mu_2$. En conservant les notations du théorème 2.23 et de sa preuve, comme $\mu \leq \mu_1$, on a

$$\mu^+(E) = \mu(E\cap A^+) \leq \lambda_1(E\cap A^+) \leq \lambda_1(E).$$

Clairement on a $\mu^- = (-\mu)^+$; l'inégalité $\mu_2 \geq \mu^-$ suit. □

Le dual de $L^p(\lambda)$

Soit $1 \leq p \leq \infty$ et λ une mesure positive sur $(X, \mathcal{S})$. Soit q l'exposant conjugué de p i.e. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors, toute fonction $g \in L^q(\lambda)$ fournit une forme linéaire continue (bornée) $\Phi_g :\ L^p(\lambda) \to \mathbb{C}$ définie par

$$\Phi_g(f) = \int_X fg\,d\lambda, \quad \forall f \in L^p(\lambda). \tag{2.10}$$

C'est un corollaire immédiat de l'inégalité de Hölder (proposition 1.46).
Quand $p = 2$, on est dans le cadre hilbertien et on sait que ce résultat a une réciproque : par le théorème de Riesz (cf [1, Chapitre 4.4]), toute forme linéaire continue sur $L^2(\lambda)$ peut être représentée sous la forme (2.10) où $g \in L^2(\lambda)$.
Nous allons maintenant voir que cela reste vrai quand $1 \leq p < +\infty$.

Théorème 2.25 (Le dual de L^p est isométriquement isomorphe à L^q)**.** *Soient $p \in [1, +\infty[$ et λ une mesure σ-finie positive sur X. Soit Φ une forme linéaire continue sur $L^p(\lambda)$. Alors il existe une unique fonctions g dans $L^q(\lambda)$ (où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$) telle que $\Phi = \Phi_g$ définie par (2.10). De plus, on a $\|\Phi\| = \|g\|_q$.*

Démonstration. 1 L'unicité est claire : si on a deux telles fonctions, disons, g et $\tilde{g}$, alors $\displaystyle\int_X f(g-\tilde{g})d\lambda = 0$ pour toute f dans $L^p(\lambda)$; soit E telle que $\lambda(E) < +\infty$ alors la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \mathbf{1}_E \dfrac{\overline{g(x) - \tilde{g}(x)}}{|g(x) - \tilde{g}(x)|} & \text{si } g(x) \neq \tilde{g}(x), \\ 0 \text{ sinon.} & \end{cases}$$

est dans $L^q(\lambda)$ et $\int_X f(g-\tilde{g})d\lambda = \int_E |g-\tilde{g}|d\lambda$. Ainsi $g - \tilde{g}$ s'annule sur tout ensemble de mesure finie. Par σ-finitude, elle est nulle.
Pour construire g, commençons par supposer que $\lambda(X) < +\infty$. Pour $E \subset X$ mesurable, on définit $\mu(E) =$

$\Phi(\mathbf{1}_E)$. Comme Φ est linéaire, μ est additive. Montrons qu'elle est σ-additive. Soit E mesurable partitionné en $E = \cup_{j\geq 1} E_j$. Posons $A_k = \cup_{1\leq j\leq k} E_j$. Comme $A_k \subset E$, on a $\|\mathbf{1}_E - \mathbf{1}_{A_k}\|_p = (\lambda(E\setminus A_k))^{1/p} \underset{k\to+\infty}{\to} 0$ par convergence monotone. Comme Φ est continue, on a $\mu(A_k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \mu(E_j) \underset{k\to+\infty}{\to} \mu(E)$. Ainsi μ est σ-additive. Clairement, si $\lambda(E) = 0$ alors $\mu(E) = 0$ (car $\mathbf{1}_E$ est nulle λ-presque partout). Ainsi $\mu \ll \lambda$ et le théorème 2.15 garantit l'existence de $g \in L^1(\lambda)$ telle que pour, tout $E \subset X$ mesurable, on a

$$\Phi(\mathbf{1}_E) = \int_E g\, d\lambda = \int_X \mathbf{1}_E\, g\, d\lambda.$$

Par linéarité, on a

$$\Phi(f) = \int_X f g\, d\lambda. \tag{2.11}$$

si f est simple et mesurable, puis, pour $f \in L^\infty(\lambda)$. En effet, comme toute fonction dans $L^\infty(\lambda)$ est limite uniforme d'une suite de fonctions simples par la remarque 1.42 et que la convergence uniforme implique celle dans $L^p(\lambda)$ comme $\lambda(X) < +\infty$, on obtient l'égalité comme résultat de la continuité de Φ.
On veut maintenant montrer que $g \in L^q(\lambda)$. On va distinguer deux cas selon que $p = 1$ ou $1 < p < +\infty$.
Cas 1 : $p = 1$. Alors, pour $\lambda(E) \in]0, +\infty[$, (2.11) implique, en posant $f(x) = \mathbf{1}_{E\cap\{x; |g(x)>0\}}(x)\overline{g(x)}/|g(x)|$

$$\frac{1}{\lambda(E)} \int_E |g|\, d\lambda = \frac{\phi(f)}{\lambda(E)} \leq \|\Phi\| \frac{\|f\|_1}{\lambda(E)} \leq \|\Phi\| \frac{\|\mathbf{1}_E\|_1}{\lambda(E)} = \|\Phi\|.$$

On a alors que $|g(x)| \leq \|\Phi\|$ presque partout i.e. que $\|g\|_\infty \leq \|\Phi\|$.
Cas 2 : $1 < p < +\infty$. La fonction $\alpha = \mathbf{1}_{\{x;\ g(x)=0\}} + \dfrac{\overline{g(x)}}{|g(x)|}\mathbf{1}_{\{x;\ g(x)\neq 0\}}$ est mesurable et satisfait $|\alpha| = 1$ et $\alpha g = |g|$. Pour $n \geq 1$, on définit $E_n = \{x;\ |g(x)| \leq n\}$ et $f_n = \mathbf{1}_{E_n}|g|^{q-1}\alpha$. Alors $|f_n|^p = |g|^q$ sur E_n, $f_n \in L^\infty(\lambda)$ et (2.11) nous dit que

$$\int_{E_n} |g|^q d\lambda = \int_X f_n\, g\, d\lambda = \Phi(f_n) \leq \|\Phi\| \left(\int_{E_n} |g|^q d\lambda\right)^{1/p}.$$

Ainsi

$$\int_X \mathbf{1}_{E_n}|g|^q d\lambda \leq \|\Phi\|^q.$$

On peut maintenant appliquer le théorème de convergence monotone pour obtenir $\|g\|_q \leq \|\Phi\|$.
On a donc obtenu que $g \in L^q(\lambda)$ et que sa norme satisfait l'égalité annoncée dans le théorème 2.25.
Ceci nous dit que les deux cotés de l'égalité (2.11) sont continues sur $L^p(\lambda)$ mais elles coïncident sur $L^\infty(\lambda)$ qui dense dans $L^p(\lambda)$ (car $\lambda(X) < +\infty$) ; elles coïncident donc sur $L^p(\lambda)$ ce qui achève la preuve du théorème 2.25 quand $\lambda(X) < +\infty$.
Quand $\lambda(X) = +\infty$ et λ σ-finie, on prend $w \in L^1(\lambda)$ comme dans le lemme 2.16. Alors $d\tilde{\lambda} = w\, d\lambda$ est une mesure positive finie sur $\mathcal{S}$. Comme w est strictement positive, l'application $f \mapsto w^{1/p} f$ est une isométrie linéaire de $L^p(\tilde{\lambda})$ à valeurs dans $L^p(\lambda)$. Ainsi $\Psi(\cdot) = \Phi(w^{1/p}\,\cdot)$ est linéaire et bornée sur $L^p(\tilde{\lambda})$ et satisfait $\|\Psi\|_{L^p(\tilde{\lambda})} = \|\Phi\|_{L^p(\lambda)}$. Donc il existe $h \in L^q(\tilde{\lambda})$ telle que $\Psi(f) = \displaystyle\int_X f\, h\, d\tilde{\lambda}$. Posons $g = w^{1/q}h$. Alors

$$\int_X |g|^q\, d\lambda = \int_X |h|^q\, d\tilde{\lambda} = \|\Psi\|^q_{L^p(\tilde{\lambda})} = \|\Phi\|^q_{L^p(\lambda)}.$$

D'autre part, pour $f \in L^p(\lambda)$, on calcule

$$\Phi(f) = \Psi(w^{-1/p} f) = \int_X w^{-1/p}\, f\, h d\tilde{\lambda} = \int_X f\, g\, d\lambda.$$

Ceci complète la preuve du théorème 2.25. □

Remarque 2.26. La construction faite dans la preuve précédente est, dans le cas $p = q = 2$, celle qui a permis la preuve du théorème de Lebesgue-Radon-Nicodym. Et celui-ci est la clé de voûte de la preuve du cas général. La preuve dans le cas $p = 2$ repose elle sur le théorème de représentation de Riesz pour les espaces de Hilbert.

Le théorème de représentation de Riesz : le dual de $\mathcal{C}_0(X)$

Soit X un espace de Hausdorff localement compact. On va maintenant voir le pendant du théorème de représentation de Riesz des fonctionnelles positives (théorème 1.19) dans le cas complexe. Pour pallier le manque de positivité, il est crucial d'ajouter une hypothèse de continuité des formes que l'on veut représenter. On va donc représenter les formes linéaires bornée sur $\mathcal{C}_c(X)$ (muni de la norme uniforme). Comme $\mathcal{C}_0(X)$ est le complété de $\mathcal{C}_c(X)$ pour la norme uniforme, une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_c(X)$ se prolonge de façon unique en une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0(X)$. On travaillera donc sur cet espace.
On dit qu'une mesure borélienne complexe μ est *régulière* si sa variation totale $|\mu|$ l'est (au sens de la définition 1.31).
Clairement, si μ est une mesure de Borel complexe sur X, la forme

$$f \mapsto \int_X f\, d\mu \tag{2.12}$$

est bien définie et continue sur $\mathcal{C}_0(X)$. En effet, par le théorème 2.21, on peut écrire $d\mu = h\, d|\mu|$ où $|h| = 1$; ainsi

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| = \left|\int_X f\, h\, d|\mu|\right| \leq \|f\, h\|_\infty\, |\mu|(X) = |\mu|(X)\, \|f\|_\infty.$$

Voyons maintenant que la réciproque est vraie.

Théorème 2.27 (Le théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit X un espace de Hausdorff localement compact. Alors toute forme linéaire bornée sur $\mathcal{C}_0(X)$, disons, Φ peut être représentée d'une unique manière par une mesure de Borel complexe régulière, disons, μ, au sens où*

$$\Phi(f) = \int_X f d\mu \tag{2.13}$$

pour tout $f \in \mathcal{C}_0(X)$. De plus, on a alors $\|\Phi\| = |\mu|(X)$.

Démonstration. Commençons par démontrer l'unicité. Par linéarité de l'expression (2.13) en μ, il suffit de montrer que, si μ est une mesure de Borel complexe régulière telle que $\int_X f\, d\mu = 0$ pour tout $f \in \mathcal{C}_0(X)$ alors $\mu = 0$. Pour cela, par le théorème 2.21, on décompose $\mu = h|\mu|$ où $|h| = 1$. Pour $f \in \mathcal{C}_0(X)$, on a alors

$$|\mu|(X) = \int_X (\overline{h} - f) h d|\mu| \leq \int_X |\overline{h} - f| h d|\mu|. \tag{2.14}$$

Or $\overline{h} \in L^1(|\mu|)$ (car $|\mu|(X) < +\infty$) et $\mathcal{C}_0(X)$ est dense dans $L^1(|\mu|)$. On peut donc faire tendre f vers $\overline{h}$ dans (2.14) ce qui donne $|\mu|(X) = 0$. Ainsi $|\mu| = 0$ donc $\mu = 0$.
Soit Φ une forme linaire bornée sur $\mathcal{C}_0(X)$. On peut supposer que $\|\Phi\| = 1$. On démontre

Lemme 2.28. *Il existe Λ, une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(X)$, telle que*

$$|\Phi(f)| \leq \Lambda(|f|) \leq \|f\|_\infty, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(X). \tag{2.15}$$

Supposons ce résultat démontré. Alors, le théorème 1.19 définit une mesure de Borel positive, disons λ qui représente Λ au sens du point 1 de ce théorème. Par le théorème de convergence monotone, comme X localement compact, on sait que $\lambda(X) = \sup\{\Lambda f;\ 0 \leq f \leq 1,\ f \in \mathcal{C}_c(X)\}$. De (2.15), on tire alors que $\lambda(X) \leq 1$ et le théorème 1.19 nous que λ est régulière.
De (2.15), on tire aussi que

$$|\Phi(f)| \leq \Lambda(|f|) = \int_X |f|\,d\lambda, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(X). \tag{2.16}$$

Comme $\mathcal{C}_c(X)$ est dense dans $L^1(\lambda)$ par le théorème 1.68, on peut prolonger Φ en une forme linéaire bornée sur $L^1(\lambda)$ que l'on appellera aussi Φ dans la suite : en effet, pour $f \in L^1(\lambda)$, on prend $(f_n)_n$ une suite dans $\mathcal{C}_c(X)$ approchant f ; comme $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $L^1(\lambda)$, (2.16) nous dit que $(\Phi(f_n))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc, converge vers, disons, $\Phi(f)$; on voit facilement que $\Phi(f)$ ne dépend pas de la suite utilisée pour approcher f, que $f \mapsto \Phi(f)$ est linéaire et continue sur $L^1(\lambda)$ (grâce à (2.16)).
Comme Φ est continue sur $L^1(\lambda)$, le théorème 2.25 nous dit qu'il existe $g \in L^\infty(\lambda)$ telle que

$$\Phi(f) = \int_X f\,g\,d\lambda, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(X). \tag{2.17}$$

L'inégalité (2.16) nous dit alors que $\|g\|_\infty \leq 1$.
Les deux cotés de (2.17) étant continus sur $\mathcal{C}_0(X)$, la densité de $\mathcal{C}_c(X)$ dans $\mathcal{C}_0(X)$ nous dit que (2.17) s'étend aux fonctions f de $\mathcal{C}_0(X)$ ce qui n'est autre que (2.13) si on pose $d\mu = g\,d\lambda$.
Comme $\|\Phi\| = 1$, par (2.17), on sait que

$$\int_X |g|d\lambda \geq \sup\{|\Phi(f)| :\ f \in \mathcal{C}_0(X),\ \|f\|_\infty \leq 1\} = 1. \tag{2.18}$$

D'autre part, on sait déjà que $\lambda(X) \leq 1$ et $\|g\|_\infty \leq 1$. Ainsi (2.18) n'est possible que si $\lambda(X) = 1$ et $|g(x)| = 1$ pour λ-presque tout x. Par le théorème 2.21, on a alors $d|\mu| = |g[\,d\lambda = d\lambda$, donc aussi, $|\mu|(X) = \lambda(X) = 1$.
Pour achever la preuve du théorème 2.27, il ne nous reste donc qu'à démontrer le lemme 2.28.

Preuve du lemme 2.28. Notons $\mathcal{C}_c^+(X)$ l'ensemble des fonctions dans $\mathcal{C}_c(X)$ à valeurs positives. Pour $f \in \mathcal{C}_c^+(X)$, posons alors

$$\Lambda f = \sup\{|\Phi(h)|;\ h \in \mathcal{C}_c(X),\ |h| \leq f\}. \tag{2.19}$$

On voit que Λ vérifie (2.15). De plus, clairement $\Lambda f \geq 0$ (ce qui entraîne que $\Lambda f \geq \Lambda g$ pour $f \geq g \geq 0$) et $\Lambda(cf) = c\Lambda f$ si c est un réel positif.
Montrons que Λ est additive i.e. $\Lambda(f+g) = \Lambda\,f + \Lambda\,g$. Soit f et g dans $\mathcal{C}_c^+(X)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $u \in \mathcal{C}_c(X)$ et $v \in \mathcal{C}_c(X)$ tels que $|u| \leq f$, $|v| \leq g$, $\Lambda f \leq |\Phi(u)| + \varepsilon$ et $\Lambda g \leq |\Phi(v)| + \varepsilon$. Soit α et β tels que $|\alpha| = |\beta| = 1$ et $\alpha\,\Phi(u) = |\Phi(u)|$ et $\beta\,\Phi(v) = |\Phi(v)|$. Alors

$$\Lambda\,f + \Lambda\,g \leq |\Phi(u)| + |\Phi(v)| + 2\varepsilon = \phi(\alpha\,u + \beta\,v) + 2\varepsilon \leq \Lambda(|u| + |v|) + 2\varepsilon \leq \Lambda(f+g) + 2\varepsilon.$$

En laissant ε tendre vers 0, On obtient donc que Λ est sur-additive i.e. $\Lambda\,f + \Lambda\,g \leq \Lambda(f+g)$.
Soit maintenant $h \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $|h| \leq f + g$ et $V := \{x;\ f(x) + g(x) > 0\}$. Posons

$$f_1 = \frac{f\,h}{f+g}\mathbf{1}_V \quad \text{et} \quad g_1 = \frac{g\,h}{f+g}\mathbf{1}_V.$$

Clairement f_1 et g_1 sont continues sur X et à support compact. Comme $f_1 + g_1 = h$ et que $|f_1| \leq f$ et $|g_1| \leq g$, on a

$$|\Phi(h)| = |\Phi(f_1) + \Phi(g_1)| \leq |\Phi(f_1)| + |\Phi(g_1)| \leq \Lambda f + \Lambda g.$$

Par (2.19), on obtient que Λ est sous-additive i.e. $\Lambda(f+g) \leq \Lambda\, f + \Lambda\, g$. Ainsi, Λ est additive.
Pour prolonger Λ aux fonctions $f \in \mathcal{C}_c(X)$ à valeurs réelles, comme $f = \frac{1}{2}(|f|+f) - \frac{1}{2}(|f|-f)$ et que $|f|+f$ et $|f|-f$ sont positives et dans $\mathcal{C}_c(X)$, on pose

$$\Lambda\, f = \frac{1}{2}\Lambda(|f|+f) - \frac{1}{2}\Lambda(|f|-f)$$

En utilisant la propriété d'additivité de Λ pour les fonctions positives, on vérifie alors facilement que si on décompose $f = \tilde{f}_+ - \tilde{f}_-$ où $f_\pm$ sont continues positives, alors, on a $\Lambda f = \Lambda \tilde{f}_+ - \Lambda \tilde{f}_-$. Ceci entraîne que Λ est $\mathbb{R}$-linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions de $\mathcal{C}_c(X)$ à valeurs réelles.
Enfin, pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$ à valeurs complexes, on pose

$$\Lambda\, f = \Lambda(\operatorname{Re} f) + i\Lambda(\operatorname{Im} f).$$

On vérifie alors simplement que Λ ainsi définie est $\mathbb{C}$-linéaire sur $\mathcal{C}_c(X)$ et vérifie (2.15) ce qui achève la preuve du lemme 2.28. $\square$

La preuve du théorème 2.27 est donc maintenant complète. $\square$

Exercice 2.29. Soit μ une mesure de Borel positive sur X un espace de Hausdorff localement compact. On considère $j : L^1(d\mu) \to (C_0(X))^*$ définit par $j(f) = f d\mu$, $f \in L^1(d\mu)$.

1. Montrer que j est isométrique.
2. Montrer que j est injective si et seulement si $\operatorname{supp} d\mu = X$.

2.3 Différentiation

2.3.1 Dérivée d'une mesure

Le prochain résultat sert à motiver les définitions qui lui font suite.

Théorème 2.30. *Soient λ_1 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et μ une mesure de Borel complexe sur $\mathbb{R}$. On définit F_μ, la fonction de répartition de μ : pour $x \in \mathbb{R}$, $F_\mu(x) = \mu(]-\infty, x[)$.*
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, les deux assertions suivantes sont équivalentes

1. *F_μ est dérivable en x et $F'_\mu(x) = z$*
2. *$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que, pour I intervalle ouvert contenant x, si $0 < \lambda_1(I) < \delta$ alors $\left|\dfrac{\mu(I)}{\lambda_1(I)} - z\right| < \varepsilon$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, nous supposons $x = 0$ et $z = 0$: pour voir cela, on choisit χ une fonction continue à support compact égale à 1 au voisinage de x et on considère la mesure complexe $d\mu - z\,\chi\, d\lambda_1$ que l'on translate de façon à déplacer le point x en 0.
Supposons 1. Si F_μ est dérivable en 0, elle est continue en ce point donc $\mu(\{0\}) = 0$. D'autre part, si $x < x' < 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{F_\mu(0) - F_\mu(x)}{x} - \frac{F_\mu(0) - F_\mu(x')}{x'} &= (F_\mu(0) - F_\mu(x'))\frac{x'-x}{xx'} + \frac{F_\mu(x') - F_\mu(x)}{x} \\ &= (F_\mu(0) - F_\mu(x'))\frac{x'-x}{xx'} + \frac{\mu(\{x\})}{x} + \frac{\mu(]x,x'[)}{x}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $-\delta < x < x' < 0$, on a

$$\left|\frac{F_\mu(0) - F_\mu(x)}{x}\right| + \left|\frac{F_\mu(0) - F_\mu(x')}{x'}\right| \leq \varepsilon/2.$$

Pour tout $x \in]-\delta, 0[$, on peut choisir x' proche de x tel que $|x' - x| + |\mu(]x, x'[)| \leq \varepsilon|x|/2$. Ainsi, tout $x \in]-\delta, 0[$, par (2.20), on obtient $\left|\frac{\mu(\{x\})}{x}\right| \leq \varepsilon$. On a donc montré que $\frac{\mu(\{x\})}{x} \underset{x\to 0^-}{\to} 0$.
Donc, pour $I =]a, b[\ni 0$, on a

$$\frac{\mu(I)}{\lambda_1(I)} = \frac{\mu(]a, 0[) + \mu(]0, b[)}{b - a} = \frac{b}{b - a}\frac{F_\mu(b) - F_\mu(0)}{b} + \frac{a}{b - a}\frac{F_\mu(0) - F_\mu(a)}{a} + \frac{\mu(\{a\})}{a}\frac{a}{b - a}.$$

Or $-1 < a(b - a)^{-1} < 0 < b(b - a)^{-1} < 1$ car $a < 0 < b$. Ainsi

$$\left|\frac{\mu(I)}{\lambda_1(I)}\right| \leq \left|\frac{F_\mu(b) - F_\mu(0)}{b}\right| + \left|\frac{F_\mu(0) - F_\mu(a)}{a}\right| + \left|\frac{\mu(\{a\})}{a}\right|.$$

On obtient donc 2.
Réciproquement, supposons 2 vérifié. Alors clairement $\mu(\{0\}) = 0$ et F_μ est continue en 0. Pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{F_\mu(x) - F_\mu(0)}{x} = \begin{cases} \frac{\mu([0,x[)}{x} & \text{si } x > 0, \\ \frac{\mu([x,0[)}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Si 2 est vérifié alors on a également 2 où $I =]a, b[$ est remplacé par $]a, b]$, $[a, b[$ ou $[a, b]$; pour voir cela par exemple pour $[a, b]$, on calcule pour $[a, b] \subset]a', b'[$

$$\frac{\mu(]a', b'[)}{\lambda_1(]a', b'[)} - \frac{\mu([a, b])}{\lambda_1([a, b])} = \frac{\mu(]a', b'[)}{b' - a'} - \frac{\mu([a, b])}{b - a} = \frac{\mu(]a', a[\cup]b, b'[)}{b - a} + \frac{\mu(]a', b'[)}{b' - a'}\frac{b' - b + a - a'}{b - a} \tag{2.22}$$

Soit $I =]a, b[$ vérifiant 2 (pour $\varepsilon/3$ et δ). Alors on peut choisir $]a', b'[\supseteq [a, b]$ tel que $\lambda_1(]a', b'[) < \delta$, $|\mu(]a', a[\cup]b, b'[)| \leq \varepsilon/3(b - a)$ et $(b' - b + a - a') \leq (b - a)/3$. Par (2.22), on obtient

$$\left|\frac{\mu([a, b])}{\lambda_1([a, b])}\right| \leq \left|\frac{\mu(]a', b'[)}{\lambda_1(]a', b'[)}\right| + \left|\frac{\mu(]a', a[\cup]b, b'[)}{b - a}\right| + \left|\frac{\mu(]a', b'[)}{b' - a'}\right| \left|\frac{b' - b + a - a'}{b - a}\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

De la même façon, on voit que si l'on prend $a = 0$ ou $b = 0$ (et $a \neq b$) dans 2, la conclusion reste vraie pour des intervalles I de la forme $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ ou $[a, b]$. Ceci nous dit que le quotient défini en (2.21) tend vers 0 quand x tend vers 0. Ainsi F_μ est dérivable en 0 et sa dérivée y est nulle.
Le théorème 2.30 est démontré. $\square$

Le théorème 2.30 suggère de définir la dérivée de la mesure μ en x comme la limite de $\mu(I)/\lambda(I)$ quand l'intervalle I rétrécit vers le point x. En dimension plus grande, la généralisation naturelle est de comparer les mesures sur des voisinages symétriques d'un point.

Définition 2.31. Soit μ une mesure de Borel complexe sur $\mathbb{R}^d$. On rappelle que λ_d est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

1. La *dérivée symétrique* de μ en $x \in \mathbb{R}^d$ est définie, quand celle-ci existe, comme la limite

$$D\mu(x) := \lim_{r\to 0} \frac{\mu(B(x, r))}{\lambda_d(B(x, r))}. \tag{2.23}$$

2. La *fonction maximale* de μ en $x \in \mathbb{R}^d$ est définie comme $M\mu(x) := \sup_{r>0} \frac{|\mu|(B(x,r))}{\lambda_d(B(x,r))}$.
3. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la *fonction maximale* de f est la fonction maximale de la mesure $f\,d\lambda_d$; elle est notée Mf.

Remarquons que, par définition, $M\mu = M|\mu|$.

Lemme 2.32. *La fonction maximale $M\mu$ est semi-continue inférieurement, donc, mesurable.*

Démonstration. Quitte à la remplacer par $|\mu|$, on peut supposer que μ est positive. Soient $T > 0$ et $E = \{x;\ M\mu(x) > T\}$. Fixons $x \in E$. Alors, il existe $r > 0$ et $t > T$ tel que $\mu(B(x,r)) = t\lambda_d(B(x,r))$ et on peut trouver $\delta > 0$ tel que $(r+\delta)^d < r^d t/T$. Aussi, si $|x-y| < \delta$, on a $B(x,r) \subset B(y, r+\delta)$; par conséquent

$$\mu(B(y,r+\delta)) \geq t\lambda_d(B(x,r)) = t\,\left[\frac{r}{r+\delta}\right]^d \lambda_d(B(y,r+\delta)) > T\,\lambda_d(B(y,r+\delta)).$$

Donc $B(x,\delta) \subset E$. E est donc ouvert. □

On va commencer par estimer la mesure des ouverts $\{x; M\mu(x) > t\}$.

Théorème 2.33. *Soit μ une mesure de Borel complexe. Alors pour $t > 0$, on a*

$$\lambda_d(\{x; M\mu(x) > t\}) \leq 3^d t^{-1}\|\mu\| \quad \textit{où} \quad \|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R}^d). \tag{2.24}$$

Démonstration. On commence par montrer le

Lemme 2.34. *Soit $W = \bigcup_{1\leq i\leq N} B(x_i, r_i)$. Alors il existe $S \subset \{1,\ldots,N\}$ tel que*

1. *les boules $(B(x_i,r_i))_{i\in S}$ sont deux à deux disjointes ;*
2. *$W \subset \bigcup_{i\in S} B(x_i, 3r_i)$;*
3. *$\lambda_d(W) \leq 3^d \sum_{i\in S} \lambda_d(B(x_i,r_i))$.*

Démonstration. On notera $B_i = B(x_i,r_i)$, $1 \leq i \leq N$, les boules composant W. On suppose que leurs rayons sont ordonnés de façon décroissante : $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_N$. Posons $i_1 = 1$. Écartons toutes les boules rencontrant B_{i_1}. Soit B_{i_2} la première qui en est disjointe. Écartons toutes les boules rencontrant B_{i_2} et soit i_3, l'indice de la première boule ne rencontrant ni B_{i_1} ni B_{i_2}. On poursuit ce processus jusqu'à épuisement de la famille de boules considérée (qui est finie). On appelle $S = \{i_1, i_2, \cdots\}$ les indices ainsi construits.
On a clairement 1. D'autre part, chaque boule écartée rencontrant l'une des B_{i_j} est contenue dans $B(x_{i_j}, 3r_{i_j})$. Ceci nous donne 2. Enfin 3 est une conséquence de 2 car $\lambda_d(B(x,3r)) = 3^d\lambda_d(B(x,r))$. □

Fixons μ et t. Soit K un compact de $\{x; M\mu(x) > t\}$. Pour chaque point x de K, il existe une boule B centrée en x telle que $|\mu|(B) > t\lambda_d(B)$. On peut de ce recouvrement de K par des boules ouvertes extraire un recouvrement fini, disons, $K \subset B_1 \cup \cdots \cup B_n$; pour S construit comme dans le lemme 2.34, on a alors

$$\lambda_d(K) \leq 3^d \sum_{i\in S} \lambda_d(B_i) \leq 3^d t^{-1} \sum_{i\in S} |\mu|(B_i) \leq 3^d t^{-1}\|\mu\|.$$

Dans la dernière étape, on a utilisé le fait que les $(B_i)_{1\leq i\leq n}$ sont deux à deux disjointes. On obtient alors (2.24) en prenant le supremum sur les compacts K par la régularité intérieure de la mesure de Lebesgue.
Ceci achève la preuve du théorème 2.33. □

Définition 2.35. Soit f Lebesgue mesurable sur $\mathbb{R}^d$. On dit que f est *faiblement intégrable* ou appartient L^1 *faible* si la fonction $x \mapsto x\,\lambda_d(\{y \in \mathbb{R}^d;\ |f(y)| > x\})$ est bornée sur $]0, +\infty[$.
L'ensemble des fonctions mesurables faiblement intégrables sur $\mathbb{R}^d$ est noté $L^1_w(\mathbb{R}^d)$.

L'inégalité (de Markov)

$$\lambda_d(\{y \in \mathbb{R}^d;\ |f(y)| > x\}) \leq x^{-1}\|f\|_1 \tag{2.25}$$

garantit qu'une fonction intégrable est faiblement intégrable.
Le théorème 2.33 dit lui que l'opérateur maximal i.e. l'application $f \mapsto Mf$ va de $L^1(\mathbb{R}^d)$ dans $L^1_w(\mathbb{R}^d)$: pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et tout $t > 0$, on a

$$\lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d;\ Mf(x) > t\}) \leq 3^d\lambda^{-1}\|f\|_1.$$

2.3.2 Points de Lebesgue

Définition 2.36. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On dit que $x \in \mathbb{R}^d$ est *un point de Lebesgue* de f si

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\lambda_d(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|d\lambda_d(y) = 0. \tag{2.26}$$

Clairement, un point de continuité de f est un point de Lebesgue de f. Mais il n'est pas clair à priori qu'une fonction intégrable ait un point de Lebesgue. Néanmoins on démontre

Théorème 2.37. *Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, presque tout point de $\mathbb{R}^d$ est point de Lebesgue de f.*

Démonstration. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$, on pose

$$(T_r f)(x) = \frac{1}{\lambda_d(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|d\lambda_d(y) \quad \text{et} \quad (Tf)(x) = \limsup_{r\searrow 0}(T_r f)(x). \tag{2.27}$$

On veut donc démontrer que $Tf = 0$ λ_d-presque partout.
Remarquons d'abord que si $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ alors Tg est nulle.
Soit $n \geq 1$. Il existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ telle que si $h = f - g$ alors $\|h\|_1 \leq 1/n$. On calcule

$$(T_r h)(x) \leq \frac{1}{\lambda_d(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |h(y)|\, d\lambda_d(y) + |h(x)|$$

donc en prenant le supremum sur $r > 0$, on obtient $Th \leq Mh + |h|$. Comme $T_r f \leq T_r g + T_r h$, on en déduit $Tf \leq Mh + |h|$. Ainsi pour $y > 0$, on a

$$\{x \in \mathbb{R}^d;\ Tf(x) > 2y\} \subset \{x \in \mathbb{R}^d;\ Mh(x) > y\} \cup \{x \in \mathbb{R}^d;\ |h(x)| > y\} \tag{2.28}$$

Notons $E(y,n)$ la réunion dans le membre de droite de (2.28). Comme $\|h\|_1 < 1/n$, le théorème 2.33 et l'inégalité (2.25) assurent que

$$\lambda_d(E(y,n)) \leq (3^d + 1)\frac{1}{y\,n}. \tag{2.29}$$

Le membre de gauche de (2.28) étant indépendant de n, on a $\{x \in \mathbb{R}^d;\ Tf(x) > 2y\} \subset \bigcap_{n\geq 1} E(y,n)$. Or par (2.29), cette intersection est de mesure de Lebesgue nulle. La mesure de Lebesgue étant complète, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^d;\ Tf(x) > 2y\}$ est mesurable de mesure nulle. Ainsi $\bigcup_{n\geq 1}\{x \in \mathbb{R}^d;\ Tf(x) > 1/n\}$ est de mesure nulle ; donc Tf est nulle presque partout. Le théorème 2.37 est démontré. □

Le théorème 2.37 va nous donner accès à beaucoup d'information sur la dérivation de mesures.

Théorème 2.38. *Soit μ une mesure de Borel complexe sur $\mathbb{R}^d$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit f sa dérivée de Radon-Nikodym par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors $D\mu = f$ Lebesgue presque partout ; pour tout borélien E de $\mathbb{R}^d$, on a*

$$\mu(E) = \int_E (D\mu) d\lambda_d. \tag{2.30}$$

Ceci nous dit que la dérivée de Radon-Nicodym d'une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue peut aussi être obtenue par la limite (2.23).

Démonstration. Le théorème 2.19 nous dit que (2.30) est vraie avec $D\mu$ remplacée par $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. En tout point x qui de Lebesgue pour f, on a

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_d(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) d\lambda_d(y) = \lim_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\lambda_d(B(x,r))}.$$

Ainsi, presque partout, $(D\mu)(x)$ existe et vaut $f(x)$. On a donc (2.30). □

Définition 2.39. On dit qu'une suite de boréliens de $\mathbb{R}^d$, disons $(E_j)_{j\geq 0}$, *converge gentiment* vers le point $x \in \mathbb{R}^d$ s'il existe $\alpha > 0$ et une suite de rayons $(r_j)_{j\geq 0}$ réels positifs tendant vers 0 tels que, pour tout $j \geq 0$, $E_j \subset B(x, r_j)$ et $\lambda_d(E_j) \geq \alpha r_j^d$.

Remarque 2.40. Pour qu'une suite converge gentiment vers un point x il n'est pas nécessaire que x soit dans l'un des éléments de la suite, pas même dans l'adhérence de l'un des éléments.

Théorème 2.41. *À tout $x \in \mathbb{R}^d$, associons une suite de boréliens, disons $(E_j(x))_{j\geq 0}$ qui converge gentiment vers le point x. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors, en tout point x qui est de Lebesgue pour f (donc, en particulier, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$), on a*

$$f(x) = \lim_{j\to+\infty} \frac{1}{\lambda_d(E_j(x))} \int_{E_j(x)} f d\lambda_d. \tag{2.31}$$

Démonstration. Soit x un point de Lebesgue de f. Soient $\alpha(x)$ et $B(x, r_i)$ le nombre positif et la boule associés à la suite $(E_i(x))_i$ par la définition 2.39. Comme $E_i(x) \subset B(x, r_i)$, on a

$$0 \leq \frac{\alpha(x)}{\lambda_d(E_i(x))} \int_{E_i(x))} |f(y) - f(x)| d\lambda_d(y) \leq \frac{1}{\lambda_d(B(x, r_i))} \int_{B(x,r_i)} |f(y) - f(x)| d\lambda_d(y).$$

Comme $r_i \to 0$ et que x est un point de Lebesgue de f, le membre de droite de cette inégalité tend vers 0. Le membre de gauche tend aussi vers 0. On a donc démontré (2.31). □

Corollaire 2.42. *Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f\, d\lambda_1$. Alors F est dérivable en tout point de Lebesgue de f et, en ces points, $F'(x) = f(x)$.*

Démonstration. Soit x un point de Lebesgue de f et $(\varepsilon_i)_{i\leq 0}$ une suite strictement positive tendant vers 0. Si on pose $E_i(x) = [x, x + \varepsilon_i]$ (resp. $E_i(x) = [x - \varepsilon_i, x]$), le théorème 2.41 nous dit que la dérivée à droite (resp. gauche) de F en x existe et vaut $f(x)$. On a donc démontré le corollaire. □

Définition 2.43. Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue mesurable. On appelle *densité métrique* de E en $x \in \mathbb{R}^d$ la limite $\lim_{r\to 0} \frac{\lambda_d(E \cap B(x,r))}{\lambda_d(B(x,r))}$ lorsqu'elle existe.

En appliquant le théorème 2.38 à la fonction indicatrice de E, on obtient la

Proposition 2.44. *La densité métrique de E vaut 1 en presque tout point de E et 0 en presque tout point de son complémentaire.*

Remarque 2.45. En considérant $E = \mathbb{Q}$, on voit qu'on ne peut en général pas obtenir l'égalité donnée par la proposition 2.44 en tout point.

Pour l'instant on a étudié les mesures absolument continues par rapport à celle de Lebesgue. Tournons nous vers celles singulières.

Théorème 2.46. *À tout $x \in \mathbb{R}^d$, associons une suite de boréliens, disons $(E_j(x))_{j\geq 0}$ qui converge gentiment vers le point x.*
Soit μ une mesure de Borel complexe telle que $\mu \perp \lambda_d$. Alors, pour Lebesgue presque tout x, on a

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{\mu(E_j(x))}{\lambda_d(E_j(x))} = 0. \tag{2.32}$$

Démonstration. En décomposant μ en ses partie réelle et imaginaire puis en utilisant la décomposition de Jordan de celles-ci (voir le commentaire suivant la définition 2.10), on voit qu'on peut supposer que μ est positive. Dans ce cas, en suivant le preuve du théorème 2.41 et en en conservant les notations, on a

$$\frac{\alpha(x)\,\mu(E_i(x))}{\lambda_d(E_i(x))} \leq \frac{\mu(E_i(x))}{\lambda_d(B(x,r_i))} \leq \frac{\mu(B(x,r_i))}{\lambda_d(B(x,r_i))}.$$

Ainsi, (2.32) sera une conséquence de

$$D\mu(x) = 0 \quad \lambda_d\text{-presque partout} \tag{2.33}$$

que nous allons maintenant démontrer.
Définissons la dérivée supérieur $D^+\mu$ comme

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad D^+\mu(x) = \lim_{n\to+\infty} \left[\sup_{0<r<1/n} \frac{\mu(B(x,r))}{\lambda_d(B(x,r))} \right].$$

C'est une fonction borélienne comme la quantité dans le crochet est semi-continue inférieurement (voir la démonstration du lemme 2.32).
Soit $t > 0$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\mu \perp \lambda_d$, μ est concentrée sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Comme μ est régulière (par le théorème 2.6), il existe K compact tel que $\lambda_d(K) = 0$ et $\mu(K) > \|\mu\| - \varepsilon$.
Soit $\mu_1(E) := \mu(K \cap E)$ pour E borélien. Posons $\mu_2 = \mu - \mu_1$. Alors $\|\mu_2\| \leq \varepsilon$ et pour $x \notin K$, on a $D^+\mu(x) = D^+\mu_2(x) \leq (M\mu_2)(x)$. Ainsi $\{x \in \mathbb{R}^d;\ D^+\mu(x) > t\} \subset K \cup \{x \in \mathbb{R}^d;\ (M\mu_2)(x) > t\}$ et le théorème 2.33 montre que $\lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d;\ D^+\mu(x) > t\}) \leq 3^d t^{-1}\|\mu_2\| \leq 3^d t^{-1}\varepsilon$, ceci pour tout $t > 0$ et $\varepsilon > 0$.
On en déduit que $D^+\mu = 0$, λ_d-presque partout. $\square$

En combinant ce résultat avec le théorème 2.38, on obtient le

Corollaire 2.47. *À tout $x \in \mathbb{R}^d$, associons une suite de boréliens, disons $(E_j(x))_{j\geq 0}$ qui converge gentiment vers le point x. Soit μ une mesure de Borel complexe.*
Si la décomposition de Lebesgue de μ s'écrit $d\mu = f\,d\lambda_d + d\mu_s$ alors, pour Lebesgue presque tout x, on a

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{\mu(E_j(x))}{\lambda_d(E_j(x))} = f(x).$$

En particulier $\mu \perp \lambda_d$ si et seulement si $(D\mu)(x) = 0$ pour Lebesgue presque tout x.

Sur les ensembles qui ne sont pas μ négligeables, $D\mu$ se comporte tout-à-fait différemment comme le montre le

Théorème 2.48. *Si μ une mesure de Borel positive telle que $\mu \perp \lambda_d$ alors $(D\mu)(x) = +\infty$ pour μ-presque tout x.*

Démonstration. Il existe un borélien $S \subset \mathbb{R}^d$ tel que $\lambda_d(S) = 0$ et $\mu(\mathbb{R}^d \setminus S) = 0$. Pour $j \geq 1$, soit $V_j \supset S$ un ouvert tel que $\lambda_d(V_j) < 1/j$.
Pour $n \geq 1$, soit E_n l'ensemble des $x \in S$ pour lesquels il existe une suite de rayons $(r_i)_{i\geq 1} = (r_i(x))_{i\geq 1}$ strictement positifs tendant vers 0 tels que

$$\mu(B(x, r_i)) < n\, \lambda_d(B(x, r_i)). \tag{2.34}$$

Alors, on a $(D\mu)(x) = +\infty$ pour tout $x \in S \setminus \bigcup_{n\geq 1} E_n$. Il suffirait donc de démontrer que $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) = 0$.
Fixons pour l'instant n et j. Tout point E_n est le centre d'une boule ouverte $B_x \subset V_j$ satisfaisant (2.34). Soit β_x la boule de centre x de rayon un tiers celui de B_x. La réunion de ces boules $(\beta_x)_x$ est un ouvert noté $W_{j,n}$ qui contient E_n et qui se trouve dans V_j. On a

Lemme 2.49.

$$\mu(W_{j,n}) < 3^d n/j.$$

Si on pose $\Omega_n = \cap_j W_{j,n}$ alors $E_n \subset \Omega_n$, Ω_n est un G_δ, $\mu(\Omega_n) = 0$ et $(D\mu)(x) = +\infty$ en tout point de $S \setminus \bigcup_{n\geq 1} \Omega_n$ qui est total pour μ. Ceci achève la preuve du théorème 2.48. □

Preuve du lemme 2.49. En effet, soit $K \subset W_{j,n}$ compact. On peut le recouvrir par un nombre finie de β_x. Le lemme 2.34 assure qu'il existe $F \subset E_n$ fini tel que

1. les éléments de $\{\beta_x;\ x \in F\}$ sont deux à deux disjoints,
2. $K \subset \bigcup_{x\in F} B_x$.

Ainsi

$$\mu(K) \leq \sum_{x\in F} \mu(B_x) \leq n \sum_{x\in F} \lambda_d(B_x) = 3^d n \sum_{x\in F} \lambda_d(\beta_x) \leq 3^d\, n\, \lambda_d(V_j) < 3^d n j^{-1}.$$

Ceci prouve le lemme 2.49. □

2.3.3 Primitives et dérivées

On sait que, si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est continue alors, pour tout nombre complexe $F(a)$, la fonction définie par

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt \tag{2.35}$$

sur $[a, b]$ est continûment dérivable et $F'(x) = f(x)$. F est une primitive de f. Ceci peut aussi s'exprimer par le fait que si F est une fonction continûment dérivable sur $[a, b]$ alors elle est une primitive de sa dérivée. On veut comprendre comment ceci s'étend au cadre de l'intégrale de Lebesgue ; voici quelques questions naturelles que l'on peut se poser :

— pour que F soit une primitive suffit-il de supposer que f est intégrable ?
— si F est continue et dérivable presque partout sur $[a, b]$, a-t-on (2.35) avec $f = F'$.

Remarque 2.50. Deux exemples :

1. Soit $f(x) = x^2 \sin(x^{-2})$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$. Elle est dérivable en tout point mais $\displaystyle\int_0^1 |f'(t)|dt = +\infty$.
2. Supposons F continue sur $[a,b]$, F dérivable presque partout sur $[a,b]$ et F' intégrable. Cela implique-t-il que (2.35) pour $f = F'$?
   La réponse est non ! En effet, soit $(\delta_n)_{n\geq 0}$ strictement décroissante à termes positifs. Posons $C_0 = [0,1]$. Pour $n \geq 0$, si C_n est la réunion de 2^n segments de longueur $2^{-n}\delta_n$, construisons C_{n+1} à partir de C_n en ôtant de chacun de ces segments en leur centre un segment de façon que la partie restante soit la réunion de deux segments de longueur $2^{-n-1}\delta_{n+1}$ (ceci est possible car $\delta_n > \delta_{n+1}$). Alors C_{n+1} est la réunion de 2^{n+1} segments de longueur $2^{-n-1}\delta_{n+1}$.
   Alors $C_0 \supset C_1 \supset \cdots \supset C_n \supset \cdots$, $|C_n| = \delta_n$ et si on pose $C = \displaystyle\bigcap_{n\geq 1} C_n$ alors C est compact et $|C| = \lim_{n\to 0} \delta_n$. C est un *ensemble de Cantor*.
   On définit alors $f_n :\ x \in [0,1] \mapsto \int_0^x g_n(t)dt$ où $g_n := \dfrac{1}{\delta_n}\mathbf{1}_{C_n}$. On voit alors que f_n est croissante et constante sur le complémentaire de C_n, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$. D'autre part, si I est l'un des 2^n segments composant C_n, on a $\displaystyle\int_I \mathbf{1}_{C_n}(t)dt = \int_I \mathbf{1}_{C_{n+1}}(t)dt$. Ainsi pour $x \notin C_n$, on a $f_n(x) = f_{n+1}(x)$ et, pour $x \in I$ l'un des segments composant C_n, $|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq \displaystyle\int_I |g_n - g_{n+1}|(t)dt \leq 2^{-n+1}$. Par le théorème de Dini la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue f telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f'(x) = 0$ si $x \notin C$. Ainsi f' s'annule presque partout si $\lim_{n\to 0} \delta_n = 0$.

Définition 2.51. Soient $I := [a,b]$ et $f : I \to \mathbb{C}$. On dit que f est *absolument continue* si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tel que

$$\sum_{j=1}^{n} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \varepsilon \tag{2.36}$$

pour tout n et toute famille de segments dans I, disons, $]\alpha_1, \beta_1[, \ldots,]\alpha_n, \beta_n[$, deux à deux disjoints vérifiant $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) < \delta$.

Une fonction absolument continue est en particulier continue, la réciproque n'étant pas vraie comme le montre le second exemple de la remarque 2.50. On constate que l'ensemble des fonctions absolument continues sur $[a,b]$ (muni de l'addition et du produit de fonctions ainsi que du produit par un scalaire) forme un sous-algèbre et un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$.
Démontrons d'abord le résultat simple suivant.

Proposition 2.52. *Soit $f \in L^1([a,b])$. Soit $F(a) \in \mathbb{C}$. Si sur $]a,b]$, on définit F par (2.35) alors F est absolument continue sur $[a,b]$.*

Démonstration. Considérons la mesure $d\mu = f\, d\lambda_1$. Comme $\mu \ll \lambda_1$, le théorème 2.19 nous dit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour E mesurable, si $\lambda_d(E) \leq \delta$ alors $|\mu|(E) \leq \varepsilon$. En particulier, en prenant E comme une réunion disjointe dénombrable de segments, on voit que F est absolument continue. □

On va démontrer une réciproque à la proposition 2.52.

Théorème 2.53. *Soient $I := [a,b]$ et $F : I \to \mathbb{R}$ continue croissante. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *F est absolument continue.*

2. *L'image par F d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle de I est de mesure de Lebesgue nulle.*
3. *F est dérivable presque partout sur I, $f := F'$ est Lebesgue intégrable et on a (2.35).*

Remarque 2.54. L'hypothèse de continuité est nécessaire pour montrer obtenir les propriétés 1 ou 3 à partir de 2 comme le montre l'exemple suivant : considérer la fonction $F: [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = x$ si $x \in [0,1]$ et $F(x) = x+1$ si $x \in]1,2]$.
On peut noter que la fonction f construite dans le second exemple de la remarque 2.50 envoie l'ensemble de Cantor qui est compact de mesure de Lebesgue nulle sur l'intervalle $[0,1]$. Elle n'est donc pas absolument continue.

Démonstration. La proposition 2.52 dit que 3⇒1. Il suffit donc de montrer 1⇒2⇒3.
On appelle $\mathcal{S}$ la σ-algèbre des sous-ensembles Lebesgue mesurables de $\mathbb{R}$.
Supposons que F est AC sur $I = [a,b]$ et soit $E \subset I$, $E \in \mathcal{S}$ tel que $\lambda_1(E) = 0$. On veut montrer que $F(E) \in \mathcal{S}$ et $\lambda_1(F(E)) = 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\{a,b\} \cap E = \emptyset$.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ associé à F et ε par la définition 2.51. Il existe V ouvert tel que $\lambda_s(V) < \delta$ et $E \subset V \subset I$. Alors $V = \bigcup_{i\geq 1}]\alpha_i, \beta_i[$. Ainsi $\sum_{i\geq 1}(\beta_i - \alpha_i) < \delta$ et donc $\sum_{i\geq 1}(F(\beta_i) - F(\alpha_i)) < \varepsilon$. Comme $E \subset V$, on a $F(E) \subset \bigcup_{i\geq 1}[F(\alpha_i), F(\beta_i)]$. Donc, $F(E)$ est contenu dans un borélien de mesure arbitrairement petite. Il est donc contenu dans un ensemble de mesure nulle. La mesure de Lebesgue étant complète, il est Lebesgue mesurable et de mesure de Lebesgue nulle. Ceci prouve 1⇒2.
Supposons 2 vraie. Soit $G(x) = x + F(x)$ pour $a \leq x \leq b$. Comme elle est continue et strictement croissante, G est bijective bicontinue de $[a,b]$ dans $[G(a), G(b)]$. F étant continue et croissante, elle est surjective de $[a,b]$ dans $[F(a), F(b)]$.

Lemme 2.55. *Comme F satisfait la propriété 2, G la satisfait aussi.*

Démonstration. Montrons cela par la contraposée. Soit E tel que $\lambda_1(E) = 0$ et $\lambda_1(G(E)) > 0$. Il existe donc K compact de $[G(a), G(b)]$ tel que $K \subset G(E)$ et $\lambda_1(K) =: \delta > 0$. Comme ${}^cK$ est ouvert, on a ${}^cK = \bigcup_i]G(\alpha_i), G(\beta_i)[$ où la réunion est dénombrable et disjointe. On calcule donc

$$\lambda_1({}^cK) = G(b) - G(a) - \delta = \sum_i G(\beta_i) - G(\alpha_i). \tag{2.37}$$

On a donc $G({}^cE) = {}^c G(E) \subset \bigcup_i]G(\alpha_i), G(\beta_i)[$; ainsi ${}^cE \subset \bigcup_i]\alpha_i, \beta_i[$. D'où, comme $\lambda_1(E) = 0$, on voit que $\sum_i \beta_i - \alpha_i = b - a$. Par (2.37) et la définition de G, on a

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) - \delta = \sum_i F(\beta_i) - F(\alpha_i) &\geq \sum_i \lambda_1([F(\alpha_i), F(\beta_i)])) \geq \lambda_1\left(\bigcup_i F([\alpha_i, \beta_i])\right) \\ &\geq \lambda_1\left(F\left(\bigcup_i]\alpha_i, \beta_i[\right)\right) \geq \lambda_1(F({}^cE)). \end{aligned} \tag{2.38}$$

Or comme F est surjective, on a ${}^cF(E) \subset F({}^cE) \subset [F(a), F(b)]$ et comme F satisfait le point 2, on a $\lambda_1({}^cF(E)) = F(b) - F(a) = \lambda_1(F({}^cE))$. Au vu de (2.38), on obtient $F(b) - F(a) - \delta \geq F(b) - F(a)$ ce qui contredit $\delta > 0$. □

Soient $E \subset I$, E mesurable. Comme G est bijective bicontinue de $[a,b]$ dans $[G(a),G(b)]$, on sait que G^{-1} est continue donc mesurable ; ainsi $G(E) = (G^{-1})^{-1}(E)$ est mesurable.
Soit $E \subset [a,b]$, E mesurable. On définit la fonction d'ensemble μ par $\mu(E) := \lambda_1(G(E))$ pour $E \subset I$ mesurable. Comme G est injective, les images par G d'ensembles disjoints sont disjointes. Donc, comme λ_1 est σ-additive, μ l'est aussi. Ainsi μ est une mesure positive bornée ; comme G satisfait 2, elle est absolument continue par rapport à λ_1. Donc, par le théorème de Radon-Nikodym, $d\mu = g\, d\lambda_1$ avec $g \in L^1(I)$ (pour la mesure de Lebesgue).
Pour $E = [a,x]$, on a $G(E) = [G(a), G(x)]$. Ainsi

$$G(x) - G(a) = \lambda_1(G(E)) = \mu(G(E)) = \int_a^x g(t)dt.$$

Comme $G(x) = x + F(x)$, on obtient immédiatement que $F(x) - F(a) = \int_a^x (g(t)-1)dt$ où $g - 1 \in L^1(I)$. Ainsi, par le corollaire 2.42, F est dérivable Lebesgue presque partout et $F'(t) = g - 1$. Ceci prouve 2⇒3 et achève la preuve du théorème 2.53. □

Théorème 2.56. *Soient $I := [a,b]$ et $f : I \to \mathbb{C}$ absolument continue. Pour $x \in I$, on définit*

$$F(x) = \sup_{\substack{N \in \mathbb{N}^* \\ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = x}} \sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \tag{2.39}$$

Alors les fonctions F, $F + f$ et $F - f$ sont absolument continues sur I.
Si f est à valeurs réelles alors les fonctions F, $F + f$ et $F - f$ sont de plus croissantes.

La fonction F définie par (2.39) est appelée *fonction de variation totale* de f. Pour $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction arbitraire, si $F(b) < +\infty$, on dit que f est *à variation bornée* sur $[a,b]$ et $F(b)$ est alors appelée *la variation totale* de f.

Preuve du théorème 2.56. Vérifions d'abord que $F(x)$ est finie pour tout x. Considérons une partition de $[a,x]$ comme celles intervenant dans (2.39). Par l'inégalité triangulaire, on voit que la somme dans le membre de droite de (2.39) augmente si on raffine la partition i.e. si on y ajoute des points $(t_j)_j$. Pour tout $\delta > 0$, on peut ajouter des points de façon que l'ensemble des intervalles $\{]t_i, t_{i+1}[; 0 \le i \le N-1\}$ se partitionne en $\{]t_i, t_{i+1}[; 0 \le i \le N-1\} = \bigcup_{1 \le j \le m} \{]t_i, t_{i+1}[; i \in I_j\}$ où, pour $1 \le j \le m$, on a $\delta/2 \le \sum_{i \in I_j} (t_{i+1} - t_i) < \delta$.
Clairement, m, le nombre total des classes, est majoré par $2(b-a)\delta^{-1}$. Par absolue continuité de f sur $[a,b]$, on choisit $\delta > 0$ tel que $\sup_{1 \le j \le m} \sum_{i \in I_j} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \le 1$. On obtient alors que $\sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \le 2(b-a)\delta^{-1}$.
Ainsi $F(x) \le 2(b-a)\delta^{-1}$.
Comme $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = x$, pour $y \ge x$, on a

$$F(y) \ge |f(y) - f(x)| + \sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \ge |f(y) - f(x)| + F(x).$$

Ainsi, si f est à valeurs réelles,

$$F(y) \ge F(x), \quad F(y) \ge -f(y) + F(x) + f(x) \quad \text{et} \quad F(y) \ge f(y) + F(x) - f(x).$$

Ainsi les fonctions F, $F + f$ et $F - f$ sont croissantes.
Il suffit maintenant de montrer que F est absolument continue sur I, les fonctions absolument continues sur

I constituant un espace vectoriel.
Soit $]\alpha,\beta[\subset I$. Alors

$$F(\beta)-F(\alpha)=\sup_{\substack{N\in\mathbb{N}^*\\ \alpha=t_0<t_1<\cdots<t_N=\beta}}\sum_{j=1}^{N}|f(t_j)-f(t_{j-1})|. \tag{2.40}$$

Soit $\varepsilon>0$ et $\delta>0$ associé à f et ε par la définition 2.51. Choisissons des intervalles deux à deux disjoints $((\alpha_j,\beta_j))_{j\geq 1}$ tels que $\sum_{j\geq 1}(\beta_j-\alpha_j)<\delta$. Alors , en utilisant pour chacun des $((\alpha_j,\beta_j))_{j\geq 1}$, la formule (2.40) et notre choix de δ dans la définition 2.51, on obtient $\sum_{j\geq 1}(F(\beta_j)-F(\alpha_j))<\varepsilon$.
Ainsi F est absolument continue et la preuve du théorème 2.56 complète □

Exercice 2.57. Soit BV l'espace des fonctions sur $[a,b]$ à variation bornée.

1. Montrer que toute fonction à valeurs réelles, monotone sur $[a,b]$ est à variation bornée.
2. Montrer que si $f\in BV$ est à valeurs réelles, alors il existe f_+ et f_- monotones bornées sur $[a,b]$ telles que $f=f_+-f_-$.
   Indication : on pourra s'inspirer de la preuve du théorème 2.56.
3. Montrer que si $f\in BV$ alors f admet une limite à droite et à gauche en tout point. Au point x, on les notera $f(x\pm 0)$.
4. Montrer que si f est de plus continue à droite, alors dans la décomposition précédente, on peut choisir f_+ et f_- continues à droite.
5. Montrer que si $f\in BV$ est continue à droite en tout point de $[a,b[$, il existe une mesure de Borel sur $[a,b]$, disons, μ_f telle que
$$f(x)-f(a)=\mu_f([a,x])\quad\text{pour}\quad x\in[a,b].$$
   μ_f est la mesure de Stieltjes-Lebesgue associée à f.
   Indication : prenons $[a,b]=[0,1]$; on pourra s'inspirer de la construction de la mesure de Lebesgue et considérer la suite de formes linéaires $(M_n)_{n\geq 1}$ définies par
$$M_n(\phi)=\sum_{j=0}^{2^n-1}\big(f((j+1)2^{-n})-f(j2^{-n})\big)\,\phi(j2^{-n}),\quad \phi\in\mathcal{C}([0,1]).$$
   On vérifiera que ces formes linéaires sont continues, que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ converge vers M, une forme linéaire continue que l'on peut par le théorème 2.27 représenter par une mesure complexe μ. On en déduira les propriétés requises sur μ.
6. Vérifier que $|\mu_f|([a,b])=\mathrm{var}(f)$.
7. Montrer que F définie en (2.39) est une fonction de répartition (celle continue à gauche) de $|\mu_f|$, la variation totale de μ_f (voir définition 2.4).
8. Montrer que $\mu_f\ll\lambda_1$ si et seulement si f est absolument continue sur $[a,b]$.
9. Montrer que toute $f\in BV$ est dérivable Lebesgue presque partout et que $f'\in L^1([a,b])$.

On peut maintenant démontrer le

Théorème 2.58. *Soit $F:[a,b]\to\mathbb{C}$ absolument continue. Alors F est dérivable presque partout sur $[a,b]$, $f:=F'$ est Lebesgue intégrable et on a (2.35).*

Démonstration. Clairement, par linéarité, il suffit de démontrer cela pour F à valeurs réelles ce que l'on supposera dorénavant. Soit alors $\mathcal{F}$ la variation totale de F (voir le théorème 2.56). Posons $F_+ = 1/2(\mathcal{F}+F)$ et $F_- = 1/2(\mathcal{F}-F)$. On peut alors appliquer le théorème 2.53 à F_+ et F_- qui satisfont le point 1 de ce résultat. Elles en satisfont donc aussi le point 3 ; donc $F = F_+ - F_-$ satisfait aussi le point 3 du théorème 2.53. Ceci prouve le théorème 2.58 □

La prochain résultat démontre les mêmes conclusions sous un jeu d'hypothèses différent avec une méthode de preuve différente.

Théorème 2.59. *Soient $I := [a,b]$ et $F : I \to \mathbb{C}$ est dérivable en tout point de I et telle que $f := F'$ est Lebesgue intégrable alors on a* (2.35)*.*

Notez que dans ce résultat on demande que F soit dérivable *en tout point* ; par contre, on ne suppose rien sur l'absolue continuité de F qui est, par la proposition 2.52, un corollaire du résultat.

Démonstration. Il suffit de démontrer que (2.35) est vraie pour $x = b$; on supposera sans perte de généralité de f est à valeurs réelles. Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Vitali-Carathéodory (théorème 1.44), il existe g semi-continue inférieurement sur $[a,b]$ telle que $g \geq f = F'$ et

$$\int_a^b g(t)dt < \int_a^b f(t)dt + \varepsilon. \tag{2.41}$$

On a alors $g + \varepsilon/2(b-a) > f$ et $\displaystyle\int_a^b \left(g(t) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right) dt < \int_a^b f(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}$.
On peut donc supposer que $g > f$ sur $[a,b]$ et qu'elle vérifie (2.41).
Pour $\eta > 0$ et $x \in [a,b]$, on pose

$$F_\eta(x) = \int_a^x g(t)dt - F(x) + F(a) + \eta(x-a). \tag{2.42}$$

Comme $F' = f$, comme g est semi-continue inférieurement et que $g > f$, à chaque $x \in [a,b]$ correspond δ_x tel que

$$\forall t \in]x, x+\delta_x[, \quad g(t) > f(x) \quad \text{et} \quad \frac{F(t)-F(x)}{t-x} < f(x) + \eta.$$

Donc pour $t \in]x, x+\delta_x[$, on a

$$F_\eta(t) - F_\eta(x) = \int_x^t g(u)du - F(x) + F(t) + \eta(x-t) > (t-x)f(x) - (t-x)(f(x)+\eta) + \eta(t-x) = 0. \tag{2.43}$$

Comme $F_\eta(a) = 0$ et que F_η est continue, l'ensemble des points $\{x \in [a,b];\ F_\eta(x) = 0\}$ admet un plus grand élément, disons, x_+. Si $x_+ < b$, le calcul (2.43) entraîne que $F_\eta(t) > 0$ pour $t \in]x_+, b]$. On voit donc que $F_\eta(b) \geq 0$. Ceci étant vrai pour tout $\eta > 0$, (2.41) et (2.42) impliquent

$$F(b) - F(a) \leq \int_a^b g(t)dt < \int_a^b f(t)dt + \varepsilon.$$

En laissant $\varepsilon \to 0^+$, on obtient

$$F(b) - F(a) \leq \int_a^b f(t)dt.$$

En changeant f et $-f$, on obtient que F et f satisfont (2.35) en $x = b$.
La preuve du théorème 2.59 est complète. □

Chapitre 3

Analyse harmonique

L'analyse harmonique est l'analyse des « harmoniques » c'est-à-dire de la décomposition d'un signal en superposition de signaux élémentaires.

3.1 Séries de Fourier

Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; c'est un groupe commutatif pour l'addition car il en ainsi pour $\mathbb{R}$ et que $2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ pour l'addition. On peut identifier $\mathbb{T}$ avec $[0, 2\pi]$ et les fonctions sur $\mathbb{T}$ avec les fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. Cette identification définit la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$ en utilisant $\int_{\mathbb{T}} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(x)dx$ où on a noté par la même lettre f la fonction sur $\mathbb{T}$ et son prolongement 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ (supposé localement intégrable). L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue se traduit alors par

$$\int_{\mathbb{T}} f(t-t_0)dt = \int_{\mathbb{T}} f(t)dt \tag{3.1}$$

pour tout $t_0 \in \mathbb{T}$ et f intégrable sur $\mathbb{T}$.

3.1.1 Coefficients de Fourier

Soit $L^1(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes Lebesgue intégrables sur $\mathbb{T}$. On le munit de

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|dt$$

qui est une norme sur $L^1(\mathbb{T})$. On sait que $(L^1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach.
Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on définit le n-ième coefficient de Fourier de f par

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}dt. \tag{3.2}$$

On a

Proposition 3.1. *Soient f et g dans $L^1(\mathbb{T})$. Alors, pour $n \in \mathbb{Z}$, on a*

- $\widehat{f+g}(n) = \hat{f}(n) + \hat{g}(n)$;
- *si* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\widehat{\alpha f}(n) = \alpha \hat{f}(n)$;
- *si* $\overline{f}$ *est la conjuguée complexe de* f, $\hat{\overline{f}}(n) = \overline{\hat{f}(-n)}$;
- *pour* $\tau \in \mathbb{T}$, *si on définit* $f_\tau(t) = f(t-\tau)$ *alors* $\hat{f}_\tau(n) = \hat{f}(n)\, e^{-in\tau}$;
- $|\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1$.

Corollaire 3.2. *Soit $(f_j)_{j\geq 0}$, $f_j \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $\|f_j - f_0\|_1 \underset{j\to+\infty}{\to} 0$ alors $\hat{f}_j(n) \underset{j\to+\infty}{\to} \hat{f}_0(n)$ uniformément en n.*

Théorème 3.3. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $\hat{f}(0) = 0$. Définissons $F(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$.*

Alors F est absolument continue, 2π-périodique et $\hat{F}(n) = \frac{1}{in}\hat{f}(n)$ pour $n \neq 0$.

Démonstration. L'absolue continuité suit de la proposition 2.52. On calcule

$$F(t+2\pi) - F(t) = \int_t^{t+2\pi} f(\tau)d\tau = 2\pi\hat{f}(0) = 0.$$

Enfin, en utilisant le théorème de Fubini, si $n \neq 0$, on calcule

$$\begin{aligned}\hat{F}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(\tau)\mathbf{1}_{[0,t]}(\tau)d\tau\right)e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\left(\int_0^{2\pi}\mathbf{1}_{[\tau,2\pi]}(t)e^{-int}dt\right)d\tau = \frac{1}{2i\pi\, n}\int_0^{2\pi} f(\tau)\left(e^{-in\tau}-1\right)d\tau = \frac{1}{in}\hat{f}(n).\end{aligned}$$

□

Convolution sur $L^1(T)$

On va utiliser la structure de groupe de $\mathbb{T}$.

Théorème 3.4. *Si f et g intégrables sur $\mathbb{T}$ alors pour presque tout $t \in \mathbb{T}$, la fonction $\tau \mapsto f(t-\tau)g(\tau)$ est intégrable sur $\mathbb{T}$ et si on pose $(f*g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ alors $f*g \in L^1(\mathbb{T})$.*

On a alors $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\,\|g\|_1$ et pour tout n, $\widehat{f*g}(n) = \hat{f}(n)\,\hat{g}(n)$.

Démonstration. La fonction $(t,\tau) \in \mathbb{T}^2 \mapsto f(t-\tau)g(\tau)$ est intégrable sur $\mathbb{T}^2$ car mesurable et, par le théorème de Fubini et (3.1),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}}\left(\int_{\mathbb{T}}|f(t-\tau)g(\tau)|d\tau\right)dt &= \int_{\mathbb{T}^2}|f(t-\tau)g(\tau)|dt\,d\tau \\ &= \int_{\mathbb{T}}\left(\int_{\mathbb{T}}|f(t-\tau)|dt\right)|g(\tau)|d\tau = 2\pi\int_{\mathbb{T}}\|f\|_1|g(\tau)|d\tau = (2\pi)^2\|f\|_1\,\|g\|_1.\end{aligned}$$

Ceci démontre la première assertion et l'estimation sur $\|f*g\|_1$ en constatant que

$$\|f*g\|_1 = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}}\left|\int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right|dt \leq \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}}\left(\int_{\mathbb{T}}|f(t-\tau)g(\tau)|d\tau\right)dt.$$

L'égalité sur les coefficients de Fourier est obtenue comme suit en utilisant le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(n) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}}\left(\int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right)e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}}\left(\int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)e^{-in(t-\tau)}dt\right)g(\tau)e^{-in\tau}d\tau = \hat{f}(n)\,\hat{g}(n).\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.5. *$L^1(\mathbb{T})$ muni de l'addition et de la convolution est une algèbre commutative (i.e. la loi $*$ est interne, commutative, associative et distributive).*

La preuve est laissée en exercice.

Série trigonométrique

Définition 3.6. On appelle *série trigonométrique* une expression de la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite à valeurs complexes. Les $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont appelés coefficients de la série.
La *série trigonométrique conjuguée* de la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}$ est par définition la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} -i\mathrm{sgn}(n) a_n e^{int}$.
Une série trigonométrique est un *polynôme trigonométrique* si au plus un nombre fini de ses coefficients sont non nuls. Son degré est alors le maximum des valeurs absolues des indices des coefficients non nuls.

On peut noter que l'ensemble des polynôme trigonométriques est un sous-espace vectoriel $L^1(\mathbb{T})$ stable par la convolution (par le dernier point du Théorème 3.4) et qu'à ce titre, il constitue une sous-algèbre commutative de $(L^1(\mathbb{T}), +, \cdot, *)$.
À une fonction f intégrable sur $\mathbb{T}$ on associe naturellement sa série de Fourier, la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$.
On va maintenant étudier les relations entre f et sa série de Fourier.

3.1.2 Convergence des séries trigonométriques

Définition 3.7. Soit $(k_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables sur $\mathbb{T}$. Cette suite est appelée *approximation de l'identité* si elle satisfait

1. $\forall n \geq 0,\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} k_n(t)dt = 1,$
2. $\sup_{n\geq 0} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} |k_n(t)|dt < +\infty,$
3. $\forall \delta > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{\delta}^{2\pi-\delta} |k_n(t)|dt = 0.$

Théorème 3.8. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $(k_n)_{n\geq 0}$ une approximation de l'identité. Alors $\|f - k_n * f\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$.*

Démonstration. Supposons $\|f\|_1 \neq 0$ sinon il n'y a rien à faire. On calcule

$$\begin{aligned}(2\pi)^2\|f - k_n * f\|_1 &= \int_{\mathbb{T}} \left| \int_{\mathbb{T}} (f(t) - f(t-\tau))k_n(\tau)d\tau \right| dt \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} |k_n(t)|dt \cdot \sup_{[0,\delta]\cup[2\pi-\delta,2\pi]} \|f - f_\tau\|_1 + 2\|f\|_1 \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |k_n(t)|dt.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Par le corollaire 1.70 l'application $\tau \mapsto \|f - f_\tau\|_1$ est continue en 0 et en 2π (par périodicité de f).
Pour $\varepsilon > 0$, il existe donc $\delta > 0$ tel que $\sup_{[0,\delta]\cup[2\pi-\delta,2\pi]} \|f - f_\tau\|_1 < \dfrac{\varepsilon}{2\sup_{n\geq 0}\int_{\mathbb{T}} |k_n(t)|dt}$ et pour cette valeur de δ il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $\displaystyle\int_{\delta}^{2\pi-\delta} |k_n(t)|dt < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_1}$.
Ainsi, par (3.3), pour $n \geq n_0$, on a $\|f - k_n * f\|_1 < \varepsilon$. □

Le noyau de Fejér

On définit le noyau de Fejér par

$$F_n(t) := \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)}\right)^2 = \sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=-j}^{j} e^{ikt}. \tag{3.4}$$

La vérification de ces égalités est laissée au lecteur.

Lemme 3.9. *$(F_n)_{n\geq 0}$ est une approximation de l'identité.*

Le lemme se vérifie aisément. On calcule alors pour $f \in L^1(\mathbb{T})$

$$F_n * f(t) = \sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)\hat{f}(j)e^{ijt}. \tag{3.5}$$

Théorème 3.10 (Théorème d'unicité)**.** *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et que $\hat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $f = 0$.*

Démonstration. Par (3.5), si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et que $\hat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $F_n * f = 0$. Donc $f = 0$ par le théorème 3.8. □

Théorème 3.11 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Alors $\hat{f}(n) \underset{|n|\to+\infty}{\to} 0$.*

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$, On a

$$|\hat{f}(n)| \leq |\widehat{F_m * f}(n)| + |\widehat{F_m * f}(n) - \hat{f}(n)| \leq |\widehat{F_m * f}(n)| + \|F_m * f - f\|_1. \tag{3.6}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Fixons m tel que $\|F_m * f - f\|_1 < \varepsilon$. Or $F_m * f|$ est un polynôme trigonométrique de degré au plus m par (3.5), donc si $|n| > m$, on a $|\widehat{F_m * f}(n)| = 0$. Ainsi $|\hat{f}(n)| < \varepsilon$. □

Soit $K \subset L^1(\mathbb{T})$ compact. Alors, pour $\varepsilon > 0$, il existe $P_1, \cdots, P_N$ polynômes trigonométriques tel que $\forall f \in K, \exists j,\ 1 \leq j \leq N$ tel que $\|f - P_j\|_1 \leq \varepsilon$. Si n est supérieur au $\max\limits_{1\leq j\leq N}(\deg P_j)$, on a $\sup\limits_{f\in K}|\hat{f}(n)| \leq \varepsilon$. On a donc démontré le

Lemme 3.12 (Lemme de Riemann-Lebesgue uniforme)**.** *Soit $K \subset L^1(\mathbb{T})$ compact. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{f\in K}|\hat{f}(n)| = 0. \tag{3.7}$$

Remarque 3.13. Considérons la somme de Fourier partielle d'ordre n de f dans $L^1(\mathbb{T})$ i.e. $[S_n(f)](t) := \sum\limits_{j=-n}^{n}\hat{f}(j)e^{ijt}$. On vérifie

$$F_n * f = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} S_j(f)$$

et

$$S_n(f) = D_n * f \text{ où } D_n(t) := \sum_{j=-n}^{n} e^{ijt} = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} \text{ est le noyau de Dirichlet.}$$

On notera que $(D_n)_{n\geq 0}$ n'est pas une approximation de l'identité : si la condition 1 de la définition est vérifiée, 2 et 3 ne le sont pas.

Définition 3.14. Un *espace de Banach homogène sur* $\mathbb{T}$ est un sous-espace vectoriel $\mathcal{B}$ de $L^1(\mathbb{T})$ muni d'une norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B}} \geq \|\cdot\|_1$ qui en fait un espace de Banach et tel que

1. si $f \in \mathcal{B}$ et $\tau \in \mathbb{T}$ alors $f_\tau \in \mathcal{B}$ et $\|f_\tau\|_{\mathcal{B}} = \|f\|_{\mathcal{B}}$;
2. pour $f \in \mathcal{B}$, $\lim_{t\to 0} \|f_t - f\|_{\mathcal{B}} = 0$.

Remarque 3.15 (Intégration d'une fonction continue à valeurs dans un espace de Banach)**.** Grâce à la condition 1, la condition 2 implique $\lim_{t\to\tau} \|f_t - f_\tau\|_{\mathcal{B}} = 0$ pour $\tau \in \mathbb{T}$. Ainsi l'application $\tau \in \mathbb{T} \mapsto f_\tau \in \mathcal{B}$ est continue.

Exemples d'espaces de Banach homogènes :

1. $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, l'espace des fonction continues sur $\mathbb{T}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$;
2. $\mathcal{C}^n(\mathbb{T})$, l'espace des fonction n fois continûment différentiables sur $\mathbb{T}$ muni de sa norme naturelle ;
3. $L^p(\mathbb{T})$ muni de sa norme naturelle pour $1 \leq p < +\infty$.

Notez que $L^\infty(\mathbb{T})$ n'est pas un espace de Banach homogène.

Proposition 3.16. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$. Soient $g \in L^1(\mathbb{T})$ et $f \in \mathcal{B}$. Alors $f * g \in \mathcal{B}$ et $\|f * g\|_{\mathcal{B}} \leq \|g\|_1 \|f\|_{\mathcal{B}}$.*

Démonstration. On peut supposer que $\|f\|_{\mathcal{B}} \neq 0$ sinon il n'y a rien à faire. Le résultat de la proposition découle du cas quand g est la fonction indicatrice d'un intervalle, disons, $g = \mathbf{1}_{[a,b]}$. Comme on a l'égalité $\int_a^b f(t-\tau)d\tau = \int_0^{b-a} f(t-\tau-a)d\tau = \int_0^{b-a} f_a(t-\tau)d\tau$, pour ce cas-là, il suffit pour cela de démontrer le

Lemme 3.17. *Pour $a \in [0, 2\pi[$, $t \mapsto I_a(f)(t) = \displaystyle\int_0^a f(t-\tau)d\tau$ est dans $\mathcal{B}$ et satisfait $\|I_a(f)\|_{\mathcal{B}} \leq a\|f\|_{\mathcal{B}}$.*

Supposons le lemme 3.17 prouvé et démontrons la proposition 3.16. Pour $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, on commence par montrer que

$$f * g(t) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} g\left(2\pi k 2^{-n}\right) \int_{\pi k 2^{-n+1}}^{\pi(k+1)2^{-n+1}} f(t-\tau)d\tau. \tag{3.8}$$

L'expression ci-dessus converge ponctuellement (par convergence dominée) mais aussi dans L^1 et dans $\mathcal{B}$; en effet, pour $m > n$, on calcule

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{k=0}^{2^m-1} g\left(2\pi k 2^{-m}\right) \int_{\pi k 2^{-m+1}}^{\pi(k+1)2^{-m+1}} f(t-\tau)d\tau - \sum_{k=0}^{2^n-1} g\left(2\pi k 2^{-n}\right) \int_{\pi k 2^{-n+1}}^{\pi(k+1)2^{-n+1}} f(t-\tau)d\tau \right\|_{\mathcal{B}} \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^{m-n}-1} \left[g\left(2\pi k 2^{-n}\right) - g\left(2\pi(k2^{-n} + j2^{-m})\right)\right] \int_{2\pi(k2^{-n}+j2^{-m})}^{2\pi(k2^{-n}+(j+1)2^{-m})} f(t-\tau)d\tau \right\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^{m-n}-1} 2^{-m}\|f\|_{\mathcal{B}} \sup_{0\leq\tau\leq 2^{-n}} \|g - g_\tau\|_\infty = \|f\|_{\mathcal{B}} \sup_{0\leq\tau\leq 2^{-n}} \|g - g_\tau\|_\infty
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le lemme 3.17 dans la dernière estimation.

Ainsi, la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} g\left(2\pi k 2^{-n}\right) \int_{\pi k 2^{-n+1}}^{\pi(k+1)2^{-n+1}} f(t-\tau)d\tau.\right)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $\mathcal{B}$, donc converge dans $\mathcal{B}$ vers la même limite que dans L^1. On a donc (3.8). D'autre part, comme ci-dessus, on estime

$$\left\| \sum_{k=0}^{2^m-1} g\left(2\pi k 2^{-m}\right) \int_{\pi k 2^{-m+1}}^{\pi(k+1)2^{-m+1}} f(t-\tau)d\tau \right\|_{\mathcal{B}} \leq 2^{-m} \sum_{k=0}^{2^m-1} \left|g\left(2\pi k 2^{-m}\right)\right| \|f\|_{\mathcal{B}}$$

Or comme g est continue, par convergence des sommes de Riemann, le membre de droite de l'inégalité ci-dessus converge vers $\|g\|_{L^1}\|f\|_{\mathcal{B}}$. On obtient donc que, pour g continue, $f*g \in \mathcal{B}$ et $\|f*g\|_{\mathcal{B}} \leq \|g\|_1\|f\|_{\mathcal{B}}$. Pour finir la preuve de la proposition 3.16, il suffit d'approcher alors les fonctions intégrables par des fonctions continues. $\square$

Preuve du lemme 3.17. Rappelons que, pour $f \in \mathcal{B}$, on a $\sup\limits_{\tau' \in \mathbb{T}} \|f_{\tau'} - f_{\tau'+\tau}\|_{\mathcal{B}} = \|f - f_\tau\|_{\mathcal{B}} \underset{\tau \to 0}{\to} 0$. Donc, pour tout $n \geq 1$, il existe $j_n \geq 1$ tel que $\sup\limits_{|\tau| \leq 2^{-j_n}} \|f - f_\tau\|_{\mathcal{B}} \leq 2^{-n}\|f\|_{\mathcal{B}}$. On peut prendre la suite $(j_n)_n$ strictement croissante.
On définit la fonction $S_n f = 2^{-j_n} \sum\limits_{0 \leq k \leq a2^{j_n}} f_{k2^{-j_n}}$. Elle est dans $\mathcal{B}$ comme combinaison linéaire de fonctions de $\mathcal{B}$. De plus, on calcule

$$\|S_n f\|_{\mathcal{B}} \leq 2^{-j_n} \sum_{0 \leq k \leq a2^{j_n}} \|f_{k2^{-j_n}}\|_{\mathcal{B}} \leq a2^{j_n}2^{-j_n}\|f\|_{\mathcal{B}} = a\|f\|_{\mathcal{B}}. \tag{3.9}$$

D'autre part, on calcule

$$\begin{aligned}
\|S_n f - S_{n+1} f\|_{\mathcal{B}} &= \left\| 2^{-j_{n+1}} \sum_{0 \leq k \leq a2^{j_n}} \sum_{0 \leq l \leq 2^{j_{n+1}-j_n}} f_{k2^{-j_n}} - f_{k2^{-j_n}+l2^{-j_{n+1}}} \right\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq 2^{-j_{n+1}} \sum_{\substack{0 \leq k \leq a2^{j_n} \\ 0 \leq l \leq 2^{j_{n+1}-j_n}}} \left\| f_{k2^{-j_n}} - f_{k2^{-j_n}+l2^{-j_{n+1}}} \right\|_{\mathcal{B}} = 2^{-j_{n+1}} \sum_{\substack{0 \leq k \leq a2^{j_n} \\ 0 \leq l \leq 2^{j_{n+1}-j_n}}} \left\| f - f_{l2^{-j_{n+1}}} \right\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq 2^{-j_{n+1}} a2^{j_n}2^{j_{n+1}-j_n}2^{-n}\|f\|_{\mathcal{B}} = a2^{-n}\|f\|_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la propriété définissant j_n dans la dernière majoration.
On en déduit que $S_n f = S_1 f + \sum\limits_{1 \leq k \leq n-1} S_{k+1} f - S_k f$ converge dans $\mathcal{B}$ (qui est un espace de Banach) vers une limite notée Sf. Par (3.9), on sait que $\|Sf\|_{\mathcal{B}} \leq a\|f\|_{\mathcal{B}}$. Comme L^1 est un Banach homogène, on sait que Sf est dans L^1 et que $\|Sf\|_{L^1} \leq a\|f\|_{L^1}$. Quand f est une fonction continue, l'approximation de l'intégrale par des sommes de Riemann nous dit que $Sf(t) = \int_0^a f(t-\tau)d\tau$. Comme S est bornée sur L^1 et que les fonctions continues y sont denses, ceci reste vrai pour f dans L^1 donc dans $\mathcal{B}$. Ceci achève la preuve du lemme 3.17. $\square$

On en déduit

Théorème 3.18. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach homogène et $(k_n)_{n \geq 0}$ une approximation de l'identité. Alors pour $f \in \mathcal{B}$, on a $\|k_n * f - f\|_{\mathcal{B}} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.*

Démonstration. Supposons $\|f\|_{\mathcal{B}} \neq 0$ sinon il n'y a rien à faire. On calcule

$$\begin{aligned}
\|f - k_n * f\|_{\mathcal{B}} &= \left\| \int_{\mathbb{T}} (f(\cdot) - f(\cdot - \tau))k_n(\tau)d\tau \right\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} \|f - f_\tau\|_{\mathcal{B}}\, |k_n(\tau)| d\tau \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} |k_n(t)|dt \cdot \sup_{[0,\delta] \cup [2\pi-\delta, 2\pi]} \|f - f_\tau\|_{\mathcal{B}} + 2\|f\|_{\mathcal{B}} \int_\delta^{2\pi-\delta} |k_n(t)|dt.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Mutatis mutandis, on conclut comme dans la preuve du théorème 3.8. $\square$

,

Corollaire 3.19. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach homogène contenant les polynômes trigonométriques. Alors l'espace des polynômes trigonométriques dans $\mathcal{B}$ est dense dans $\mathcal{B}$.*

Corollaire 3.20 (Le théorème d'approximation de Weierstrass)**.** *Toute fonction continue 2π-périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.*

Remarque 3.21. D'autres approximations de l'identité :

— le noyau de de la Vallée Poussin :

$$V_n(t) = 2F_{2n+1}(t) - F_n(t). \tag{3.11}$$

— le noyau de Poisson : pour $0 < r < 1$,

$$P(r,t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} r^{|j|}e^{ijt} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right).$$

Si $(r_n)_{n\geq 0}$ est une suite à termes positifs tendant vers 1, alors $(P(r_n,t))_{n\geq 0}$ est une approximation de l'identité ; en effet

$$P(r,\cdot) * f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} r^{|j|}\hat{f}(j)e^{ijt}.$$

Convergence ponctuelle de $F_n * f$

Théorème 3.22 (Théorème de Fejér)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $t_0 \in \mathbb{T}$.*

1. *Si $\lim_{h\to 0} f(t_0+h) + f(t_0-h) =: 2f_0$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ (condition de Fejér) alors $\lim_{n\to+\infty}(F_n * f)(t_0) = f_0$.*
2. *Si f est continue en tout point d'un intervalle compact I, $F_n * f$ converge uniformément vers f sur I.*
3. *Si $f \geq 0$ presque partout alors $F_n * f \geq 0$ presque partout pour tout n.*

Remarque 3.23. Clairement le point (3) reste vrai si 0 est remplacé par un réel arbitraire ou si l'inégalité $\geq$ est remplacée par $\leq$. Ceci suit de la positivité de F_n et de l'égalité 1. de la définition 3.7.

Démonstration. On suppose que la limite $\lim_{h\to 0} f(t_0+h) + f(t_0-h) =: 2f_0$ existe et est finie. Le cas quand elle est infinie se traite de la même manière.
Soit $\delta > 0$. On calcule

$$\begin{aligned} F_n * f(t_0) - f_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} F_n(\tau)(f(t_0-\tau)-f_0)d\tau = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{2\pi-\delta}\right) F_n(\tau)(f(t_0-\tau)-f_0)d\tau \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right) F_n(\tau)\left(\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2} - f_0\right)d\tau \end{aligned} \tag{3.12}$$

Pour obtenir la dernière égalité on a utilisé la parité de F_n.
Pour $\varepsilon > 0$ fixé on choisi

— $\delta > 0$ tel que, si $|h| \leq \delta$ alors $|f(t_0+h) + f(t_0-h) - 2f_0| \leq \varepsilon$,

— puis $n_0 > 0$ tel que pour $n \geq n_0$, $\sup_{t\in[\delta,2\pi-\delta]} |F_n(t)|dt \leq \varepsilon$.

Par (3.12), pour $n \geq n_0$, on a $|F_n * f(t_0) - f_0| \leq \varepsilon + \varepsilon\|f - f_0\|_{L^1(\mathbb{T})}$. Ceci achève la preuve du point 1.
Le point 2. est une conséquence immédiate du calcul précédent et de l'uniforme continuité de f sur I.
Enfin le point 3. est une conséquence immédiate de la positivité de F_n. ∎

Remarque 3.24. Dans la preuve du Théorème de Fejér, on a utilisé que l'approximation de l'identité $(F_n)_{n\geq 0}$ était positive (i.e. pour tout n, la fonction F_n est à valeurs positives), paire et qu'elle vérifie : $\forall\delta > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{t\in[\delta,2\pi-\delta]} |F_n(t)| = 0$ (ce qui est plus fort que point 3. de la définition 3.7).

Corollaire 3.25. *Si f est continue en t_0 et si la série de Fourier de f converge en ce point alors sa somme est $f(t_0)$.*

On peut affaiblir la condition de Fejér que la limite $\lim\limits_{h\to 0} f(t_0+h)+f(t_0-h) =: 2f_0$ existe. En effet celle-ci implique

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \left|\frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2} - f_0\right| d\tau = 0. \tag{3.13}$$

Mais cette dernière condition est beaucoup moins restrictive que celle de Fejér : en effet, par le corollaire 1.70, pour $f\in L^1(\mathbb{T})$, on sait que (3.13) est vraie pour presque tout $t_0\in\mathbb{T}$ si on choisit $f_0 = f(t_0)$.

Théorème 3.26 (Lebesgue)**.** *Si (3.13) est vraie alors $F_n * f(t_0) \underset{n\to+\infty}{\to} f_0$. En particulier, comme les points de Lebesgue sont de mesure totale, $F_n * f$ converge vers f presque partout.*

Démonstration. D'après (3.4), comme $\sin(\tau/2)\geq \tau/\pi$ si $0<\tau<\pi$, on a

$$0\leq F_n(\tau)\leq \min\left(n+1, \frac{\pi^2}{(n+1)\tau^2}\right). \tag{3.14}$$

Le calcul (3.12) et la positivité de F_n nous donne

$$|F_n * f(t_0) - f_0| \leq \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi\right) F_n(\tau)\left|\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2} - f_0\right| d\tau. \tag{3.15}$$

La seconde intégrale du membre de droite est alors majorée par

$$\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi F_n(\tau)\left|\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2} - f_0\right| d\tau \leq \frac{\pi}{(n+1)\delta^2}(\|f\|_1 + |f_0|) \tag{3.16}$$

Ce qui tend vers 0 si on prend par exemple $\delta = n^{-1/4}$.
Pour estimer la première intégrale du membre de droite de (3.15), on pose

$$\phi(h) := \int_0^h \left|\frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2} - f_0\right| d\tau. \tag{3.17}$$

Alors, en utilisant (3.14) et le fait que ϕ est absolument continue (cf section 2.3.3), on estime

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^\delta F_n(\tau)\left|\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2} - f_0\right| d\tau\\
&\quad = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^\delta\right) F_n(\tau)\left|\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2} - f_0\right| d\tau\\
&\quad \leq \frac{n+1}{\pi}\phi(1/n) + \frac{\pi}{n+1}\int_{1/n}^\delta \frac{\phi'(\tau)}{\tau^2} d\tau\\
&\quad \leq \frac{n+1}{\pi}\phi(1/n) + \frac{\pi}{n+1}\left[\frac{\phi(\tau)}{\tau^2}\right]_{1/n}^\delta + \frac{2\pi}{n+1}\int_{1/n}^\delta \frac{\phi(\tau)}{\tau^3} d\tau.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

La dernière étape du calcul a consisté en une intégration par partie, licite comme ϕ est absolument continue. L'hypothèse (3.13) nous assure alors que pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon > 0$ tel si $n \geq n_\varepsilon$ et $0 < \tau < \delta = n^{-1/4}$ alors $0 \leq \phi(\tau) \leq \varepsilon\tau$. En remplaçant ceci dans le dernier terme de (3.18), on obtient

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta F_n(\tau)\left|\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2} - f_0\right| d\tau \leq \frac{\varepsilon(n+1)}{n} + \frac{\pi\varepsilon n}{n+1} + \frac{2\pi\varepsilon}{n+1}\int_{1/n}^\delta \frac{d\tau}{\tau^2} \leq 4\pi\varepsilon.$$

Ceci achève la preuve du théorème 3.26. □

Corollaire 3.27. *Si la série de Fourier de f intégrable sur $\mathbb{T}$ converge sur un ensemble E de mesure strictement positive, alors elle vaut f presque partout dans E. En particulier, si une série de Fourier converge vers 0 presque partout, alors les coefficients de Fourier sont tous nuls.*

On peut obtenir des résultats de convergence un peu plus fort pour le noyau de Poisson. Pour f intégrable sur $\mathbb{T}$, on pose

$$\psi(h) := \int_0^h \left(\frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2} - f_0\right) d\tau.$$

En comparant avec (3.17), on constate que $|\psi(h)| \leq \phi(h)$.

Théorème 3.28 (Fatou)**.** *Si $\psi(h) = o(h)$ quand $h \to 0$ alors* $\lim_{r\to 1^-} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) r^{|n|} e^{int_0} = f_0$.

La preuve qui se fait sur le modèle de celle du théorème 3.26 est laissée au lecteur (voir aussi la section 3.3). On voit en particulier qu'en tout point de Lebesgue (donc presque partout), voir la définition 2.36 et le théorème 2.37), on peut appliquer le théorème 3.28.

3.1.3 Ordre de grandeur des coefficients de Fourier

Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on sait que $\sup_n |\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1$ et $\hat{f}(n) \underset{|n|\to+\infty}{\to} 0$ par le lemme de Riemann Lebesgue (théorème 3.11). Dans cette section, nous allons nous intéresser à des questions du type

1. peut-on améliorer le lemme de Riemann Lebesgue et obtenir un taux de décroissance minimal pour $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ à l'infini ?
2. toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tendant vers 0 à l'infini est-elle la suite des coefficients de Fourier d'une fonction intégrable ?
3. Comment les propriétés de f (par exemple le fait qu'elle est bornée, continue, dérivable, etc) se reflète-t-il sur la suite $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$?

Les réponses aux questions 1. et 2. sont négatives comme nous le verrons. Pour la question 3. nous aurons des éléments de réponse mais nous verrons qu'en général il n'y a pas de caractérisation nécessaire et suffisante des propriétés de régularité de f par la taille de ses coefficients de Fourier. L'espace de fonctions de carré intégrable est un contre-exemple notable à cet état de fait.

Théorème 3.29. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite paire de nombres positif tendant vers 0 à l'infini. Supposons que*

$$\forall n > 0, \quad a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n \geq 0. \tag{3.19}$$

Alors il existe une fonction positive f intégrable sur $\mathbb{T}$ telle que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(n) = a_n$.

Démonstration. Clairement $\sum_{n\geq 0}(a_n - a_{n+1}) = a_0$; d'autre part par (3.19), la suite $(a_n - a_{n+1})_{n\geq 0}$ est décroissante. Donc $\lim_{n\to+\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0$. Par conséquent $\sum_{n=1}^{N} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n) = a_0 - a_N - N(a_N - a_{N+1})$ converge vers a_0 quand $N \to +\infty$. On pose

$$f(t) = \sum_{n\geq 1} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)F_{n-1}(t). \tag{3.20}$$

Comme $\|F_n\|_1 = 1$ pour tout n, la série (3.20) converge dans L^1 ; étant à termes positifs, sa limite est positive. En utilisant (3.4), on calcule

$$\hat{f}(j) = \sum_{n\geq 1} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\hat{F}_{n-1}(j) = \sum_{n\geq |j|+1} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\left(1 - \frac{|j|}{n}\right) = a_{|j|}.$$

Ceci achève la preuve du théorème 3.29. □

Théorème 3.30. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Supposons que $\hat{f}(n) = -\hat{f}(-n) \geq 0$, $\forall n \geq 0$. Alors $\sum_{n>0} \frac{1}{n}\hat{f}(n) < +\infty$.*

Démonstration. On a $\hat{f}(0) = 0$. On pose $F(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$. Alors F est continue sur $\mathbb{T}$ et ses coefficients de Fourier d'indice non nul sont donnés par $\hat{F}(n) = \frac{1}{in}\hat{f}(n)$ (théorème 3.3). Comme F est continue, le théorème de Fejér appliqué pour F en $t_0 = 0$ nous dit que

$$\lim_{N\to+\infty} 2\sum_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{n}{N+1}\right)\frac{\hat{f}(n)}{n} = i(F(0) - \hat{F}(0)) = -i\hat{F}(0).$$

Comme $\hat{f}(n) \geq 0$, ceci implique $\sum_{n>0} \frac{1}{n}\hat{f}(n) < +\infty$. □

Corollaire 3.31. *Si $a_n > 0$ et $\sum a_n/n = +\infty$ alors $\sum a_n \sin nt$ n'est pas la série de Fourier d'une fonction intégrable. Il existe donc des séries trigonométriques dont les coefficients tendent vers 0 qui ne sont pas des séries de Fourier.*

Par le théorème 3.29, la série trigonométrique

$$\sum_{n\geq 2} \frac{\cos nt}{\log n} = \sum_{|n|\geq 2} \frac{e^{int}}{2\log n}$$

est la série de Fourier d'une fonction intégrable alors que par le théorème 3.30, sa série trigonométrique conjuguée

$$\sum_{n\geq 2} \frac{\sin nt}{\log n} = -i\sum_{|n|\geq 2} \frac{\mathrm{sign}(n)}{2\log|n|}e^{int}$$

n'en est pas une.

On va maintenant développer quelques résultats simples sur la taille des coefficients de Fourier pour des fonctions ayant diverses propriétés de régularité.

Théorème 3.32. *Soit f absolument continue sur $\mathbb{T}$ alors $\hat{f}(n) = o(n^{-1})$.*

Démonstration. Comme f est absolument continue, par le théorème 2.58, f est dérivable presque partout sur I, f' est Lebesgue intégrable et on a $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau)d\tau$. Donc, pour $n \neq 0$ $\hat{f}(n) = \dfrac{1}{in}\hat{f}'(n)$ par le Théorème 3.3. Comme, par le Lemme de Riemann-Lebesgue, $\hat{f}'(n) \to 0$ quand $|n| \to +\infty$, la preuve est achevée. $\square$

Si on suppose maintenant que f est k-fois dérivable et que $f^{(k-1)}$ est absolument continue (c'est-à-dire que $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{T})$) alors

$$\hat{f}(n) = o(n^{-k}) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty. \tag{3.21}$$

Sous les mêmes hypothèses, comme par récurrence pour $0 \leq j \leq k$, on a $\hat{f}(n) = \frac{1}{(in)^j}\hat{f^{(j)}}(n)$, on sait que

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{|n|^j}\|f^{(j)}\|_1. \tag{3.22}$$

On a donc démontré

Théorème 3.33. *Si f est k-fois dérivable et que $f^{(k-1)}$ est absolument continue alors, pour $n \neq 0$,*

$$|\hat{f}(n)| \leq \min_{0\leq j\leq k} \frac{1}{|n|^j}\|f^{(j)}\|_1$$

Si f est indéfiniment différentiable, alors

$$|\hat{f}(n)| \leq \inf_{0\leq j} \frac{1}{|n|^j}\|f^{(j)}\|_1$$

Théorème 3.34. *Si f est de variations bornées (voir la section 2.3.3 et l'exercice 2.57) sur $\mathbb{T}$ alors, pour $n \neq 0$, $|\hat{f}(n)| \leq \dfrac{Var(f)}{\pi|n|}$.*

Démonstration. Soit μ la mesure construite dans l'exercice 2.57 à partir de f. Notons que, comme f est périodique, $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} d\mu(u) = 0$. En utilisant le théorème de Fubini, on calcule

$$\begin{aligned}|\hat{f}(n)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{-int}f(t)dt\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\left\{\substack{0\leq t\leq 2\pi \\ t\leq u\leq 2\pi}\right\}} e^{-int}d\mu(u)\,dt\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^u e^{-int}dt\right)d\mu(u)\right| \\ &= \left|\frac{1}{2in\pi}\int_{\mathbb{T}}(1-e^{-inu})d\mu(u)\right| \leq \frac{|\mu|(\mathbb{T})}{|n|\pi} = \frac{\mathrm{var}(f)}{|n|\pi}.\end{aligned}$$

$\square$

Définition 3.35. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. On définit le *module de continuité* de f, noté $\omega(f,\cdot)$ par

$$\text{pour } h \in \mathbb{R}^+, \quad \omega(f,h) = \sup_{|y|\leq h}\|f(\cdot+y) - f\|_\infty = \sup_{|y|\leq h}\sup_{\tau\in\mathbb{T}}|f(\tau+y) - f(\tau)|.$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. On définit le *module de continuité intégral* de f, noté $\Omega(f,\cdot)$ par

$$\text{pour } h \in \mathbb{R}^+, \quad \Omega(f,h) = \sup_{|y|\leq h}\|f(\cdot+y) - f\|_1 = \sup_{|y|\leq h}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(\tau+y) - f(\tau)|d\tau. \tag{3.23}$$

On vérifie facilement que si f est continue sur $\mathbb{T}$, $\Omega(f,h) \leq \omega(f,h)$ pour $h \geq 0$.

Théorème 3.36. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Pour $n \neq 0$, on a $|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2}\Omega\left(f, \frac{\pi}{|n|}\right)$.*

Démonstration. Par changement de variable, on calcule

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{int} f(t)dt = \frac{1}{4\pi}\left(\int_{\mathbb{T}} e^{int} f(t)dt - \int_{\mathbb{T}} e^{in(t-\pi/|n|)} f(t)dt\right) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{int}\left(f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{|n|}\right)\right) dt.$$

En prenant le module de part et d'autre et en le faisant passer sous le signe intégrale dans le membre de droite, on achève la preuve du résultat énoncé. □

3.1.4 Séries de Fourier de fonctions de carré intégrable

Théorème 3.37. *Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. Alors*

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt$;
2. $\displaystyle f = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{int}$ *où la convergence est entendue dans le sens de la norme de $L^2(\mathbb{T})$;*
3. *l'application $f \in L^2(\mathbb{T}) \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ est un isomorphisme isométrique ;*
4. *pour $g \in L^2(\mathbb{T})$, on a* $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$.

Démonstration. On sait que $L^2(\mathbb{T})$ muni de la norme $\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt$ est un espace de Hilbert. Un calcul immédiat nous dit que la famille $(e^{in\cdot})_{n\in\mathbb{Z}}$ forme un système orthonormal dans cet espace. Du théorème 3.18, on tire qu'il est total i.e. l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par ce système est total. Le théorème suit alors de résultats classiques sur les espaces de Hilbert et leurs bases hilbertiennes. On pourra consulter le chapitre 4 du polycopié du cours d'Analyse Fonctionnelle de L3 3M210. □

On en déduit immédiatement le

Corollaire 3.38. *Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. Alors il existe $\tilde{f}$ une unique fonction de $L^2(\mathbb{T})$ ayant pour série de Fourier la série conjuguée de celle de f (voir la définition 3.6). L'application $f \in L^2(\mathbb{T}) \mapsto \tilde{f} \in L^2(\mathbb{T})$ est continue de norme* 1.

3.1.5 Série de Fourier sur $L^p(\mathbb{T})$

Théorème 3.39 (Th. de Hausdorff-Young)**.** *Soit $1 < p \leq 2$ et q l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ alors $\left\|(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}\right\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} \leq \|f\|_p$.*

Remarque 3.40. Ce théorème ne peut pas s'étendre à $p > 2$: dans ce cas, si $f \in L^p(\mathbb{T})$, comme $L^p(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ si $p \geq 2$, on obtient seulement que les coefficients de Fourier de f sont de carré sommable. Ceci est optimal car on peut montrer que si $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est positive de carré sommable alors il existe une fonction continue telle que $|\hat{f}(n)| \geq c_n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

3.1.6 Coefficients de Fourier "généralisés"

On va maintenant étendre la notion de coefficient de Fourier au delà de l'espace $L^1(\mathbb{T})$. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach homogène contenant les polynômes trigonométriques. Soit $\mathcal{B}^*$ son dual i.e. l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{B}$. La norme naturelle sur $\mathcal{B}^*$ définie par $\|\mu\|_{\mathcal{B}^*} = \sup_{b\in\mathcal{B}\setminus\{0\}} \frac{|\mu(b)|}{|b|}$ le munit d'une structure d'espace de Banach (cours d'Analyse Fonctionnelle de M1). Posons maintenant $\langle \mu, b\rangle = \overline{\mu(b)}$.
Pour $\mu \in \mathcal{B}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, on définit le n-ième coefficient de Fourier de μ comme $\hat{\mu}(n) := \overline{\mu(e^{in\cdot})}$. On notera que $\mu \mapsto (\hat{\mu}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est anti-linéaire (alors que $b \in \mathcal{B} \mapsto (\hat{b}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est linéaire).
Par définition, on a

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |\hat{\mu}(n)| \leq \|\mu\|_{\mathcal{B}^*}\|e^{in\cdot}\|_{\mathcal{B}}. \tag{3.24}$$

Cette définition est cohérente dans le cas où μ s'identifie naturellement avec une fonction intégrable. Par exemple, si $\mathcal{B} = L^p(\mathbb{T})$ $(1 < p < +\infty)$. Alors, par le théorème 2.25, $\mathcal{B}^* = L^q(\mathbb{T})$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Une fonction g dans $L^q(\mathbb{T})$ est identifié à la forme linéaire $f \in L^p(\mathbb{T}) \mapsto \int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)}dt$. Et l'on a bien que le n-ième coefficient de Fourier de la forme associée à g est le le n-ième coefficient de Fourier de la fonction g.

Théorème 3.41 (Théorème de Parseval)**.** *Soient $f \in \mathcal{B}$ et $\mu \in \mathcal{B}^*$. Alors*

$$\langle \mu, f\rangle = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \hat{f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)}. \tag{3.25}$$

Démonstration. Pour $P(t) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{P}(n)e^{int}$, on calcule par linéarité que $\langle \mu, P\rangle = \sum_{n=-N}^{N} \hat{P}(n)\overline{\hat{\mu}(n)}$.
Par le théorème 3.18, on sait que pour $f \in \mathcal{B}$, $f = \lim_{N\to+\infty} F_N * f$ dans la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$. Par continuité de μ, la remarque ci-dessus et le calcul explicite des coefficients de Fourier de $F_N * f$, on calcule

$$\langle \mu, f\rangle = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{F_N * f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \hat{f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)}.$$

□

Exercice 3.42. Si la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)}$ converge, alors $\langle \mu, f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)}$.

On déduit du théorème 3.41

Corollaire 3.43. *Si $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{\mu}(n) = 0$ alors $\mu = 0$.*

Pour $f \in \mathcal{B}$ et $\mu \in \mathcal{B}^*$, on peut définir $f * \mu$ de la façon suivante $f * \mu(t) = \langle \mu, f_t\rangle$ (où $f_t(\tau) = f(\tau - t)$). Par la définition 3.14, on sait que $f * \mu$ est une fonction continue. On a alors

$$\begin{aligned} F_n * \mu(t) &= \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \overline{\hat{\mu}(-n)}e^{int}, \\ D_n * \mu(t) &= \sum_{n=-N}^{N} \overline{\hat{\mu}(-n)}e^{int}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

L'application $\mathcal{F}_N: \ f \in \mathcal{B} \mapsto F_N * f$ est linéaire bornée de $\mathcal{B}$ dans lui-même ; de même, $\mathcal{F}_N^*: \ \mu \in \mathcal{B}^* \mapsto F_N * \mu$ est linéaire bornée de $\mathcal{B}^*$ dans lui-même. Par le théorème 3.41, $\mathcal{F}_N^*$ est l'adjoint de $\mathcal{F}_N$ i.e. l'unique endomorphisme de $\mathcal{B}^*$ tel que, pour $f \in \mathcal{B}$ et $\mu \in \mathcal{B}^*$, $\langle \mu, \mathcal{F}_N(f)\rangle = \langle \mathcal{F}_n^*(\mu), f\rangle$. Les applications $\mathcal{F}_N$ et $\mathcal{F}_N^*$ ont la même norme (l'une dans $\mathcal{B}$, l'autre dans $\mathcal{B}^*$) qui vaut 1 par la proposition 3.16.
De même, $\mathcal{D}_N^*: \ \mu \in \mathcal{B}^* \mapsto D_N * \mu \in \mathcal{B}^*$ est l'adjoint de . $\mathcal{D}_N: \ f \in \mathcal{B} \mapsto D_N * f \in \mathcal{B}$.

Théorème 3.44. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach homogène contenant les polynômes trigonométriques. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes.*
Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. *il existe $\mu \in \mathcal{B}^*$ telle que $\|\mu\|_{\mathcal{B}^*} \leq C$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{\mu}(n) = a_n$;*
2. *pour tout polynôme trigonométrique P, on a*

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{P}(n)\overline{a_n}\right| \leq C\|P\|_{\mathcal{B}}.$$

Démonstration. L'implication $1 \Rightarrow 2$ est une conséquence immédiate du théorème 3.41, la formule de Parseval.
Supposons 2. Alors l'application $P \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{P}(n)\overline{a_n}$ définie sur les polynômes trigonométriques est une forme linéaire continue pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$. Par le corollaire 3.19, elle s'étend à tout l'espace $\mathcal{B}$ en une forme linéaire continue bornée par C ; appelons la $\mu \in \mathcal{B}^*$. Par sa définition sur les polynômes trigonométriques, on a $\hat{\mu}(n) = \overline{\langle \mu, e^{in\cdot}\rangle} = a_n$ □

Corollaire 3.45. *Une série trigonométrique $S \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ est la série de Fourier de μ dans $\mathcal{B}^*$ tel que $\|\mu\|_{\mathcal{B}^*} \leq C$ si et seulement si $\left\|\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N+1}\right)a_n e^{in\cdot}\right\|_{\mathcal{B}^*} \leq C$ pour tout N.*

Remarque 3.46. Les polynômes trigonométriques définissent de façon naturelle des formes linéaires continues sur $\mathcal{B}$. Dans le corollaire précédent on a identifié les polynômes trigonométriques aux formes qu'ils définissent.

Preuve du corollaire 3.45. Soit $S \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ et supposons qu'il existe μ dans $\mathcal{B}^*$ tel que $\|\mu\|_{\mathcal{B}^*} \leq C$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{\mu}(n) = a_n$. Alors $\mathcal{F}_N^*(\mu) = \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N+1}\right)a_n e^{in\cdot}$. Donc par la discussion suivant le corollaire 3.43, on a $\|\mathcal{F}_N^*(\mu)\|_{\mathcal{B}^*} \leq \|\mu\|_{\mathcal{B}^*} \leq C$.
La réciproque suit du théorème 3.44 et du calcul

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{P}(n)\overline{a_n} = \lim_{N\to+\infty}\left\langle \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N+1}\right)a_n e^{in\cdot}, P\right\rangle$$

où P est un polynôme trigonométrique. □

On va s'intéresser au cas des mesures de Borel sur $\mathbb{T}$. On sait que pour $\mathcal{B} = \mathcal{C}(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions continues, le dual $\mathcal{B}^*$ est l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ des mesures de Borel (complexes finies) sur $\mathbb{T}$ (voir le théorème 2.27) ; on prendra l'identification $\langle \mu, f\rangle = \overline{\int_{\mathbb{T}} \overline{f}\, d\mu}$ (qui est une variante de celle prise dans le théorème 2.27).

Les coefficients de Fourier d'une mesure sont appelés coefficients de Fourier-Stieltjes. L'application $f \in L^1(\mathbb{T}) \mapsto (2\pi)^{-1} f(t)dt$ est un injection linéaire isométrique de $L^1(\mathbb{T})$ dans $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ (voir l'exercice 2.29). Elle n'est pas surjective : par exemple, la masse de Dirac δ_0 i.e. la mesure définie par $\langle \delta_0, f\rangle = f(0)$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{T})$. En effet, pour $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions continues bornées par 1 telle que $\mathrm{supp} f_n \subseteq [-1/n, 1/n]$ et $\langle \delta_0, f_n\rangle = f_n(0) = 1$, pour tout $g \in L^1(\mathbb{T})$, on a $\langle g, f_n\rangle \to 0$ (par convergence dominée).
On calcule $\hat{\delta_0}(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On voit que la suite des coefficients de Fourier-Stieltjes de δ_0 ne tend pas vers 0.

Théorème 3.47. *Une série trigonométrique $S \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ est la série de Fourier-Stieltjes d'une mesure positive si et seulement si $\sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) a_n e^{int} \geq 0$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{T}$.*

Démonstration. Si $a_n = \hat{\mu}(n)$ pour tout n (où μ est une mesure positive), alors, pour f continue positive

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{F_N * \mu(t)}dt = \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right)\hat{f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)} = \overline{\int_{\mathbb{T}} \overline{F_N * f}\, d\mu} = \langle \mu, F_N * f\rangle \geq 0$$

car $F_N * f \geq 0$.
Comme f est arbitraire continue positive, ceci implique que la fonction continue $F_N * \mu$ est positive.
Réciproquement, si $\sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) a_n e^{int} \geq 0$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{T}$, on a

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) a_n e^{in\cdot}\right\|_{\mathcal{M}(\mathbb{T})} &= \sup_{\substack{f\in\mathcal{C}(\mathbb{T})\\ \|f\|_\infty = 1}} \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) a_n e^{int}\right) f(t)dt\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) a_n e^{int}\right) dt = a_0.
\end{aligned}$$

Donc par le corollaire 3.45, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite des coefficients de Fourier-Stieltjes d'une mesure borélienne μ. Pour f continue positive, par le théorème 3.41, on a

$$\int_{\mathbb{T}} f d\mu = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right)\hat{f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)} = \lim_{N\to+\infty}\int_{\mathbb{T}} f(t)\left(\sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) a_n e^{int}\right) dt \geq 0.$$

Donc μ est positive. □

Définition 3.48. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite dans $\mathbb{C}$. On dit que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est positive si pour toute suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ nulle exceptée pour un nombre fini d'indices, on a

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} a_{m-n} z_m \overline{z_n} \geq 0. \tag{3.27}$$

Théorème 3.49 (Théorème de Herglotz)**.** *Une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est positive si et seulement si il existe une mesure borélienne positive μ sur $\mathbb{T}$ telle que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $a_n = \hat{\mu}(n)$.*

Démonstration. Supposons que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $a_n = \hat{\mu}(n)$ pour μ une mesure borélienne positive sur $\mathbb{T}$. Alors

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} a_{m-n} z_m \overline{z_n} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \int_{\mathbb{T}} e^{-i(m-n)t} z_m \overline{z_n} d\mu = \int_T \left| \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-imt} z_m \right|^2 d\mu \geq 0. \tag{3.28}$$

D'autre part, si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est définie positive, pour $N \geq 1$ et $t \in \mathbb{T}$, on pose

$$z_n = \begin{cases} e^{int} & \text{si } |n| \leq N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} a_{m-n} z_m \overline{z_n} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j C_{N,j} e^{ijt}$ où $C_{N,j} = \max(0, 2N+1-|j|)$ i.e. le nombre de façon de décomposer $j = m - n$ avec $|n| \leq N$ et $|m| \leq N$. Donc,

$$\sum_{n=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|n|}{2N+1}\right) a_n e^{int} = \frac{1}{2N+1} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} a_{m-n} z_m \overline{z_n} \geq 0.$$

On obtient l'existence de μ en appliquant le théorème 3.47 et son unicité par le corollaire 3.43. □

3.1.7 Le théorème spectral pour les opérateurs unitaires et auto-adjoints bornés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable sur $\mathbb{C}$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $A : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ un opérateur borné (i.e. un endomorphisme continu) ; on notera $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'espace de Banach des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$ muni de sa norme induite par celle de $\mathcal{H}$). On rappelle que $\mathrm{Ker}A = \{v \in \mathcal{H}; Av = 0\}$ et $\mathrm{Im}A = \{Av; v \in \mathcal{H}\}$. On définit l'adjoint de A, noté A^*, comme l'unique endomorphisme vérifiant $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$ pour tout $(u, v) \in \mathcal{H}^2$. L'existence et l'unicité sont garanties par le théorème de représentation de Riesz.
On vérifie facilement

Lemme 3.50. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. On a*
- $(A^*)^* = A$;
- $\|A\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} = \|A^*\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}}$;
- *$\mathrm{Ker}\, A^* = (\mathrm{Im}\, A)^\perp$ et $\mathrm{Ker}\, A = (\mathrm{Im}\, A^*)^\perp$.*

Démonstration. Le premier point est évident par la définition de l'adjoint. Le deuxième est une conséquence de cette définition et de la formule $\|A\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} = \sup_{|u|=|v|=1} |\langle Au, v\rangle|$.
Enfin

$$u \perp \mathrm{Im}\, A \iff \forall v \in \mathcal{H},\ \langle Av, u\rangle = 0 \iff \forall v \in \mathcal{H},\ \langle v, A^*u\rangle = 0 \iff A^*u = 0.$$

Ainsi $\mathrm{Ker}\, A^* = (\mathrm{Im}\, A)^\perp$. Donc, $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, (A^*)^* = (\mathrm{Im}\, A^*)^\perp$. □

dans la suite, pour simplifier les notations, on identifiera l'opérateur identité sur $\mathcal{H}$ avec 1 i.e. pour $z \in \mathbb{C}$, on écrire simplement z à la place de $z\,\mathrm{Id}$.

Définition 3.51. On dit que $z \in \mathbb{C}$ est dans *l'ensemble résolvant* de A, noté $\rho(A)$, si $A - z$ est inversible d'inverse borné sur $\mathcal{H}$. Le *spectre* de A, noté $\rho(A)$, est le complémentaire de l'ensemble résolvant de A i.e. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Lemme 3.52. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.*
Si $z_0 \in \rho(A)$, alors $D(z_0, r_0) := \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < r_0\} \subset \rho(A)$ où $r_0 = \|(A - z_0)^{-1}\|^{-1}$.
L'ensemble $\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{C} \setminus D(0, \|A\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}})$ et l'application $z \in \rho(A) \mapsto (A - z)^{-1}$ est développable en série entière sur $\rho(A)$.

Démonstration. Soit $z_0 \in \rho(A)$. Alors

$$A - z = (A - z_0)\left(1 - (z - z_0)(A - z_0)^{-1}\right).$$

Donc si $|z - z_0| \|(A - z_0)^{-1}\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} < 1$, un inverse de $A - z$ est immédiatement donné par le série de Neuman

$$(A - z)^{-1} = \sum_{n\geq 0} (z - z_0)^n (A - z_0)^{-n-1} \tag{3.29}$$

qui converge normalement (car $\|A^n\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} \leq \|A\|^n_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}}$). Ainsi $D(z_0, r_0) := \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < r_0\} \subset \rho(A)$ où $r_0 = \|(A - z_0)^{-1}\|^{-1}$ et (3.29) nous le développement en série entière annoncé au voisinage de z_0.
Pour $|z| > \|A\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}}$, on utilise le développement de Neuman (au voisinage de l'infini)

$$(A - z)^{-1} = \sum_{n\geq 0} z^{-1-n} A^n$$

qui converge normalement. Donc $\{|z| > \|A\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}}\} \subset \rho(A)$. $\square$

Le lemme 3.52 implique immédiatement que $\sigma(A)$ est fermé dans $\overline{D(0, \|A\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}})}$, donc, compact.

Définition 3.53. On dit que A est *auto-adjoint* si $A^* = A$. On dit que A est *unitaire* si $AA^* = A^*A = 1$.

Les opérateurs auto-adjoints et unitaires sont intimement liés.

Lemme 3.54. *Soit A auto-adjoint sur $\mathcal{H}$. Alors $A - i = (A + i)^*$ est inversible et $U := (A + i)((A + i)^*)^{-1} = (A + i)(A - i)^{-1}$ est unitaire et $1 \in \rho(U)$. U est la transformée de Cayley de A.*
Soit U unitaire sur $\mathcal{H}$ tel que $U - 1$ est inversible d'inverse borné (i.e. $1 \in \rho(U)$). Alors $A := i(U + 1)(U - 1)^{-1}$ est borné et auto-adjoint.

On vérifie que les deux transformations introduites dans le lemme précédent sont l'inverse l'une de l'autre. Le point i ne joue pas de rôle particulier dans la transformation de Cayley : on peut le remplacer par un complexe quelconque hors de la droite réelle. La transformation inverse dépend bien sûr de ce point.

Preuve du lemme 3.54. Soit A auto-adjoint sur $\mathcal{H}$. Montrons que $A - i$ est inversible. Il est injectif car, pour $u \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}\|(A - i)u\|^2 &= \|Au\|^2 + \|u\|^2 - \langle Au, iu\rangle - \langle iu, Au\rangle = \|Au\|^2 + \|u\|^2 - i\langle Au, u\rangle + i\langle Au, u\rangle \\ &= \|Au\|^2 + \|u\|^2.\end{aligned} \tag{3.30}$$

On montre de même que $\mathrm{Ker}(A + i) = \{0\}$.
Il est surjectif. Remarquons qu'il suffit de montrer que $\mathrm{Im} A - i$ est fermée. En effet si c'est le cas alors par le dernier point du lemme 3.50, on sait que $\overline{\mathrm{Im}\,(A - i)} = (\mathrm{Ker}(A + i))^{\perp} = \mathcal{H}$.
Soit $v \in \overline{\mathrm{Im}\,(A - i)}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathcal{H}$ tel que $(A - i)u_n \underset{n\to+\infty}{\to} v \in \mathcal{H}$. Alors par (3.30), on a $\|u_n - u_m\|^2 \leq \|(A - i)(u_n - u_m)\|^2$. Donc $(u_n)_n$ est de Cauchy et donc converge vers $u \in \mathcal{H}$. Comme A est borné, on obtient que $(A - i)u = v$. Ainsi $v \in \mathrm{Im}\,(A - i)$. Ainsi $\mathrm{Im}\,(A - i) = \mathcal{H}$.
Vérifions que $U := (A + i)(A - i)^{-1}$ qui est borné comme composé d'opérateurs bornés est unitaire. Comme A est auto-adjoint, $(A \pm i)^* = A \mp i$. D'autre part, $A - i$ et $A + i$ commutent, donc $(A - i)^{-1}$ et $A + i$ aussi. Ainsi

$$UU^* = (A + i)(A - i)^{-1}(A + i)^{-1}(A - i) = (A - i)^{-1}(A + i)(A + i)^{-1}(A - i) = 1.$$

Enfin on calcule $U - 1 = (A + i)(A - i)^{-1} - 1 = 2i(A - i)^{-1}$ ce qui prouve que $U - 1$ est inversible.
Pour la seconde assertion, en utilisant le fait que U est unitaire, on calcule

$$A^* = -i(U^* + 1)(U^* - 1)^{-1} = -i(1 + U)U^*(U^*)^{-1}(1 - U)^{-1} = i(U + 1)(U - 1)^{-1} = A.$$

$\square$

Lemme 3.55. *Soit A auto-adjoint. Alors $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ et, si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a*

$$\|(A-z)^{-1}\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} \leq \frac{1}{|Im\, z|} = \frac{1}{dist(z,\mathbb{R})}. \tag{3.31}$$

Si U est unitaire alors $\sigma(U) \subset \{|z|=1\}$ et, pour $|z| \neq 1$, on a

$$\|(U-z)^{-1}\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} \leq \frac{1}{||z|-1|} = \frac{1}{dist(z,\{|z|=1\})}. \tag{3.32}$$

Démonstration. La démonstration du premier point suit celle de l'inversiblité de $A-i$ dans la preuve du lemme 3.54 et (3.30) devient

$$\|(A-z)u\|^2 = \|Au\|^2 + |\mathrm{Im}\, z|^2\|u\|^2 \geq |\mathrm{Im}\, z|^2\|u\|^2. \tag{3.33}$$

Ainsi $\|u\| \geq |\mathrm{Im}\, z| \|(A-z)^{-1}u\|$.
Soit U unitaire ; donc $\|U\| = 1$. Pour $|z| > 1$, $U - z = z(z^{-1}U - 1)$ est donc inversible par la série de Neuman normalement convergente $(U-z)^{-1} = -\sum_{n\geq 0} z^{-1-n}U^n$. Donc, pour $|z| > 1$,

$$\|(U-z)^{-1}\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} \leq \sum_{n\geq 0} |z|^{-1-n} = \frac{|z|^{-1}}{1-|z|^{-1}} = \frac{1}{|z|-1}$$

De même, pour $|z| < 1$, $U - z = U(1 - zU^*)$ est inversible par la série de Neuman normalement convergente $(U-z)^{-1} = -\sum_{n\geq 0} z^n (U^*)^{n+1}$. Donc, pour $|z| < 1$,

$$\|(U-z)^{-1}\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} \leq \sum_{n\geq 0} |z|^{-n} = \frac{1}{1-|z|}$$

□

Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}$ un sous espace vectoriel.

Définition 3.56. On dit que $\mathcal{E}$ est *invariant* ou *stable* par A linéaire borné si $A\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$.

Lemme 3.57. *Si $\mathcal{E}$ fermé et invariant par U unitaire (resp. A auto-adjoint), alors $U_{|\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est unitaire (resp. $A_{|\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est auto-adjoint) ; ici $\mathcal{E}$ est muni de la structure hilbertienne induite par celle de $\mathcal{H} \supset \mathcal{E}$. De plus dans ce cas U (resp. A) se décompose sur la somme directe orthogonale $\mathcal{E} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{E}^\perp$ en $\begin{pmatrix} U_{|\mathcal{E}} & 0 \\ 0 & U_{|\mathcal{E}^\perp} \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} A_{|\mathcal{E}} & 0 \\ 0 & A_{|\mathcal{E}^\perp} \end{pmatrix}$) où $\mathcal{E}^\perp$ est l'orthogonal de $\mathcal{E}$. On a alors que $\sigma(U) = \sigma(U_{|\mathcal{E}}) \cup \sigma(U_{|\mathcal{E}^\perp})$ (resp. $\sigma(A) = \sigma(A_{|\mathcal{E}}) \cup \sigma(A_{|\mathcal{E}^\perp})$).*

M

Démonstration. Si $U\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$, on peut considérer $U_{|\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$. On a bien sûr, pour $u \in \mathcal{E}$, $\|Uu\|^2 = \|U_{|\mathcal{E}}u\|^2 = \|u\|^2$; donc par l'identité du parallélogramme, pour $(u,v) \in \mathcal{E}^2$

$$\langle (U_{|\mathcal{E}})^* U_{|\mathcal{E}} u, v\rangle = \langle U_{|\mathcal{E}} u, U_{|\mathcal{E}} v\rangle = \langle Uu, Uv\rangle = \langle u, v\rangle.$$

Ainsi $(U_{|\mathcal{E}})^*U_{|\mathcal{E}} = 1$; de même $U_{|\mathcal{E}}(U_{|\mathcal{E}})^* = 1$. De plus on voit que $(U_{|\mathcal{E}})^* = (U^*)_{|\mathcal{E}}$.
De plus, $\mathcal{E}^\perp$ est stable par U ; en effet, si $v \in \mathcal{E}^\perp$, $\forall u \in \mathcal{E}$, $\langle Uv, u\rangle = \langle v, U^*u\rangle = 0$ car $U^*u \in \mathcal{E}$.
D'autre part ceci Si A est auto-adjoint et $\mathcal{E}$ sous-espace stable par $\mathcal{A}$,, le fait que $A_{|\mathcal{E}}$ est clair par la définition.
De plus, $\mathcal{E}^\perp$ est aussi stable par A : en effet, si $v \in \mathcal{E}^\perp$, $\forall u \in \mathcal{E}$, $\langle Av, u\rangle = \langle v, Au\rangle = 0$ car $Au \in \mathcal{E}$. Ceci donne donc la décomposition annoncée.
Enfin, l'assertion sur les spectres découle du calcul

$$\begin{pmatrix} z - U_{|\mathcal{E}} & 0 \\ 0 & z - U_{|\mathcal{E}^\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (z - U_{|\mathcal{E}})^{-1} & 0 \\ 0 & (z - U_{|\mathcal{E}^\perp})^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{|\mathcal{E}} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{|\mathcal{E}^\perp} \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}.$$

□

Définition 3.58. Soit U unitaire sur $\mathcal{H}$ et $u \in \mathcal{H}$. *L'espace cyclique pour U engendré par u* est la clôture de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(U^n u)_{n\in\mathbb{Z}}$.
On dira qu'un espace $\mathcal{E}$ est *cyclique pour U* s'il est l'espace cyclique pour U engendré par un certain vecteur u. Dans ce cas on dira que le vecteur u est *cyclique pour U et $\mathcal{E}$*.

Lemme 3.59. *Soit U unitaire. Alors il existe $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ et $(\mathcal{E}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ une famille au plus dénombrable de sous-espaces de $\mathcal{H}$ cycliques pour U deux à deux orthogonaux tels que $\mathcal{H}$ soit la somme directe de ces sous-espaces i.e. $\mathcal{H} = \overset{\perp}{\bigoplus}_{n\in\mathcal{N}} \mathcal{E}_n$.*

Démonstration. Si $\mathcal{H} = \{0\}$, il n'y a rien à faire. Sinon soit $(e_m)_{m\in\mathcal{M}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ (où $\mathcal{M}$ est un intervalle d'entiers non nuls contenant 1).
On pose $f_1 = e_1$ et $m_1 = 1$. Considérons $\mathcal{E}_1$ l'espace cyclique pour U engendré par f_1. Si $\mathcal{E}_1 = \mathcal{H}$, on a fini. Sinon on peut trouver $m_2 \in \mathcal{M}$ tel que pour $m < m_2$, $e_m \in \mathcal{E}_1$ et $f_2 := \Pi_{\mathcal{E}_1^\perp} e_{m_2} \neq 0$ (où $\Pi_{\mathcal{E}_1^\perp}$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{E}_1^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{E}_1$). Considérons $\mathcal{E}_2$ l'espace cyclique pour U engendré par f_2. Alors $\mathcal{E}_1 \perp \mathcal{E}_2$. En effet, comme U est unitaire, pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $\langle U^n f_1, U^m f_2\rangle = \langle U^{n-m} f_1, f_2\rangle = 0$. Ainsi l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(U^n f_1)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthogonal à celui engendré par les vecteurs $(U^n f_2)_{n\in\mathbb{Z}}$. Et on conclut pour les clôtures par bicontinuité du produit scalaire. D'autre part, on sait que $\{e_m; 1 \le m \le m_2\} \subset \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$. En effet, par hypothèse sur m_2, on sait que $\{e_m; 1 \le m \le m_2 - 1\} \subset \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$. Et $e_{m_2} = \Pi_{\mathcal{E}_1} e_{m_2} + \Pi_{\mathcal{E}_1^\perp} e_{m_2} \in \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$.
Par récurrence, on construit ainsi une suite strictement croissante $(m_n)_{n\in\mathcal{N}}$ dans $\mathcal{M}$ et $(\mathcal{E}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ une famille (au plus dénombrable) de sous-espaces de $\mathcal{H}$ fermés deux à deux orthogonaux tous cycliques pour U tels que, pour tout n, $\{e_m; 1 \le m \le m_n\} \subset \mathcal{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_n$.
On obtient ainsi que $\{e_m; m \in \mathcal{M}\} \subset \overset{\perp}{\bigoplus}_{n\in\mathcal{N}} \mathcal{E}_n$. Or $\overset{\perp}{\bigoplus}_{n\in\mathcal{N}} \mathcal{E}_n$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ car tous les $(\mathcal{E}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ le sont. Donc, $\overset{\perp}{\bigoplus}_{n\in\mathcal{N}} \mathcal{E}_n$ contient la clôture de l'espace vectoriel engendré par $\{e_m; m \in \mathcal{M}\}$ qui est $\mathcal{H}$ car $(e_m)_{m\in\mathcal{M}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}$.
Ceci achève la preuve du lemme. □

Théorème 3.60 (Théorème spectral pour les opérateurs unitaires)**.** *Soit U un opérateur unitaire sur $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable.*
Alors il existe $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ et une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{T} \times \mathcal{N}$, disons, μ, appelée mesure spectrale et $\mathcal{U} : \mathcal{H} \mapsto L^2(\mu)$ un opérateur unitaire tel que $\mathcal{U}U\mathcal{U}^*$ soit l'opérateur de multiplication par $e^{it} : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ i.e. pour $f \in L^2(\mu)$, $[\mathcal{U}U\mathcal{U}^* f](t, n) = e^{it} f(t, n)$ pour $(t, n) \in \mathbb{T} \times \mathcal{N}$. De plus $\sigma(U) = \left\{e^{it};\ \exists n \in \mathcal{N},\ (t, n) \in supp\, \mu\right\}$.

Ceci correspond à la diagonalisation des matrices unitaires lorsque $\mathcal{H}$ est de dimension finie.

Démonstration. Le théorème spectral pour les opérateurs unitaires est une conséquence directe des lemmes 3.57 et 3.59 et du théorème suivant.

Théorème 3.61 (Théorème spectral pour les opérateurs unitaires dans le cas cyclique)**.** *Soit U un opérateur unitaire sur $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable que l'on supposera cyclique pour U.*
Alors il existe une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{T}$, disons, μ, appelée mesure spectrale et $\mathcal{U}: \mathcal{H} \mapsto L^2(\mu)$ un opérateur unitaire tel que $\mathcal{U}U\mathcal{U}^*$ soit l'opérateur de multiplication par $e^{it}: L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ i.e. pour $f \in L^2(\mu)$, $[\mathcal{U}U\mathcal{U}^* f](t) = e^{it}f(t)$. De plus $\sigma(U) = \{e^{it};\ t \in supp\,\mu\}$.

En effet, par les lemmes 3.57 et 3.59, U se décompose en la somme directe $\oplus_{n\in\mathcal{N}} U_{|\mathcal{E}_n}$ correspondant à la décomposition en somme directe $\mathcal{H} = \overset{\perp}{\bigoplus}_{n\in\mathcal{N}} \mathcal{E}_n$. On peut alors pour chaque n dans $\mathcal{N}$ considérer la mesure spectrale μ_n (sur $\mathbb{T}$) et l'opérateur unitaire $\mathcal{U}_n: \mathcal{E}_n \mapsto L^2(\mu_n)$ obtenus par le théorème 3.61 et définir la mesure μ sur $\mathbb{T} \times \mathcal{N}$ de la façon suivante : si A est un borélien de $\mathbb{T} \times \mathcal{N}$,

$$\mu(A) = c_{\mathcal{N}} \sum_{n\in\mathcal{N}} \int_{\mathbb{T}} \mathbf{1}_A(t,n)(n+1)^{-2} d\mu_n(t)$$

où $(c_{\mathcal{N}})^{-1} := \sum_{n\in\mathcal{N}} (n+1)^{-2}$. Alors μ est une mesure de probabilité et $L^2(\mu)$ est l'espace des fonctions $f: \mathbb{T} \times \mathcal{N} \to \mathbb{C}$ mesurables telles que $\int_{\mathbb{T}} \sum_{n\in\mathcal{N}} |f(t,n)|^2 (1+n)^{-2} d\mu_n(t)$. On peut alors considérer l'opérateur $\mathcal{U}: \mathcal{H} \mapsto L^2(\mu)$ définie par

$$\text{pour } e = \sum_{n\in\mathcal{N}} e_n \text{ où } e_n \in \mathcal{E}_n,\ \mathcal{U}(e)(t,n) = \frac{1}{\sqrt{c_{\mathcal{N}}}}(n+1)\left[\mathcal{U}_n(e_n)\right](t).$$

On calcule

$$\|\mathcal{U}(e)\|^2_{L^2(\mu)} = \int_{\mathbb{T}} \sum_{n\in\mathcal{N}} |\mathcal{U}(e)((t,n)|^2 (1+n)^{-2} d\mu_n(t) = \int_{\mathbb{T}} \sum_{n\in\mathcal{N}} \left|\mathcal{U}_n(e_n)\right|^2(t) d\mu_n(t) = \sum_{n\in\mathcal{N}} \|e_n\|^2_{\mathcal{H}} = \|e\|^2_{\mathcal{H}}.$$

De plus, par le théorème 3.61, en utilisant les mêmes notations, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(Ue)(t,n) &= \mathcal{U}\left(\sum_{n\in\mathcal{N}} U_{|\mathcal{E}_n} e_n\right)(t,n) = \sum_{n\in\mathcal{N}} \mathcal{U}_n\left(U_{|\mathcal{E}_n} e_n\right)(t) = \sum_{n\in\mathcal{N}} e^{it}\mathcal{U}_n\left(e_n\right)(t) = e^{it} \sum_{n\in\mathcal{N}} \mathcal{U}_n\left(e_n\right)(t)\\ &= e^{it}\mathcal{U}(e)(t,n).\end{aligned}$$

Ainsi, pour $f \in L^2(\mu)$, $[\mathcal{U}U\mathcal{U}^* f](t,n) = e^{it} f(t,n)$ pour $(t,n) \in \mathbb{T} \times \mathcal{N}$.
Pour démontrer la dernière assertion du théorème 3.60, il suffit de constater que $\sigma(U) = \overline{\bigcup_{n\in\mathcal{N}} \sigma(U_{|\mathcal{E}_n})}$ (par le lemme 3.57 et le fait que spectre et support est sont fermés) et d'utiliser la définition de μ en terme des $(\mu_n)_{n\in\mathcal{N}}$ et la dernière assertion du théorème 3.61.
Ceci achève la preuve du théorème 3.60. □

Preuve du théorème 3.61. Soit U unitaire sur $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable que l'on supposera cyclique pour U et soit f un vecteur cyclique tel que $\|f\|_{\mathcal{H}} = 1$.
Pour $n \in \mathbb{Z}$, posons $a_n := \langle U^{-n}f, f\rangle$. Alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est définie positive (cf définition 3.48. En effet, pour toute suite à support compact $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, comme U est unitaire, on calcule

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} a_{m-n} z_m \overline{z_n} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \langle U^m f, U^n f\rangle z_m \overline{z_n} = \left\|\sum_{m\in\mathbb{Z}} \overline{z_m} U^m f\right\|^2 \geq 0. \tag{3.34}$$

Par le théorème 3.49, il existe alors une mesure positive borélienne sur $\mathbb{T}$, disons, μ telle que $\hat{\mu}(n) = a_n$. On a $\mu(\mathbb{T}) = \hat{\mu}(0) = a_0 = \|f\|^2 = 1$. Donc μ est une mesure de probabilité.
Par le calcul (3.34), pour toute suite à support compact $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on calcule

$$\left\|\sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m U^m f\right\|^2 = \int_{\mathbb{T}} \left|\sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m e^{imt}\right|^2 d\mu(t). \tag{3.35}$$

Donc, si on pose $\mathcal{U}(U^n f) := e^{int}$, on peut étendre $\mathcal{U}$ à l'espace vectoriel engendré par la famille $(U^n f)_{n\in\mathbb{Z}}$ en une application linéaire à valeurs dans $L^2(\mu)$. Par (3.35), on voit donc que $\mathcal{U}$ définit une isométrie de l'espace vectoriel engendré par la famille $(U^n f)_{n\in\mathbb{Z}}$ à valeurs dans $L^2(\mu)$. Comme par hypothèse, l'espace vectoriel engendré par la famille $(U^n f)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathcal{H}$, elle s'étend en une isométrie à $\mathcal{H}$ tout entier. Elle est clairement injective. Elle est aussi surjective. En effet, l'image de $\mathcal{U}$ contient le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques qui est dense dans $L^2(\mu)$ par application des théorèmes 1.68 et 3.18 ; de plus, l'image est fermée : si $(\mathcal{U}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v, alors $(\mathcal{U}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et, comme $\|\mathcal{U}u_n - \mathcal{U}u_m\|_{L^2(\mu)} = \|u_n - u_m\|_{\mathcal{H}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi ; elle converge donc, disons, vers u et par continuité, $v = \mathcal{U}u$.
Ainsi $\mathcal{U}$ est unitaire.
D'autre part, pour toute suite à support compact $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on calcule

$$\mathcal{U}\left[U\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m U^m f\right)\right] = \mathcal{U}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m U^{m+1} f\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m e^{i(m+1)t} = e^{it}\mathcal{U}\left[\sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m U^m f\right].$$

Par densité et continuité, cette relation s'étend à tout $\mathcal{H}$; on vient donc de montrer que $\mathcal{U}U\mathcal{U}^*$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $t \mapsto e^{it}$ sur $L^2(\mu)$.
Montrons que $\sigma(U) = \left\{e^{it};\ t \in \operatorname{supp}\mu\right\}$. Clairement, si $z \notin \left\{e^{it};\ t \in \operatorname{supp}\mu\right\}$, alors l'application $t \mapsto |e^{it} - z|$ est minorée par $c > 0$ sur $\operatorname{supp}\mu$. Ainsi, dans $L^2(\mu)$, l'opérateur $f \mapsto (e^{i\cdot} - z)f$ est inversible d'inverse l'opérateur borné $f \mapsto (e^{i\cdot} - z)^{-1}f$. En conjuguant par l'opérateur unitaire $\mathcal{U}$, on obtient que dans $\mathcal{H}$, l'opérateur $f \mapsto (U - z)f$ est inversible d'inverse l'opérateur borné $f \mapsto (U - z)^{-1}f$. Ainsi $z \notin \sigma(U)$.
Réciproquement, si $z \in \left\{e^{it};\ t \in \operatorname{supp}\mu\right\}$, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mu(T_\varepsilon) > 0$ où $T_\varepsilon = \left\{t;\ e^{it} \in D(z,\varepsilon) \cap \{|z'| = 1\}\right\}$.
Donc, si on pose $u_\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{\mu(T_\varepsilon)}}\mathcal{U}^*(\mathbf{1}_{T_\varepsilon})$, on calcule

$$\|u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{T_\varepsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu(T_\varepsilon)}}\right)^2 d\mu(t) = \frac{\mu(T_\varepsilon)}{\mu(T_\varepsilon)} = 1 \quad \text{et} \quad \|(U - z)u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{\mu(T_\varepsilon)} \int_{T_\varepsilon} \left|e^{it} - z\right|^2 d\mu(t) \le \varepsilon^2.$$

Ainsi, si $z \notin \sigma(U)$ alors $(U - z)^{-1}$ existerait et serait borné, disons, par $C > 0$ et ainsi

$$1 = \|u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}} = \|(U - z)^{-1}(U - z)u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}} \le C\varepsilon$$

ceci pour tout $\varepsilon > 0$ ce qui est absurde. Donc $z \in \sigma(U)$.
Ceci conclut la preuve du théorème 3.61. □

Comme corollaire du théorème 3.60, on obtient

Théorème 3.62 (Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints bornés)**.** *Soit A un opérateur auto-adjoint borné sur $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable.*
Alors il existe $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ et une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R} \times \mathcal{N}$, disons, μ, appelée mesure spectrale et $\mathcal{U} :\ \mathcal{H} \mapsto L^2(\mu)$ un opérateur unitaire tel que $\mathcal{U}A\mathcal{U}^*$ soit l'opérateur de multiplication par $t :\ L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ i.e. pour $f \in L^2(\mu)$, $[\mathcal{U}U\mathcal{U}^* f](t,n) = tf(t,n)$ pour $(t,n) \in \mathbb{R} \times \mathcal{N}$. De plus $\sigma(A) = \{t;\ \exists n \in \mathcal{N},\ (t,n) \in \operatorname{supp}\mu\}$.

Démonstration. Suivant le lemme 3.54, on construit l'opérateur unitaire $U := (A+i)(A-i)^{-1}$ et par le théorème 3.60, $\tilde{\mu}$ la mesure spectrale sur $\mathbb{T}\times\mathcal{N}$ associée à U ; appelons $\tilde{\mathcal{U}}$ l'application unitaire associée de $\mathcal{H}$ dans $L^2(\mu)$ qui conjugue U en la multiplication par e^{it} (donnée par le théorème 3.60). Comme $1\in\rho(U)$, on sait qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que le support de $\tilde{\mu}$ ne rencontre pas l'ensemble $\{(e^{it},n);\ n\in\mathcal{N},\ t\in[-\varepsilon,\varepsilon]\}$. Comme $A := i(U+1)(U-1)^{-1}$, pour $f\in L^2(\tilde{\mu})$, on calcule

$$\tilde{\mathcal{U}}\,A\tilde{\mathcal{U}}^* f(t,n) = i\frac{e^{it}+1}{e^{it}-1}f(t,n) = \operatorname{cotan}(t/2)f(t,n). \tag{3.36}$$

Posons $\varphi:\ \mathbb{T}\times\mathcal{N}\to\mathbb{R}\times\mathcal{N}$ l'application définit par $\varphi(t,n) = (\operatorname{cotan}(t/2),n)$. Soit $\mu=\varphi_*(\tilde{\mu})$ la mesure image de $\tilde{\mu}$ par φ. On définit $\mathcal{V}: L^2(\mu)\to L^2(\tilde{\mu})$ par $\mathcal{V}(f)(t,n) = f\circ\varphi(t,n)$. Alors

$$\|\mathcal{V}(f)\|^2_{L^2(\tilde{\mu})} = \sum_{n\in\mathcal{N}}\int_{\mathbb{T}}|f\circ\varphi|^2(t,n)d\tilde{\mu}(t,n) = \sum_{n\in\mathcal{N}}\int_{\mathbb{R}}|f|^2(t,n)d\mu(t,n) = \|f\|^2_{L^2(\mu)}.$$

Comme le support de $\tilde{\mu}$ ne rencontre pas l'ensemble $\{(e^{it},n);\ n\in\mathcal{N},\ t\in[-\varepsilon,\varepsilon]\}$, on voit que φ est bijective bicontinue de $\operatorname{supp}\tilde{\mu}$ dans $\operatorname{supp}\mu$. Ainsi $\mathcal{V}$ est unitaire de $L^2(\mu)$ dans $L^2(\tilde{\mu})$. Si maintenant on pose $\mathcal{U}=\mathcal{V}^{-1}\tilde{\mathcal{U}}$, on obtient que $\mathcal{U}$ est unitaire de $\mathcal{H}$ dans $L^2(\mu)$ et la relation (3.36) devient, pour $f\in L^2(\mu)$,

$$\mathcal{U}\,A\mathcal{U}^* f(t,n) = tf(t,n).$$

Le calcul de $\sigma(A)$ étant immédiat par le théorème 3.60 et l'inverse de la transformée de Cayley, ceci achève la preuve du théorème 3.62. □

Le théorème 3.62 correspond à la diagonalisation des matrices hermitiennes lorsque $\mathcal{H}$ est de dimension finie.

3.2 Convergence des séries de Fourier

La convergence des séries de Fourier est un problème qui se révèle épineux, surtout, celui de la convergence ponctuelle. Souvent les convergences dans certaines normes fonctionnelles sont plus simples à traiter. La question de la convergence est reliée à celle de l'existence et des propriétés de la fonction conjuguée (voir la section 3.1.1).

3.2.1 Convergence en norme dans les espaces de Banach homogènes

Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$. Pour $f\in\mathcal{B}$, on rappelle que

$$S_n(f) = (D_n * f)(t) = \sum_{j=-n}^{n}\hat{f}(j)e^{ijt}. \tag{3.37}$$

Définition 3.63. On dit que $\mathcal{B}$ a la *propriété de convergence en norme* si, pour $f\in\mathcal{B}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\|S_n(f)-f\|_{\mathcal{B}} = 0. \tag{3.38}$$

On a déjà vu que $L^2(\mathbb{T})$ a la propriété de la convergence en norme. On veut maintenant caractériser les espaces de Banach homogènes l'ayant.
L'application $S_n:\ f\mapsto S_n(f)$ est bien définie et laisse $\mathcal{B}$ invariant. Comme son image est de dimension finie $2n+1$, elle est bornée et on note $\|S_n\|^{\mathcal{B}}$ sa norme.

Théorème 3.64. *Un espace de Banach homogène $\mathcal{B}$ a la propriété de convergence en norme si et seulement si la suite $(\|S_n\|^{\mathcal{B}})_{n\geq 1}$ est bornée c'est-à-dire si et seulement s'il existe $K > 0$ telle que*

$$\forall\ n \geq 1,\ \forall\ f \in \mathcal{B}, \quad \|S_n(f)\|_{\mathcal{B}} \leq K\|f\|_{\mathcal{B}}. \tag{3.39}$$

Démonstration. D'une part, si $(S_n(f))_{n\geq 1}$ tend vers f pour tout f dans $\mathcal{B}$, alors par le théorème de Banach-Steinhaus (cf Th. 3.3.2, polycopié de JY. Chemin 4M005), on sait que (3.39) est vraie.
Réciproquement, supposons (3.39). Pour $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{B}$, soit P un polynôme trigonométrique tel que $\|f - P\|_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon/(K+1)$ (leur existence est garantie par le théorème 3.18 appliqué au noyau de Fejér). Pour n supérieur au degré de P, on a bien sur $S_n(P) = P$. Donc

$$\|S_n(f) - f\|_{\mathcal{B}} \leq \|S_n(f) - S_n(P)\|_{\mathcal{B}} + \|P - f\|_{\mathcal{B}} \leq K\varepsilon/(K+1) + \varepsilon/(K+1) = \varepsilon.$$

Ceci achève la preuve du théorème 3.64. □

Comme $S_n(f) = D_n * f$, on a $\|S_n(f)\|_{\mathcal{B}} \leq \|D_n\|_1\|f\|_{\mathcal{B}}$ par la proposition 3.16. Ainsi

$$\|S_n\|^{\mathcal{B}} \leq \|D_n\|_1. \tag{3.40}$$

Les nombres $L_n := \|D_n\|_1$ sont appelées *constantes de Lebesgue.*

Exercice 3.65. Montrer que $L_n = \dfrac{4}{\pi^2}\log n + O(1)$.

Quand $\mathcal{B} = L^1(\mathbb{T})$, (3.40) est une égalité. En effet, on a vu que $\|F_m\|_1 = 1$ (cf lemme 3.9 et définition 3.7). Donc, $\|S_n\|^{L^1} \geq \|S_n(F_m)\|_1 = \|D_n * F_m\|_1 = \|F_m * D_n\|_1 = \left\| D_n - \dfrac{1}{m+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(D_n - D_k)\right\|_1$ si $m \geq n$. Donc, par (3.40), $\|S_n\|^{L^1} = \|D_n\|_1$.
Ainsi $L^1(\mathbb{T})$ n'a pas la propriété de convergence en norme.

Exercice 3.66. Montrer que $\|S_n\|^{\mathcal{C}(\mathbb{T})} = \|D_n\|_1$.
Indication : pour cela, on pourra étudier $S_n(\psi_n)$ où ψ_n est une fonction continue bornée en module par 1 qui prend comme valeur en t le signe de $D_n(t)$ sauf en des voisinages assez petits des points où celui-ci change.

3.2.2 Relation avec l'existence d'une fonction conjuguée

On va maintenant relier la propriété de convergence en norme à l'existence d'une fonction conjuguée. Dans la définition 3.6, on a appelé série trigonométrique conjuguée de la série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}$, la série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} -i\mathrm{sgn}(n) a_n e^{int}$.

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et que la série conjuguée de $\sum \hat{f}(n)e^{int}$ est la série de Fourier d'une fonction g, on dit que g est la conjuguée de f ; on la note $\tilde{f}$. Ceci ne définit a priori pas la fonction conjuguée pour toute fonction intégrable ; on verra une généralisation au chapitre suivant.

Définition 3.67. Un espace de fonction $\mathcal{B} \subset L^1(\mathbb{T})$ est stable par conjugaison si, pour $f \in \mathcal{B}$, $\tilde{f}$ est définie et appartient à $\mathcal{B}$.

Lemme 3.68. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach homogène stable par conjugaison. Alors $f \mapsto \tilde{f}$ est une application linéaire continue sur $\mathcal{B}$.*

Démonstration. La linéarité vient clairement de la définition de la série conjuguée. Le fait que $f \mapsto \tilde{f}$ est bornée suit du

Théorème 3.69 (Théorème du graphe fermé)**.** *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ une application linéaire. T est bornée si et seulement si $Gr(T) := \{(f, Tf);\ f \in \mathcal{B}\}$, le graphe de T, est fermé dans $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$.*

Il suffit de montrer que $\{(f, \tilde{f});\ f \in \mathcal{B}\}$ est fermé. Soit (f, g) dans l'adhérence de $\mathrm{Gr}(T)$. Il existe donc $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n \in \mathcal{B}$ tel que $f_n \to f$ et $\tilde{f}_n \to g$. Alors par continuité, pour tout entier m, $\hat{f}_n(m) \underset{n\to+\infty}{\to} \hat{f}(m)$. D'autre part,

$$\hat{g}(m) = \lim_{n\to+\infty} \hat{\tilde{f}}_n(m) = \lim_{n\to+\infty} -i\,\mathrm{sgn}(m)\hat{f}_n(m) = -i\,\mathrm{sgn}(m) \lim_{n\to+\infty} \hat{f}_n(m) = -i\,\mathrm{sgn}(m)\hat{f}(m) = \hat{\tilde{f}}(m).$$

Ainsi par le théorème 3.10, $g = \tilde{f}$ c'est-à-dire que $(f, g) \in \mathrm{Gr}(T)$. □

Preuve du Théorème du graphe fermé. Supposons T borné. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ est telle que $(u_n, Tu_n) \underset{n\to+\infty}{\to} (u, v)$ dans $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Alors

$$\|Tu - v\| \leq \lim_{n\to+\infty} (\|Tu - Tu_n\| + \|v - Tu_n\|) = 0$$

Donc $(u, v) \in$Gr(T). Ainsi le graphe de T est fermé.
Réciproquement, supposons que le graphe de T est fermé. Alors $\mathrm{Gr}(T)$ est un espace de Banach muni de la norme de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Pour $n > 0$, on pose $F_n := \{(u, Tu);\ \|Tu\|_{\mathcal{B}} \leq n\}$. Les $(F_n)_{n\geq 1}$ sont fermés dans $\mathrm{Gr}(T)$ et $\cup_n F_n =$Gr(T). Par le lemme de Baire (cf Th. 1.2.3, polycopié JY. Chemin 4M005), il existe $n > 1$ tel que F_n est d'intérieur non vide. Comme $F_n = -F_n$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $\|u\| \leq \varepsilon$, on a $\|Tu\|_{\mathcal{B}} \leq 2n$. Ainsi si $u \neq 0$, en posant $v = \varepsilon u/\|u\|_{\mathcal{B}}$, on a $\|Tu\|_{\mathcal{B}} = \|Tv\|_{\mathcal{B}}(\|u\|_{\mathcal{B}}/\varepsilon) \leq (2n/\varepsilon)\|u\|_{\mathcal{B}}$.
Ainsi T est borné et la preuve du théorème 3.69 complète. □

Théorème 3.70. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach homogène tel que pour $f \in \mathcal{B}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $e^{int} f \in \mathcal{B}$ et*

$$\|e^{int} f\|_{\mathcal{B}} = \|f\|_{\mathcal{B}}. \tag{3.41}$$

Alors $\mathcal{B}$ est stable par conjugaison si et seulement s'il admet la convergence en norme.

Démonstration. Considérons l'application

$$f \mapsto f^\flat = \frac{1}{2}\hat{f}(0) + \frac{1}{2}(f + i\tilde{f}) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{int}. \tag{3.42}$$

Si $\mathcal{B}$ est stable par conjugaison, alors cette application est linéaire bornée de $\mathcal{B}$ dans lui-même.
Réciproquement, si cette application est bien définie (i.e. pour tout $f \in \mathcal{B}$, la série trigonométrique du membre de droite de (3.42) est la série de Fourier d'un élément de $\mathcal{B}$), alors $\mathcal{B}$ est stable par conjugaison.
Supposons qu'il existe $K > 0$ tel que $\sup_{n\geq 0} \|S_n\|^{\mathcal{B}} = K < +\infty$. On définit alors

$$S_n^\flat(f) = \sum_{j=0}^{2n} \hat{f}(j)e^{ijt} = e^{int} S_n(e^{-int} f). \tag{3.43}$$

Par (3.41), on a $\sup_{n\geq 0} \|S_n^\flat\|^{\mathcal{B}} = K$.
Pour $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{B}$, soit P un polynôme trigonométrique tel que $\|f - P\|_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon/2K$. Alors

$$\|S_n^\flat(f) - S_n^\flat(P)\|_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon/2.$$

Notons que si n et m sont supérieurs au degré de P alors $S_n^\flat(P) = S_m^\flat(P)$. Ainsi

$$\|S_n^\flat(f) - S_m^\flat(f)\|_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon.$$

Donc $(S_n^\flat(f))_n$ est de Cauchy et converge dans $\mathcal{B}$ vers $f^\flat \in \mathcal{B}$. On voit que $f^\flat \sim \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n)e^{int}$.

Réciproquement, si l'application $f \mapsto f^\flat$ est bien définie et donc bornée par, disons, K_1 (par le raisonnement menant au lemme 3.68), on voit que

$$S_n^\flat(f) = f^\flat - e^{i(2n+1)\cdot}\left(e^{-i(2n+1)\cdot} f\right)^\flat$$

et, donc, que $\|S_n^\flat\|^{\mathcal{B}} \leq 2K_1$. Or par (3.41) et (3.43), on a $\|S_n^\flat\|^{\mathcal{B}} = \|S_n\|^{\mathcal{B}}$ ce qui achève la preuve du théorème 3.70. $\square$

Dans le chapitre suivant, nous étudierons la conjugaison plus en détails et prouverons que, pour $1 < p < +\infty$, l'espace $L^p(\mathbb{T})$ est stable par conjugaison et, donc, le

Théorème 3.71. *Pour $1 < p < +\infty$, l'espace $L^p(\mathbb{T})$ a la propriété de convergence en norme.*

3.2.3 Convergence et divergence en un point

Théorème 3.72. *Il existe une fonction continue dont la série de Fourier diverge en au moins un point.*

Première preuve. Les formes $f \mapsto [S_n(f)](0)$ sont continues sur $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Par le théorème de Banach-Steinhaus (cf Th. 3.3.2 poly JY. Chemin 4M005), si $(([S_n(f)](0))_n$ est bornée pour toute f, ces formes sont uniformément bornées. Notons que $S_n(f)(t_0) = S_n(f_{t_0})(0)$ où $f_{t_0}(\cdot) = f(t_0 + \cdot)$. Donc, si $(([S_n(f)](0))_n$ était uniformément bornée sur $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ alors $(\|S_n\|^{\mathcal{C}(\mathbb{T})})_n$ serait bornée. Ceci ne se peut par les résultat des exercices 3.65 et 3.66. Il existe donc f telle que $(([S_n(f)](0))_n$ n'est pas bornée c'est-à-dire que la série de Fourier de $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ diverge au point 0. $\square$

Seconde preuve du théorème 3.72. On va maintenant donner une preuve plus constructive. Dans l'exercice 3.66, on construit une suite de fonctions, disons, $(\psi_n)_n$ continues sur $\mathbb{T}$ telles que, pour n assez grand,

$$\|\psi_n\|_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad |S_n(\psi_n, 0)| \geq \frac{1}{2}L_n \geq \frac{1}{10}\log n \tag{3.44}$$

Posons $\varphi_n = F_{n^2} * \psi_n$; ce sont des polynômes trigonométriques de degré au plus n^2 vérifiant

$$\|\varphi_n\|_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad |S_n(\varphi_n, 0) - S_n(\psi_n, 0)| \leq \frac{6}{5}. \tag{3.45}$$

En effet, $S_n(\varphi_n) - S_n(\psi_n) = (F_{n^2} * D_n - D_n) * \varphi_n$ et

$$\|F_{n^2}*D_n - D_n\|_\infty = \left\|\frac{1}{n^2+1}\sum_{j=0}^{n-1}(D_j - D_n)\right\|_\infty \leq \frac{1}{n^2+1}\sum_{j=0}^{n-1}\|D_j - D_n\|_\infty \leq \frac{2}{n^2+1}\sum_{j=0}^{n-1}(n-j) = \frac{n(n+1)}{n^2+1} \leq \frac{6}{5}.$$

Ainsi, pour n assez grand,

$$|S_n(\varphi_n, 0)| \geq \frac{1}{10}\log n - \frac{6}{5}. \tag{3.46}$$

Pour $\lambda_n := 2^{3^n}$, on pose

$$f(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t). \tag{3.47}$$

Par (3.45), cette somme converge normalement dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ et définit donc une fonction continue. Montrons que sa série de Fourier diverge en 0. En remarquant que $\varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi_{\lambda_n}}(m)e^{i\lambda_n mt}$, on voit que la croissance rapide de $(\lambda_n)_n$ garantit que, si $m < n$ alors $S_{\lambda_n^2}(\varphi_{\lambda_m}(\lambda_m\cdot)) = \varphi_{\lambda_m}(\lambda_m\cdot)$ et si $m > n$ alors $S_{\lambda_n^2}(\varphi_{\lambda_m}(\lambda_m\cdot)) = \widehat{\varphi_{\lambda_m}}(0)$. On calcule donc

$$\begin{aligned}|S_{\lambda_n^2}(f,0)| &= \left|S_{\lambda_n^2}\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2}\varphi_{\lambda_m}(\lambda_m\cdot),0\right) + \sum_{m\geq n+1}\frac{1}{m^2}\widehat{\varphi_{\lambda_m}}(0)\right| \\ &= \left|\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^2}\varphi_{\lambda_m}(0) + \frac{1}{n^2}S_{\lambda_n}(\varphi_{\lambda_n},0) + \sum_{m\geq n+1}\frac{1}{m^2}\widehat{\varphi_{\lambda_m}}(0)\right| \geq \frac{1}{10n^2}\log\lambda_n - \frac{\pi^2}{6} - \frac{6}{5}.\end{aligned} \tag{3.48}$$

qui tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$ par construction de $(\lambda_n)_n$.
Ceci achève la seconde preuve du théorème 3.72. □

On va maintenant donner quelques critères de convergence ponctuelle.

Théorème 3.73. *Soit f intégrable sur $\mathbb{T}$ telle que*

$$\hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \textit{quand} \quad n \to +\infty. \tag{3.49}$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{T}$, $S_n(f)(t)$ et $F_n * f(t)$ ont le même type de convergence, et quand elles existent, leurs limites sont égales. De plus, si $F_n * f(t)$ converge uniformément sur un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ alors il en est de même pour $S_n(f)(t)$.

Démonstration. Comme $F_n * f(t)$ est une moyenne de Cesaro de $(S_m(f)(t))_{0\leq m\leq n}$, il est clair que la convergence de $(S_n(f)(t))_n$ implique celle de $(F_n * f(t))_n$. Pour la réciproque, on choisit $\lambda > 1$ et, en utilisant (3.4), on calcule

$$S_n(f)(t) = \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}F_{[\lambda n]} * f(t) - \frac{n+1}{[\lambda n]-n}F_n * f(t) - \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}\sum_{n\leq |m|\leq \lambda n}\left(1 - \frac{|m|}{[\lambda n]+1}\right)\hat{f}(m)e^{imt} \tag{3.50}$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière de $\cdot$.
La propriété (3.49) implique que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda > 1$ tel que $\limsup_{n\to+\infty} \sum_{n\leq |m|\leq \lambda n} |\hat{f}(m)| < \varepsilon$. Pour ce choix de λ, on a

$$\sup_{t\in\mathbb{T}}\left|\frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}\sum_{n\leq |m|\leq \lambda n}\left(1 - \frac{|m|}{[\lambda n]+1}\right)\hat{f}(m)e^{imt}\right| = \sup_{t\in\mathbb{T}}\left|\sum_{n\leq |m|\leq \lambda n}\frac{[\lambda n]-m}{[\lambda n]-n}\hat{f}(m)e^{imt}\right| \leq \varepsilon. \tag{3.51}$$

Ainsi, si $(F_n * f(t))_n$ converge vers a, (3.50) donne

$$|S_n(f)(t) - a| \leq \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}|F_{[\lambda n]} * f(t) - a| + \frac{n+1}{[\lambda n]-n}|F_n * f(t) - a| + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

si on choisit n assez grand.
Ceci prouve le premier point du théorème 3.73. L'uniformité suit de l'uniformité en t dans la borne (3.51). □

Corollaire 3.74. *Si f est de variations bornées (voir section 2.3.3), alors, en tout point t, $S_n(f)(t)$ converge vers $\frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0))$ et vers $f(t)$ aux points de continuité. La convergence est uniforme sur les intervalles compacts sur lesquels f est continue.*

Démonstration. Le théorème 3.34 nous dit que les coefficients de Fourier de f à variation bornée vérifient (3.49). Le théorème de Fejér, i.e. le théorème 3.22, nous permet alors de conclure en utilisant l'exercice 2.57. □

Lemme 3.75. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $t \mapsto f(t)/t$ est aussi intégrable sur $\mathbb{T}$. Alors $S_n(f)(0) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.*

Démonstration. Par (3.37), en utilisant la formule d'addition du sinus, on calcule

$$S_n(f)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(t)}{\sin(t/2)}\sin((n+1/2)t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(t)\cos(t/2)}{\sin(t/2)}\sin(nt)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\cos(nt)dt. \tag{3.52}$$

Comme, par hypothèse, $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \frac{f(t)\cos(t/2)}{\sin(t/2)}$ sont intégrables sur $\mathbb{T}$, le résultat du lemme suit directement du lemme de Riemann-Lebesgue. □

Théorème 3.76 (Principe de localisation)**.** *Soit $f \in L^1(T)$ qui s'annule dans un intervalle ouvert I. Alors $S_n(f)(t)$ converge vers 0 pour $t \in I$ et, cette convergence est uniforme sur les compacts de I.*

Démonstration. La convergence vers 0 est un conséquence immédiate du lemme 3.75. Pour $\tau \in \mathbb{T}$, on a

$$S_n(f)(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{f(t+\tau)\cos(t/2)}{\sin(t/2)}\sin(nt)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t+\tau)\cos(nt))dt.$$

Les applications $t \in \mathbb{T} \mapsto f(\cdot+\tau) \in L^1(\mathbb{T})$ et $t \in I \mapsto \dfrac{f(\cdot+\tau)\cos(\cdot/2)}{\sin(\cdot/2)} \in L^1(\mathbb{T})$ sont continues par l'hypothèse faite sur f et I (et par le corollaire 1.70). Si $K \subset I$ est compact, alors les images de K par ces applications sont des compacts de $L^1(\mathbb{T})$ auxquels on peut appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue uniforme, lemme 3.12 ce qui donne la convergence uniforme annoncée. □

Une autre conséquence immédiate du lemme 3.75 est le

Théorème 3.77 (Critère de Dini)**.** *Soit f intégrable sur $\mathbb{T}$. Si $t \mapsto \dfrac{f(t+t_0)-f(t_0)}{t}$ est intégrable sur $\mathbb{T}$ alors $S_n(f)(t_0) \underset{n\to+\infty}{\to} f(t_0)$.*

3.3 Fonctions harmoniques

Pour $z \in \mathbb{C}$, on note $z = x + iy$.

Définition 3.78. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit que $u \in \mathcal{C}(U)$ est *harmonique sur U* si en tout point de D, ses dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ existent et vérifient $\Delta u := \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Pour qu'une fonction soit harmonique, il faut et il suffit que ses parties réelle et imaginaire le soient.

Remarque 3.79. On rappelle que si $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe (c'est-à-dire $\mathbb{C}$-différentiable i.e. pour $z_0 \in U$, il existe $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = f(z_0) + (z-z_0)f'(z_0) + o(z-z_0)$ au voisinage de z_0) alors elle est indéfiniment différentiable en (x, y). La fonction f vérifie alors dans U l'équation de Cauchy-Riemann

$$\overline{\partial} f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0. \tag{3.53}$$

De plus, si on note $\partial f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, alors $f'(z_0) = \partial f(z_0)$.
Réciproquement, si f est continue et vérifie l'équation de Cauchy-Riemann sur U alors elle est holomorphe dans U.
Rappelons, enfin, que f est holomorphe dans U si et seulement si f est développable en série entière au voisinage de chaque point de U.
On calcule

$$4\overline{\partial}\partial f = 4\partial\overline{\partial} f = \Delta f. \tag{3.54}$$

Ainsi une fonction holomorphe dans U est harmonique dans U.

L'égalité (3.54) implique que la partie réelle (ainsi que la partie imaginaire) d'une fonction holomorphe est harmonique. On verra un peu plus loin que ce résultat admet une réciproque.

3.3.1 Le noyau de Poisson

Pour $0 \le r < 1$ et $t \in \mathbb{T}$, le noyau de Poisson est la fonction

$$P(r,t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} r^{|j|}e^{ijt} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} = \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right). \tag{3.55}$$

On vérifie facilement que

1. $P(r,t) > 0$,
2. $P(r,-t) = P(r,t)$,
3. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,t)dt = 1$,
4. pour $0 < \delta < |t| \le \pi$, on a $P(r,t) \le P(r,\delta)$,
5. $P(r,\delta) \to 0$ quand $r \to 1^-$ (avec $0 < \delta \le \pi$)

Ainsi, si $(r_n)_n$ est une suite positive telle que $r_n \to 1^-$ la suite $(t \mapsto P(r_n,t))_n$ est une approximation de l'identité (voir la définition 3.7).
On note $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$, le disque unité ouvert, et $\overline{D}$ sa clôture, le disque unité fermé. En posant $z = re^{it} \in D$, on calcule

$$P(r,t-\tau) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z}\right) = \frac{1-|z|^2}{|e^{i\tau}-z|^2}. \tag{3.56}$$

3.3.2 L'intégrale de Poisson

En posant $z = e^{it}$, on identifie $\mathbb{T}$ avec le cercle unité $\{z;\ |z| = 1\}$ du plan complexe. Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on note $f(re^{it})$, $r < 1$, son intégrale de Poisson (voir la remarque 3.21),

$$f\left(re^{it}\right) := P(r,\cdot) * f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{int}\hat{f}(n). \tag{3.57}$$

On va considérer cette fonction comme une fonction de la variable complexe $z = re^{it}$ dans D.
Si f est à valeurs réelles, alors

$$f(z) = f\left(re^{it}\right) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z} f(e^{i\tau})d\tau\right]. \tag{3.58}$$

Par le théorème différentiation sous le signe somme, la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z} f(e^{i\tau})d\tau$$

est holomorphe dans D. Ainsi $z \mapsto f(re^{it})$ est harmonique dans D si f est à valeurs réelles. Ceci reste vrai pour f intégrable sur $\mathbb{T}$ en la décomposant comme la somme de ses parties réelle et imaginaire. On a donc démontré

Proposition 3.80. *Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, l'intégrale de Poisson $f(re^{it})$ est une fonction harmonique dans D.*

On a

Théorème 3.81. *Soit u une fonction continue à valeurs réelles sur $\overline{D}$ harmonique dans D. Alors, dans D, u est l'intégrale de Poisson de sa restriction à $\mathbb{T}$ et elle est la partie réelle de la fonction holomorphe*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\tau}+z}{e^{i\tau}-z} u(e^{i\tau})d\tau, \quad z \in D. \tag{3.59}$$

Démonstration. Par le théorème de différentiation sous le signe somme, la fonction f définie par (3.59) est holomorphe dans D. Il nous suffit de montrer que $u = u_1$ où $u_1 = \operatorname{Re} f$.
Montrons d'abord que u_1 se prolonge continûment sur $\overline{D}$ et que $(u_1)_{|\mathbb{T}} = u_{|\mathbb{T}}$. Il suffit donc de montrer que

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re}\frac{e^{i\tau}+re^{it}}{e^{i\tau}-re^{it}} u(e^{i\tau})d\tau = u(e^{it}). \tag{3.60}$$

En utilisant les propriétés de $P(r,t)$ (voir les points 1-5 dans la section 3.3.1), pour δ positif petit arbitraire, on calcule

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re}\frac{e^{i\tau}+re^{it}}{e^{i\tau}-re^{it}} u(e^{i\tau})d\tau - u(e^{it})\right| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re}\frac{e^{i\tau}+re^{it}}{e^{i\tau}-re^{it}} \left(u(e^{i\tau})-u(e^{it})\right)d\tau\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P(r,t-\tau)\left|u(e^{i\tau})-u(e^{it})\right|d\tau \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\sup_{|t-\tau|\leq\delta}|u(e^{i\tau})-u(e^{it})| + 2\sup_{t\in\mathbb{T}}|u(e^{it})|\sup_{\substack{|t|\geq\delta \\ t\in\mathbb{T}}} P(r,t).
\end{aligned}$$

La continuité uniforme de u sur $\overline{D}$ nous permet de conclure (3.60).
Posons $h = u - u_1$. Alors h est continue sur $\overline{D}$, harmonique dans D et nulle sur $\mathbb{T}$. Supposons qu'il existe $z_0 \in D$ tel que $h(z_0) > 0$. Soit $0 < \varepsilon < h(z_0)$. Pour $z \in \overline{D}$, posons $g(z) = h(z)+\varepsilon|z|^2$. Alors $g(z_0) \geq h(z_0) > \varepsilon$ or $g_{|T} = \varepsilon$. Donc il existe un point $z_1 \in D$ où g admet un maximum local. Ainsi en ce point $\partial_x^2 g \leq 0$ et $\partial_y^2 g \leq 0$. Mais le calcul direct montre que $\Delta g = 4\varepsilon > 0$ (comme $\Delta h = 0$).
Ainsi $h = u - u_1 \leq 0$. Le même argument montre que $u_1 - u \leq 0$ c'est-à-dire que $u = u_1$. Ceci achève la preuve du théorème 3.81. □

Le théorème 3.81 montre que, si u est harmonique dans D, il existe f holomorphe dans D tel que $u = \operatorname{Re} f$. En effet, u est continue dans D ; pour $0 < r < 1$, on peut donc appliquer le théorème précédent à la fonction $z \mapsto u(rz)$ ce qui définit une fonction $z \mapsto f_r(rz)$ holomorphe sur D. Ainsi $u(z) = \operatorname{Re} f_r(z)$ sur rD. Si $0 < r < r' < 1$, on a $\operatorname{Re}(f_r - f_{r'})(z) = 0$ sur rD. Donc, $f_r - f_{r'}$ est une fonction holomorphe à valeurs purement imaginaires sur rD ; elle est donc constante et cette constante peut être choisie nulle. Ainsi $f_{r'}$ est un prolongement holomorphe de f_r à $r'D$. On construit ainsi une fonction holomorphe sur $D = \bigcup_{0<r<1} rD$ telle que $u = \operatorname{Re} f$. On peut étendre ce résultat à un ouvert connexe.

Théorème 3.82. *Soit U un ouvert et $u: U \to \mathbb{R}$ harmonique. Alors il existe $f: U \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $u = \mathrm{Re}\, f$. De plus, si U est connexe, pour $z_0 \in U$, f est définie de façon unique par la valeur $f(z_0)$.*

Démonstration. Pour tout $z_0 \in U$ et $r_0 > 0$ tel que $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$, le raisonnement fait ci-dessus construit une fonction, disons, f_{z_0,r_0} holomorphe sur $z_0 + r_0 D$ telle que $u_{|z_0+r_0D} = \mathrm{Re}\, f_{z_0,r_0}$. Si $z_0 + r_0 D \cap z_0' + r_0' D \neq \emptyset$, on peut, quitte à les modifier par une constante imaginaire pure, garantir que $f_{z_0,r_0} = f_{z_0',r_0'}$ sur $z_0 + r_0 D \cap z_0' + r_0' D$. La collection de fonctions $(f_{z_0,r_0})_{z_0+r_0\overline{D}\subset U}$ définit alors une fonction holomorphe sur U telle que $u = \mathrm{Re}\, f$.
Supposons U est connexe et f et $\tilde{f}$ telles que $u = \mathrm{Re}\, f = \mathrm{Re}\, \tilde{f}$. Alors, pour $c \in \mathbb{R}$, $\{z \in U;\ f(z) - \tilde{f}(z) = c\}$ est fermé car $f - \tilde{f}$ est continue et ouvert car $f - \tilde{f}$ est holomorphe. Donc, comme U est connexe, $\{z \in U;\ f(z) - \tilde{f}(z) = c\} = \emptyset$ ou $\{z \in U;\ f(z) - \tilde{f}(z) = c\} = U$. Ainsi si f et $\tilde{f}$ prennent la même valeur en un point, elles sont égales sur U.
Ceci achève la preuve du théorème 3.82. □

Corollaire 3.83. *Soient U et V des ouverts de $\mathbb{C}$. Si f est holomorphe de V dans U et que g est harmonique de U dans $\mathbb{C}$ alors $g \circ f$ est harmonique sur V.*

Démonstration. En décomposant g en partie réelle et imaginaire, il suffit de prouver le corollaire pour g à valeurs réelles. On écrit alors $g = \mathrm{Re}\, G$ où G est holomorphe sur U. Donc $g \circ f = \mathrm{Re}(G \circ f)$ et $G \circ f$ est holomorphe sur V. La conclusion du corollaire suit. □

Exercice 3.84. Démontrer le corollaire en calculant directement $\Delta(g \circ f)$.

Définition 3.85. Soient $u : U \to \mathbb{R}$ harmonique et $v: U \to \mathbb{R}$. On dit que v est une *conjuguée harmonique* de u (sur U) si est seulement si $u + iv$ est holomorphe sur U.

Le théorème 3.82 garantit l'existence d'une conjuguée harmonique. Si U est connexe, elle unique à une constante réelle près.

Remarque 3.86. Dans D, la conjuguée harmonique de (3.57) est la fonction

$$\tilde{f}(re^{it}) = -i \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{sign}\, n\, r^{|n|} e^{int} \hat{f}(n) = Q(r,\cdot) * f(t) \tag{3.61}$$

où l'on a posé

$$Q(r,t) = -i \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{sign} n\, r^{|n|} e^{int} = \frac{2r \sin t}{1 - 2r\cos t + r^2}. \tag{3.62}$$

Q est la conjuguée harmonique du noyau de Poisson P (normalisé de façon que $Q(0,t) = 0$).

Du théorème 3.82 et de la remarque 3.79, on déduit immédiatement le

Corollaire 3.87. *Une fonction harmonique est indéfiniment différentiable.*

3.3.3 La propriété de la moyenne et le principe du maximum

Théorème 3.88. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$.*
Une fonction $u: U \to \mathbb{C}$ continue est harmonique sur U si et seulement si elle vérifie la propriété de la moyenne en tout point de U i.e. $\forall z_0 \in U$, $\forall r > 0$ tels que $z_0 + r\overline{D} \subset U$, on a

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) dt. \tag{3.63}$$

Démonstration. Supposons u harmonique dans U. Sans perte de généralité, on peut supposer que u est à valeurs réelles. Soient $z_0 \in U$ et $r_0 > 0$ tels que $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$. La formule de Poisson pour u dans $z_0 + r_0\overline{D}$ s'écrit alors, pour $0 < r < r_0$ et $z \in D$,

$$u\left(z_0 + r_0 z\right) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\tau} + z}{e^{i\tau} - z} f(z_0 + r_0 e^{i\tau}) d\tau\right].$$

soit encore en écrivant $z = r\, r_0^{-1}\, e^{it}$ pour $0 \leq r < r_0$,

$$u\left(z_0 + re^{it}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r\, r_0 \cos(t-\tau) + r^2} f(z_0 + r_0 e^{i\tau}) d\tau. \tag{3.64}$$

En prenant $r = 0$, on obtient (3.63).
Réciproquement, soit u continue sur U et y vérifiant la propriété de la moyenne. Soient $z_0 \in U$ et $r_0 > 0$ tels que $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$. La formule de Poisson construit une fonction harmonique à valeurs réelles, disons, $\tilde{u}$ qui coïncide avec u sur le cercle $z_0 + r_0\mathbb{T}$. Soit $v = u - \tilde{u}$. La fonction v vérifie la propriété de la moyenne. Supposons $m := \max\limits_{z_0 + r_0\overline{D}} v(z) > 0$. v étant continue et $z_0 + r_0\overline{D}$ compact, ce maximum existe et est atteint. Comme il est strictement positif, il est atteint dans $z_0 + r_0 D$. Soit $\tilde{z}_0$ un tel maximum. Soit $\tilde{r}_0$ tel que $\tilde{z}_0 + \tilde{r}_0\overline{D} \subset z_0 + r_0 D$. Par la formule de la moyenne, pour $0 < r < \tilde{r}_0$, on a

$$m = v(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} v(\tilde{z}_0 + re^{it}) dt \leq m. \tag{3.65}$$

Or v est majorée par m dans $z_0 + r_0\overline{D}$. Comme v est continue, elle est constante égale à m sur $\tilde{z}_0 + r\mathbb{T}$ pour $0 < r < \tilde{r}_0$, c'est-à-dire, sur le disque $\tilde{z}_0 + \tilde{r}_0\overline{D}$. On voit ainsi que l'ensemble $\{z \in z_0 + r_0\overline{D};\ v(z) = m\}$ est ouvert ; il est clairement fermé ; ainsi, comme $z_0 + r_0\overline{D}$ est connexe, v est constante sur $z_0 + r_0\overline{D}$. Or, sur le bord $z_0 + r_0\mathbb{T}$, elle est nulle ; ainsi $m \leq 0$. Comme on peut appliquer le même raisonnement à $-v$, on obtient v est identiquement nulle et que u et $\tilde{u}$ coïncident sur $z_0 + r_0\overline{D}$. Enfin, comme z_0 et r_0 sont arbitraires tels que $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$, on obtient que $u = \tilde{u}$ sur U.
Ceci achève la preuve du théorème 3.88. □

Remarque 3.89. En intégrant (3.63) par rapport au rayon du cercle, on voit que si u vérifie la propriété de la moyenne (3.63) sur U, elle vérifie aussi

$$u(z_0) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{z_0 + r\overline{D}} u(z) dxdy \tag{3.66}$$

si $z_0 + r\overline{D} \subset U$.

Une autre propriété importante des fonctions harmoniques est

Théorème 3.90 (Le principe du maximum)**.** *Soit U un ouvert connexe borné et $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$ continue et harmonique dans U. Alors $\max\limits_{\overline{U}} u = \max\limits_{\partial U} u$ et s'il existe $x_0 \in U$ tel que $u(x_0) = \max\limits_{\overline{U}} u$ alors u est constante égale à $u(x_0)$.*

Démonstration. Comme u est continue sur $\overline{U}$ compact, il existe $x_0 \in \overline{U}$ tel que $u(x_0) = \max\limits_{\overline{U}} u$. En prenant $v = u$ dans la preuve du théorème 3.88, on obtient immédiatement l'énoncé du théorème 3.90. □

Une conséquence de la formule de la moyenne est le

Théorème 3.91 (Théorème de Harnack)**.** *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions harmoniques dans un ouvert connexe U.*

1. *Si $u_n \to u$ localement uniformément dans U (i.e. uniformément sur tout compact de U) alors u est harmonique sur U.*
2. *Si $u_1 \leq u_2 \leq \cdots$ alors soit $(u_n)_n$ converge localement uniformément dans U soit elle diverge vers $+\infty$ sur tout U.*

Démonstration. Démontrons 1. Comme $(u_n)_n$ converge uniformément vers u sur tout compact de U, u est continue et elle vérifie la propriété de la moyenne (comme conséquence du théorème de convergence dominée et car tous les $(u_n)_n$ la vérifient). Donc u est harmonique.
Démontrons 2. Quitte à soustraire u_1 à tous les éléments de la suite, on peut supposer $u_1 \geq 0$. Posons $u = \sup u_n$. Soit $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$. Alors, pour $0 \leq r \leq r_0$, le noyau de Poisson satisfait à

$$\frac{r_0 - r}{r_0 + r} \leq \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r\, r_0 \cos(t-\tau) + r^2} \leq \frac{r_0 + r}{r_0 - r}.$$

Ainsi, par la formule de Poisson (3.64), pour tout n, on obtient

$$\frac{r_0 - r}{r_0 + r} u_n(z_0) \leq u_n(z_0 + re^{it}) \leq \frac{r_0 + r}{r_0 - r} u_n(z_0) \quad \textit{(Inégalité de Harnack).} \tag{3.67}$$

La même inégalité reste donc vraie pour u. On en déduit que soit $u(z) = +\infty$ sur tout $z_0 + r_0 D$ soit $u(z) < +\infty$ (et donc $(u_n)_n$ converge) sur tout $z_0 + r_0 D$. Si m est le supremum de u dans $z_0 + r_0\overline{D}$, l'inégalité (3.65) pour $v = u$ reste vraie. Donc l'ensemble des points z où u est fini (c'est-à-dire où $(u_n)_n$ converge) est ouvert et fermé dans U connexe ; il est donc vide ou égal à U tout entier. S'il est U tout entier, on peut appliquer le théorème de convergence monotone à la formule de Poisson pour les $(u_n)_n$ ce qui nous dit que u vérifie la formule de Poisson dans U et ainsi est harmonique dans U. L'uniformité de la convergence sur tout compact provient par exemple de (3.67) appliqué à $u - u_n$ qui donne, pour $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$,

$$\frac{r_0 - r}{r_0 + r}(u - u_n)(z_0) \leq \sup_{z \in z_0 + r_0\overline{D}} (u - u_n)(z) \leq \frac{r_0 + r}{r_0 - r}(u - u_n)(z_0).$$

Ceci achève la preuve du théorème 3.91. □

3.4 La fonction conjuguée

Nous allons maintenant étudier la fonction conjuguée d'une fonction intégrable sur $\mathbb{T}$.

3.4.1 Définition

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. À f, par la formule de Poisson (3.57), on peut associer une fonction harmonique dans D que l'on notera aussi f. Le théorème de Fatou (théorème 3.28) et la remarque qui le suit nous disent qu'en tout point de Lebesgue de $t \mapsto f(e^{it})$, on a $f(e^{it}) = \lim_{r \to 1^-} f(re^{it})$.

Exercice 3.92. Montrer qu'en tout point de Lebesgue de $t \mapsto f(e^{it})$, on a $f(z) \to f(e^{it})$ quand $z \to e^{it}$, $|z| < 1$ non tangentiellement (i.e. si z reste dans un secteur de la forme $\{z \in D;\ |\arg(1 - ze^{-it})| \leq \alpha\}$ (où $0 < \alpha < \pi$ est arbitraire).

La conjuguée harmonique de f (normalisée par la valeur 0 au point 0) est alors définie par (3.61) ; on la note $\tilde{f}(re^{it})$ $(0 \leq r < 1,\ t \in \mathbb{T})$. On va montrer que, pour presque tout $t \in \mathbb{T}$, cette fonction harmonique admet une limite radiale en e^{it} i.e. la limite $\lim_{r \to 1^-} \tilde{f}(re^{it})$ existe.

Lemme 3.93. *Toute fonction harmonique bornée sur D est la transformée de Poisson d'une fonction bornée sur $\mathbb{T}$.*

Démonstration. Soit F harmonique et bornée sur D. Soit $(r_n)_n$ une suite positive telle que $r_n \to 1^-$. Posons $f_n(e^{it}) = F(r_n e^{it})$. La suite $(f_n)_n$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{T})$. Comme $L^\infty(\mathbb{T})$ est le dual de $L^1(\mathbb{T})$, il existe une sous-suite $(f_{n_j})_{j\geq 1}$ qui converge faiblement (i.e. pour tout $g \in L^1(\mathbb{T})$, $(\langle f_{n_j}, g\rangle)_{j\geq 1}$ converge) vers, disons, $F(e^{it})$. Soit $\rho e^{i\tau} \in D$. Alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} F(e^{it}t)P(\rho,\tau-t)dt = \langle F, P(\rho,\tau-\cdot)\rangle = \lim_{j\to+\infty}\langle f_{n_j}, P(\rho,\tau-\cdot)\rangle$$
$$= \lim_{j\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f_{n_j}(e^{it})P(\rho,\tau-t)dt = \lim_{j\to+\infty} F(r_{n_j}\rho e^{it}) = F(\rho e^{it}).$$

Ainsi $F(re^{it})$ est bien la transformée de Poisson de F ce qui prouve le lemme 3.93. □

Lemme 3.94. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et soit $\tilde{f}(re^{it})$ définie par (3.61). Alors, pour presque tout t, $\tilde{f}(re^{it})$ a une limite quand $r \to 1^-$.*

Démonstration. On peut décomposer $f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$ où $(f_j)_{1\leq j\leq 4}$ sont intégrables et positives. Par linéarité de l'application $f \mapsto \tilde{f}(re^{it})$ on peut supposer que f est positive.
Par définition de la conjuguée harmonique, la fonction $F(z) := e^{-f(z)-i\tilde{f}(z)}$ est holomorphe (donc aussi harmonique) dans D. L'intégrale de Poisson d'une fonction positive est positive ; la conjuguée harmonique d'une fonction à valeurs réelles est à valeurs réelles. Ainsi $|F(z)| \leq 1$ dans D. Par le lemme 3.93 (et le théorème 3.28), F admet une limite radiale de module $e^{-f(e^{it})}$ presque partout. Cette limite est non nulle presque partout car f est intégrable. Et en chaque point où cette limite est non nulle, comme F admet une limite radiale, la fonction $\tilde{f}(re^{it})$ admet une limite radiale. Ceci achève la preuve du lemme. □

Définition 3.95. La *fonction conjuguée* d'une fonction f intégrable sur $\mathbb{T}$ est la limite radiale de $\tilde{f}(re^{it})$.

Remarque 3.96. On notera que la fonction conjuguée d'une fonction à valeurs réelles est elle aussi à valeurs réelles (voir la preuve du Lemme 3.94).

Si la série conjuguée de la série de Fourier de f intégrable est la série de Fourier d'une fonction g intégrable, alors, clairement, l'intégrale de Poisson de g est $\tilde{f}(re^{it})$ qui converge radialement vers $g(e^{it})$ presque partout (théorème 3.28). On a alors que $\tilde{f} = g$; ainsi, la définition 3.95 généralise la définition donnée dans la section 3.2.2.
À la suite du théorème 3.30 et du corollaire 3.31, nous avons vu que $\sum_{n\geq 2}\frac{\cos nt}{\log n}$ est une série de Fourier alors que sa série conjuguée $\sum_{n\geq 2}\frac{\sin nt}{\log n}$ n'en est pas une. Comme $\sum_{n\geq 2}\frac{\sin nt}{\log n}$ converge en tout point (par le critère des séries alternées), sa somme est la fonction conjuguée de $f = \sum_{n\geq 2}\frac{\cos nt}{\log n}$ et on peut vérifier que $t \mapsto \sum_{n\geq 2}\frac{\sin nt}{\log n}$ n'est pas intégrable. Il existe donc des fonctions intégrables dont la fonction conjuguée n'est pas intégrable.

Remarque 3.97. Le fait que $\sum_{n\geq 2}\frac{\sin nt}{\log n}$ n'est pas une série de Fourier ne suffit pas à démontrer qu'elle ne définit pas une fonction intégrable. Néanmoins on montrera plus loin que si f et $\tilde{f}$ sont intégrables, alors $\tilde{f}(re^{it})$ est l'intégrale de Poisson de $\tilde{f}$. Ceci permet alors de démontrer que si $\tilde{f}$ est intégrable alors sa série

de Fourier est la série conjuguée de celle de f ; ainsi si cette série n'est pas une série de Fourier alors $\tilde{f}$ ne peut être intégrable.
Ce qui nous fait défaut ici est que nous n'avons que la convergence radiale ponctuelle (presque partout) ; nous ne pouvons donc pas contrôler la convergence d'intégrales de telles fonctions.

3.4.2 Fonction de répartition

La mesure de Lebesgue de $E \subset \mathbb{T}$ est notée $|E|$.

Définition 3.98. La fonction de répartition d'une fonction sur $\mathbb{T}$ mesurable à valeurs réelles est la fonction

$$m(x) = m_f(x) = |\{t \in \mathbb{T};\ f(t) \leq x\}|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Les fonctions de répartitions sont croissantes et continues à droite ; elles tendent vers 0 en $-\infty$ et vers 2π en $+\infty$. On peut donc associer à m_f sa mesure de Stieltjes-Lebesgue notée dm_f (voir l'exercice 2.57). C'est une mesure de Borel positive (car m_f croît) de masse totale 2π. dm_f est la mesure image par f de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$.

Lemme 3.99. *Pour $F:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée ou continue positive, on a*

$$\int_{\mathbb{T}} F(f(t))dt = \int_{\mathbb{R}} F(x)dm_f(x). \tag{3.68}$$

Démonstration. Si F est une fonction en escalier i.e. $F = \sum_{k=1}^{n} f_k \mathbf{1}_{]a_k,a_{k+1}]}$, (3.68) est clairement vrai par la définition de m_f : en effet,

$$\int_{\mathbb{T}} F(f(t))dt = \sum_{k=1}^{n} f_k \int_{\mathbb{T}} \mathbf{1}_{]a_k,a_{k+1}]}(f(t))dt = \sum_{k=1}^{n} f_k[m_f(a_{k+1}) - m_f(a_k)] = \int_{\mathbb{R}} F(x)dm_f(x). \tag{3.69}$$

Supposons maintenant que F est continue bornée (non identiquement nulle). Les deux intégrales dans (3.68) sont bien définies. Pour $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe $X_\varepsilon > 0$ tel que $m_f(-X_\varepsilon) + (2\pi - m_f(X_\varepsilon)) \leq \varepsilon/(4\|F\|_\infty)$. Ainsi on a

$$\int_{\mathbb{T}} |F(f(t))| \left(\mathbf{1}_{f(t) \leq -X_\varepsilon} + \mathbf{1}_{f(t) > X_\varepsilon}\right) dt + \left(\int_{]-\infty,-X_\varepsilon]} + \int_{]X_\varepsilon,+\infty[}\right) |F(x)|dm_f(x) \leq \varepsilon/2. \tag{3.70}$$

D'autre part, on construit F_ε en escalier nulle hors de $]-X_\varepsilon, X_\varepsilon]$ telle que $\sup\limits_{-X_\varepsilon < t \leq X_\varepsilon} |F(t) - F_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon/8\pi$. Ainsi, par (3.69) et (3.70), on calcule

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{T}} F(f(t))dt - \int_{\mathbb{R}} F(x)dm_f(x)\right| \\
&\qquad \leq \left|\int_{\mathbb{T}} F_\varepsilon(f(t))dt - \int_{\mathbb{R}} F_\varepsilon(x)dm_f(x)\right| + \int_{\mathbb{T}} |\mathbf{1}_{]-X_\varepsilon,X_\varepsilon]}(F - F_\varepsilon)|(f(t))dt \\
&\qquad\qquad + \int_{]-X_\varepsilon,X_\varepsilon]} |F - F_\varepsilon(x)|dm_f(x) + \varepsilon/2 \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient (3.68) quand F est continue bornée.
Supposons F est continue positive. Pour $n \geq 1$, on définit la fonction

$$x \mapsto F_n(x) = F(x) \left[\mathbf{1}_{]-n,n[} + \mathbf{1}_{[-n-1,-n]}(x+n+1) + \mathbf{1}_{[n,n+1]}(n+1-x)\right].$$

La suite $(F_n)_n$ est une suite croissante de fonctions positives continues bornées qui converge ponctuellement vers F. Par le théorème de convergence monotone et ce qui vient d'être montré pour les fonctions continues bornées, on sait que

$$\int_{\mathbb{T}} F(f(t))dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{T}} F_n(f(t))dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} F_n(x)dm_f(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x)dm_f(x).$$

Ceci achève la preuve du lemme 3.99. □

Définition 3.100. Pour $0 < p < +\infty$, on dit qu'une fonction mesurable f est *de type L^p faible* s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\lambda > 0$

$$|\{t \in \mathbb{T};\ |f(x)| > \lambda\}| = 2\pi - m_{|f|}(\lambda) \leq C\lambda^{-p}. \tag{3.71}$$

Toute fonction dans $L^p(\mathbb{T})$ est de type L^p faible. En effet, par le lemme 3.99, pour $\lambda > 0$, on a

$$\|f\|_p^p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} x^p\, dm_{|f|}(x) \geq \frac{1}{2\pi}\int_\lambda^{+\infty} x^p\, dm_{|f|}(x) \geq \frac{\lambda^p}{2\pi}\int_\lambda^{+\infty} dm_{|f|}(x) = \frac{\lambda^p}{2\pi}(2\pi - m_{|f|}(\lambda)). \tag{3.72}$$

On voit que l'on peut prendre $C = 2\pi\|f\|_p^p$.
Il est facile de trouver des fonction de type L^p faible qui ne sont pas L^p ; $t \in \mathbb{T} \mapsto |\sin t|^{-1/p}$ est un exemple.

Lemme 3.101. *Si f est de type L^p faible alors $f \in L^{p'}(\mathbb{T})$ si $0 < p' < p$.*

Démonstration. En intégrant par parties et en utilisant (3.71), on calcule

$$\begin{aligned}\|f\|_{p'}^{p'} = \int_0^{+\infty} x^{p'}\, dm_{|f|}(x) &\leq m_{|f|}(1) + \int_1^{+\infty} x^{p'}\, dm_{|f|}(x)\\ &= m_{|f|}(1) - \left[x^{p'}(2\pi - m_{|f|}(x))\right]_1^{+\infty} + p'\int_1^{+\infty}(2\pi - m_{|f|}(x))x^{p'-1}dx\\ &\leq 2\pi + Cp'\int_1^{+\infty} x^{p'-p-1}dx < +\infty.\end{aligned}$$

□

3.4.3 L'opérateur de conjugaison

On va maintenant étudier la conjugaison en tant qu'application linéaire. On verra, en particulier, qu'elle envoie les fonctions intégrables dans celles de type intégrable et qu'elle est continue sur $L^p(\mathbb{T})$ pour tout $1 < p < +\infty$ (théorème de Riesz).

Théorème 3.102. *Si f est intégrable alors $\tilde{f}$ est de type L^1 faible.*

Démonstration. Supposons que f est à valeurs positives et que $\|f\|_1 = 1$. Soit $\lambda > 1$. On veut estimer la mesure de Lebesgue de l'ensemble des points t où $|\tilde{f}(t)| > \lambda$. Par la définition de $\tilde{f}(t)$ et le théorème de convergence dominée, il suffit pour cela d'estimer $|\{|\tilde{f}(re^{it})| > \lambda\}|$ pour $0 < r < 1$
Pour cela, on considère la fonction

$$H_\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\pi}\arg\frac{z - i\lambda}{z + i\lambda} = 1 + \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\log\frac{z - i\lambda}{z + i\lambda}.$$

Elle est harmonique et à valeurs positive dans le demi-plan $\{z;\ \operatorname{Re} z > 0\}$ (ici le logarithme est la branche principale du logarithme complexe). Ses lignes de niveau $\{z;\ H_\lambda(z) = x\}$ sont des arcs de cercle passant par les points $i\lambda$ et $-i\lambda$. La ligne de niveau $\{z;\ H_\lambda(z) = 1/2\}$ est le demi-cercle $\{\lambda e^{i\theta};\ -\pi/2 < \theta < \pi/2\}$. Ainsi, si $|z| > \lambda$ on a $H_\lambda(z) > 1/2$. D'autre part, on a

$$H_\lambda(1) = 1 - \frac{2}{\pi}\arctan\lambda < \frac{2}{\pi\lambda}.$$

La fonction $H_\lambda(f(z) + i\tilde{f}(z))$ est une fonction harmonique (cf 3.83) bien définie dans D ; la propriété de la moyenne nous dit alors que, pour $0 \le r < 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_\lambda(f(re^{it}) + i\tilde{f}(re^{it}))dt = H_\lambda(f(0)) = H_\lambda(1) < \frac{2}{\pi\lambda} \tag{3.73}$$

en se souvenant que $f(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} f(e^{it})dt = \|f\|_1 = 1$ et que $\tilde{f}(0) = 0$ par définition.
Comme $H_\lambda(f + i\tilde{f}) \ge 1/2$ si $|f + i\tilde{f}| > \lambda$, on obtient que, pour $0 \le r < 1$,

$$\begin{aligned}\left|\left\{t;\ |\tilde{f}(re^{it})| > \lambda\right\}\right| \le \left|\left\{t;\ |f(re^{it}) + \tilde{f}(re^{it})| > \lambda\right\}\right| &\le \left|\left\{t;\ H_\lambda(f(re^{it}) + \tilde{f}(re^{it})) > \frac{1}{2}\right\}\right| \\ &\le 2\int_0^{2\pi} H_\lambda(f(re^{it}) + i\tilde{f}(re^{it}))dt \le \frac{8}{\lambda}.\end{aligned}$$

Ainsi, par homogénéité, pour $f \ge 0$, on a

$$\left|\left\{t;\ |\tilde{f}(re^{it})| > \lambda\right\}\right| \le \frac{8\|f\|_1}{\lambda}.$$

Pour traiter le cas général i.e. quand f intégrable à valeurs complexes, on décompose $f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$ où $(f_i)_{1\le i\le 4}$ sont mesurables positives et $f_1\, f_2 = f_3\, f_4 = 0$. Alors $\|f_i\|_1 \le \|f\|_1$ et, par linéarité, on a $\tilde{f} = \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2 + i\tilde{f}_3 - i\tilde{f}_4$. Ainsi

$$\left|\left\{t;\ |\tilde{f}(re^{it})| > \lambda\right\}\right| \le \sum_{j=1}^{4}\left|\left\{t;\ |\tilde{f}_j(re^{it})| > \lambda/4\right\}\right|.$$

Ainsi, par homogénéité, on obtient que, pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $\lambda > 0$, on a

$$\left|\left\{t;\ |\tilde{f}(re^{it})| > \lambda\right\}\right| \le \frac{2^7\|f\|_1}{\lambda} \tag{3.74}$$

Ceci achève la preuve du théorème 3.102. □

On déduit un corollaire direct de ce résultat et du lemme 3.101.

Corollaire 3.103. *Si f est intégrable sur $\mathbb{T}$ alors $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{T})$ pour tout $0 < p < 1$.*

La méthode employée dans la preuve du théorème 3.102 fournit des renseignements supplémentaires si f est supposée bornée.

Théorème 3.104. *Si f est à valeurs réelles telle que $\|f\|_\infty \le 1$ alors pour $0 \le \alpha < \pi/2$, on a*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\alpha|\tilde{f}(e^{it})|}dt \le \frac{2}{\cos\alpha}. \tag{3.75}$$

Démonstration. Posons $F(z) = \tilde{f}(z) - if(z)$. Comme $\cos(\alpha f(z)) \geq \cos(\alpha)$ et que f et $\tilde{f}$ sont à valeurs réelles, on a

$$\operatorname{Re}\left(e^{\alpha F(z)}\right) = e^{\alpha \tilde{f}(z)} \cos(\alpha f(z)) \geq e^{\alpha \tilde{f}(z)} \cos \alpha. \tag{3.76}$$

De plus, comme $z \in D \mapsto \operatorname{Re}\left(e^{\alpha F(re^{it})}\right)$ est harmonique et que $\tilde{f}(0) = 0$, pour $0 \leq r < 1$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(e^{\alpha F(re^{it})}\right) dt = \operatorname{Re}\left(e^{\alpha F(0)}\right) = \cos\left(\alpha \hat{f}(0)\right) \leq 1.$$

Ainsi, par (3.76), on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\alpha \tilde{f}(re^{it})} dt \leq \frac{1}{\cos \alpha}.$$

De même on démontre

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha \tilde{f}(re^{it})} dt \leq \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Enfin, (3.75) est obtenue en sommant ces deux inégalités et en laissant r tendre vers 1^-. □

Corollaire 3.105. *Si $\|f\|_\infty \leq 1$ on a : $m_{|\tilde{f}|}(\lambda) > 2\pi \left(1 - \dfrac{4}{\cos \sqrt{2}} e^{-\lambda}\right)$.*

Démonstration. On décompose f en partie réelle et imaginaire i.e. $f = f_r + if_i$. Comme $\tilde{f} = \tilde{f}_r + i\tilde{f}_i$, si $|\tilde{f}(re^{it})| > \lambda$ alors soit $|\tilde{f}_r(re^{it})| > \lambda/\sqrt{2}$ soit $|\tilde{f}_i(re^{it})| > \lambda/\sqrt{2}$. Ainsi, par (3.75) pour $\alpha = \sqrt{2}$, on obtient

$$\left|\left\{t;\ |\tilde{f}_\bullet(re^{it})| > \lambda/\sqrt{2}\right\}\right| < \frac{4\pi}{\cos \sqrt{2}} e^{-\lambda} \quad \text{pour} \quad \bullet \in \{i, r\}$$

ce qui prouve le corollaire 3.105. □

On va maintenant voir que la fonction de répartition de la fonction conjuguée de l'indicatrice d'un ensemble mesurable ne dépend que de la mesure (de Lebesgue) de cet ensemble et non de l'ensemble lui même.

Théorème 3.106. *Soient $0 \leq \alpha \leq \pi$ et $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble de mesure 2α. Soit $\mathbf{1}_E$ sa fonction indicatrice et $\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}$ celle de $]-\alpha, \alpha[$. Posons $m_E := m_{\tilde{\mathbf{1}}_E}$ et $m_\alpha := m_{\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}}$. Alors $m_E = m_\alpha$.*

Démonstration. Comme elles sont de mesure totale finie, pour montrer que les mesures boréliennes dm_E et dm_α coïncident, il suffit de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} dm_E(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} dm_\alpha(x), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{3.77}$$

En effet, supposons (3.77). On a alors aussi pour $b \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i(x-b)\xi} dm_E(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-b)\xi} dm_\alpha(x), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

On peut alors multiplier cette équation par $e^{-a^2\xi^2/4}$ (pour $a > 0$) et intégrer en ξ sur $\mathbb{R}$ en utilisant le théorème de Fubini pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Re}^{-a^2\xi^2/4+i(x-b)\xi} d\xi\right) dm_E(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-a^2\xi^2/4+i(x-b)\xi} d\xi\right) dm_\alpha(x)$$

soit encore

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(a\xi/2+i(x-b)/a)^2}d\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-a^{-2}(x-b)^2}dm_E(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(a\xi/2+i(x-b)/a)^2}d\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-a^{-2}(x-b)^2}dm_\alpha(x).$$

Comme $a\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-(a\xi/2+i(x-b)/a)^2}d\xi = 2\sqrt{\pi}$ pour tout $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on a, pour ces mêmes a et b,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a^{-2}(x-b)^2}dm_E(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a^{-2}(x-b)^2}dm_\alpha(x).$$

Soit $\varphi :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact. On peut alors multiplier l'équation précédente par $\varphi(b)$ et intégrer en b sur $\mathbb{R}$ pour obtenir par le théorème de Fubini et par un changement de variable, pour tout $a > 0$, l'égalité suivante

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x-at)dm_E(x)\right)dt &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-a^{-2}(x-b)^2}\varphi(b)db\right)dm_E(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-a^{-2}(x-b)^2}\varphi(b)db\right)dm_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x-at)dm_\alpha(x)\right)dt.\end{aligned}$$

En laissant a tendre vers 0, comme $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$, le théorème de convergence dominée nous dit que, pour toute φ continue à support compact, on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dm_E(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dm_\alpha(x)$. Ainsi, par le théorème 1.35, on a $m_E = m_\alpha$.

Démontrons maintenant (3.77). Fixons $\xi \in \mathbb{R}$ et considérons la fonction $z \mapsto F_\xi(z) := e^{\xi(f(z)+i\tilde{f}(z))}$ analytique dans D. Pour $f = \mathbf{1}_E$, par la formule de la moyenne pour $0 < r < 1$, on a

$$2\pi e^{\xi\alpha/\pi} = 2\pi F_\xi(0) = \int_{\mathbb{T}} F_\xi(re^{it})dt = \int_{\mathbb{T}\setminus E} e^{i\xi\tilde{f}(re^{it})}dt + e^\xi \int_E e^{i\xi\tilde{f}(re^{it})}dt.$$

En laissant r tendre vers 1, on obtient

$$2\pi e^{\xi\alpha/\pi} = \int_{\mathbb{T}\setminus E} e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})}dt + e^\xi \int_E e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})}dt. \tag{3.78}$$

En écrivant la même équation pour $-\xi$ et en passant au complexe conjugué, on obtient

$$\int_{\mathbb{T}\setminus E} e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})}dt + e^{-\xi} \int_E e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})}dt = 2\pi e^{-\xi\alpha/\pi}. \tag{3.79}$$

De (3.78) et (3.79), on tire

$$\int_{\mathbb{T}\setminus E} e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})}dt = 2\pi\frac{\mathrm{sh}\xi(1-\frac{\alpha}{\pi})}{\mathrm{sh}\xi} \quad \text{et} \quad \int_E e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})}dt = 2\pi\frac{\sin\frac{\xi\alpha}{\pi}}{\sin\xi}. \tag{3.80}$$

On peut maintenant décomposer $m_{\tilde{f}} = n_1 + n_2$ où

$$n_1(\lambda) = |E \cap \{t; \tilde{f}(e^{it}) \le \lambda\}| \quad \text{et} \quad n_2(\lambda) = |(\mathbb{T}\setminus E) \cap \{t; \tilde{f}(e^{it}) \le \lambda\}|.$$

Ainsi, (3.80) se réécrit $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}dn_1(x) = 2\pi\frac{\sin\frac{\xi\alpha}{\pi}}{\sin\xi}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}dn_2(x) = 2\pi\frac{\mathrm{sh}\xi(1-\frac{\alpha}{\pi})}{\mathrm{sh}\xi}$. Donc n_1 et n_2 sont déterminées par la seule valeur de α. Elles sont donc les mêmes pour $\tilde{f}$ et $\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}$. On obtient ainsi que les fonctions de répartition de $\tilde{f}$ et $\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}$ coïncident. En fait, on voit de plus que les fonctions de répartition de $\tilde{f}_{|E}$ et celle de $\left(\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}\right)_{|]-\alpha,\alpha[}$ coïncident également. $\square$

Par un calcul direct, la série de Fourier de $\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}$ est $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\sin n\alpha}{\pi n}e^{int}=\frac{\alpha}{\pi}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\alpha}{\pi n}\cos nt$. Donc, pour $0\le r<1$, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}(re^{it})&=2\sum_{n=1}^{+\infty}r^n\frac{\sin n\alpha}{\pi n}\sin nt=2\sum_{n=1}^{+\infty}r^n\frac{\cos n(t-\alpha)-\cos n(t+\alpha)}{\pi n}\\&=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}r^ne^{in(t-\alpha)}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}r^ne^{in(t+\alpha)}\right)=\frac{1}{\pi}\log\left|\frac{1-re^{i(t-\alpha)}}{1-re^{i(t+\alpha)}}\right|\\&=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1+r^2-2r\cos(t-\alpha)}{1+r^2-2r\cos(t+\alpha)}.\end{aligned}$$

Donc, en prenant la limite quand $r\to 1^-$, on trouve

$$\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}(e^{it})=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1-\cos(t-\alpha)}{1-\cos(t+\alpha)}. \tag{3.81}$$

On va maintenant estimer la mesure de l'ensemble $\{t;\ \left|\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}(e^{it})\right|>\lambda\}$. Comme $1=\mathbf{1}_{[-\pi,-\alpha]\cup[\alpha,\pi]}+\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}$ on a $\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}(e^{it})=-\widetilde{\mathbf{1}_{[-\pi,-\alpha]\cup[\alpha,\pi]}}(e^{it})$. Or $|[\pi,-\alpha]\cup[\alpha,\pi]|=2(\pi-\alpha)$. Donc, par le théorème 3.106

$$\left|\{t;\ \left|\widetilde{\mathbf{1}_{]\alpha-\pi,\pi-\alpha[}}(e^{it})\right|>\lambda\}\right|=\left|\{t;\ \left|\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}(e^{it})\right|>\lambda\}\right|$$

On peut donc supposer que $\alpha\in]0,\pi/2[$.
D'autre part, comme $\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}(e^{it})$ est impaire, il suffit d'estimer $\{t;\ \widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}(e^{it})>\lambda\}$. Pour cela, on développe $\cos(t-\alpha)=\cos(2\alpha)\cos(t+\alpha)+\sin(t+\alpha)\sin(2\alpha)$ et comme $\sin 2\alpha>0$, on calcule

$$\begin{aligned}\left\{t;\ \widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}(e^{it})>\lambda\right\}&=\left\{t;\ \frac{1-\cos(t-\alpha)}{1-\cos(t+\alpha)}>e^{2\pi\lambda}\right\}\\&\subset\left\{t;\ \frac{\cos 2\alpha(1-\cos(t+\alpha))+1-\cos 2\alpha+\sqrt{1-\cos^2(t+\alpha)}\sin 2\alpha}{1-\cos(t+\alpha)}>e^{2\pi\lambda}\right\}\\&\subset\left\{t;\ \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos(t+\alpha)}}\left(\sqrt{2}\cos\alpha+\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos(t+\alpha)}}\right)>e^{2\pi\lambda}-\cos 2\alpha\right\}\\&\subset\left\{t;\ \left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}+\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos(t+\alpha)}}\right)^2>\frac{1}{2}\left(e^{2\pi\lambda}+\sin^2\alpha\right)\right\}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\left\{t;\ \widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha,\alpha[}}(e^{it})>\lambda\right\}&\subset\left\{t;\ \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos(t+\alpha)}}>\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{e^{2\pi\lambda}+\sin^2\alpha}-\cos\alpha\right)\ge\sqrt{2}\mathrm{sh}(\pi\lambda)\right\}\\&\subset\left\{t;\ |t+\alpha|<\arccos\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{2\,\mathrm{sh}^2\pi\lambda}\right)\right\}\\&\subset\left\{t;\ |t+\alpha|<\sqrt{2}\frac{\sin\alpha}{\mathrm{sh}\pi\lambda}\right\}.\end{aligned}$$

On vient donc de démontrer le

Corollaire 3.107. *Soit $E \subset \mathbb{T}$ de mesure 2α. Pour $\lambda > 0$, on a* $\left|\left\{t;\ \left|\widetilde{\mathbf{1}_E}(e^{it})\right| > \lambda\right\}\right| < 4\sqrt{2}\dfrac{|\sin\alpha|}{sh\pi\lambda}$.

Revenons à $L^1(\mathbb{T})$. On définit $\log^+ x = \max(\log x, 0)$ si $x > 0$ et 0 sinon.

Théorème 3.108. *Si f mesurable telle que $f\ \log^+|f| \in L^1(\mathbb{T})$ alors $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{T})$.*

Démonstration. On rappelle que $f \mapsto \tilde{f}$ est bornée de $L^2(\mathbb{T})$ dans lui-même et que sa norme est majorée par 1 (voir le corollaire 3.38. De (3.72) pour $p = 2$, on déduit

$$m_{|\tilde{f}|}(\lambda) \geq 2\pi(1 - \|f\|_2^2\lambda^{-2}). \tag{3.82}$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $f\ \log^+|f| \in L^1(\mathbb{T})$. Pour montrer que $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{T})$, par le lemme 3.99, il suffit de montrer de montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \lambda dm_{|\tilde{f}|}(\lambda) < +\infty$ soit encore que la fonction $R \mapsto \displaystyle\int_1^{R} \lambda dm_{|\tilde{f}|}(\lambda) < +\infty$ reste bornée quand $R \to +\infty$. En intégrant par parties comme dans la preuve du lemme 3.101, on obtient

$$\int_1^R \lambda dm_{|\tilde{f}|}(\lambda) = \left[-\lambda\int_\lambda^{+\infty} dm_{|\tilde{f}|}(\lambda)\right]_1^R + \int_1^R (2\pi - m_{|\tilde{f}|}(\lambda))d\lambda \leq 2\pi + \int_1^R (2\pi - m_{|\tilde{f}|}(\lambda))d\lambda$$

Il suffit donc de montrer que

$$\limsup_{R\to+\infty} \int_1^R (2\pi - m_{|\tilde{f}|}(\lambda))d\lambda < +\infty. \tag{3.83}$$

Pour estimer $2\pi - m_{|\tilde{f}|}(\lambda)$, on décompose $f = g + h$ où $g = f\mathbf{1}_{|f|\leq\lambda}$. Par linéarité, on a $\tilde{f} = \tilde{g} + \tilde{h}$ ce qui implique

$$\{t;\ |\tilde{f}(t)| > \lambda\} \subset \{t;\ |\tilde{g}(t)| > \lambda/2\} \cup \{t;\ |\tilde{h}(t)| > \lambda/2\}. \tag{3.84}$$

Comme $g \in L^2(\mathbb{T})$, on a

$$|\{t;\ |\tilde{g}(t)| > \lambda/2\}| \leq 8\pi\lambda^{-2}\|g\|_2^2 = 8\pi\lambda^{-2}\int_0^\lambda x^2\, dm_{|f|}(x). \tag{3.85}$$

D'autre part, (3.74) nous donne

$$|\{t;\ |\tilde{h}(t)| > \lambda/2\}| \leq 256\lambda^{-1}\|h\|_1 = 256\lambda\int_\lambda^{+\infty} x\, dm_{|f|}(x).$$

Or pour $x \leq \lambda > 1$, on a $\sqrt{\log x} \geq \sqrt{\log\lambda}$; donc

$$|\{t;\ |\tilde{h}(t)| > \lambda/2\}| \leq \frac{256}{\lambda\sqrt{\log\lambda}}\int_\lambda^{+\infty} x\sqrt{\log x}\, dm_{|f|}(x). \tag{3.86}$$

Par (3.84), (3.85) et (3.86), on a

$$2\pi - m_{|\tilde{f}|}(\lambda) \leq 8\pi\lambda^{-2}\int_0^\lambda x^2\, dm_{|f|}(x) + \frac{256}{\lambda\sqrt{\log\lambda}}\int_\lambda^{+\infty} x\sqrt{\log x}\, dm_{|f|}(x).$$

Pour obtenir (3.83) et le théorème 3.108, il nous suffit donc de montrer que

$$\int_1^{+\infty} \lambda^{-2}\left(\int_0^\lambda x^2\, dm_{|f|}(x)\right) d\lambda + \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{\lambda\sqrt{\log\lambda}}\int_\lambda^{+\infty} x\sqrt{\log x}\, dm_{|f|}(x)\right) d\lambda < +\infty \tag{3.87}$$

On sait que la mesure $dm_{|f|}$ est positive, de masse totale 2π et, par notre hypothèse, que

$$\int_1^{+\infty} x \log x \, dm_{|f|}(x) < +\infty. \tag{3.88}$$

Pour démontrer (3.87), on applique le théorème de Fubini de la façon suivante. Le domaine d'intégration de la première intégrale est le trapèze $\{(x, \lambda);\ 1 \leq \lambda \leq +\infty,\ 0 \leq x \leq \lambda\}$; en intégrant d'abord en λ, on calcule

$$\int_1^{+\infty} \lambda^{-2} \left(\int_0^{\lambda} x^2 \, dm_{|f|}(x) \right) d\lambda = \int_0^1 x^2 \, dm_{|f|}(x) + \int_1^{+\infty} x^2 x^{-1} \, dm_{|f|}(x) = 2\pi + \int_1^{+\infty} x \, dm_{|f|}(x) < +\infty$$

Le domaine d'intégration de la seconde intégrale dans (3.87) est la bande $\{(x, \lambda);\ 1 \leq \lambda \leq +\infty,\ \lambda \leq x\}$; en intégrant d'abord en λ, on calcule

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda \sqrt{\log \lambda}} \int_{\lambda}^{+\infty} x \sqrt{\log x} \, dm_{|f|}(x) \right) d\lambda = 2 \int_1^{+\infty} x \log x \, dm_{|f|}(x) < +\infty.$$

Ceci achève la preuve du théorème 3.108. □

On peut adapter cette analyse aux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. On remplacera alors la fonction de répartition que nous avons définie par une autre de ces versions $|\{x \in \mathbb{R};\ |f(x)| > \lambda\}|$; elle a l'avantage d'être finie pour tout $\lambda > 0$ pour une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$.
Il est utile de définir une discrétisation de la fonction de répartition.

Définition 3.109. Soit $(X, \mathcal{S}, \lambda)$ un espace mesuré. Pour f mesurable sur X et $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$m_n = m_n(f) = \lambda(\{x \in \mathbb{T}; 2^{n-1} < |f(x)| \leq 2^n\}).$$

Comme

$$\begin{aligned} &\|f\|_{L^p}^p \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{np} m_n(f) \leq 2^p \|f\|_{L^p}^p \\ \text{et, pour } t > 0, \quad &\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ 2^n \geq t}} m_n(f) \leq \lambda(\{x \in \mathbb{T}; t < |f(x)|\}) \leq \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ 2^n \geq t}} m_{n-1}(f) \end{aligned} \tag{3.89}$$

pour $1 \leq p < +\infty$, on a

1. f est de type L^p-faible si et seulement si la suite $(m_n(f)\, 2^{np})_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée.
2. $f \in L^p(\lambda)$ si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{np} m_n(f) < +\infty$.

En utilisant une technique similaire à celle employées dans la preuve du théorème 3.108, nous démontrons

Théorème 3.110 (Riesz)**.** *Pour $1 < p < +\infty$, l'application linéaire $f \mapsto \tilde{f}$ est continue sur $L^p(\mathbb{T})$.*

La preuve du théorème 3.108 utilise une méthode d'interpolation. Par sa définition (voir la définition 3.6), l'application linéaire $f \mapsto \tilde{f}$ est continue sur $L^2(\mathbb{T})$ de norme 1. D'autre part, dans le théorème 3.102, on a obtenue que cette application envoie $L^1(T)$ dans L^1-faible. Dans la preuve du théorème 3.108, on a utilisé ces deux informations pour obtenir une information sur le comportement de cette application linéaire sur l'espace $L \log^+ L(\mathbb{T}) = \{f \in L^1(\mathbb{T}); |f(\cdot)| \log^+ |f(\cdot)| \in L^1(\mathbb{T})\}$, un espace intermédiaire entre $L^2(\mathbb{T})$ et $L^1(\mathbb{T})$ i.e. $L^2(\mathbb{T}) \subset L \log^+ L(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$.

Preuve du théorème 3.110. Soit $1 < p < +\infty$. Comme dit, on sait que l'application $f \mapsto \tilde{f}$ est une application linéaire continue sur $L^2(\mathbb{T})$. D'autre part, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, pour $f \in L^2(\mathbb{T}) \cap L^p(\mathbb{T})$ et $g \in L^2(\mathbb{T}) \cap L^q(\mathbb{T})$, on calcule

$$\langle \tilde{f}, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} \tilde{f}(x)\overline{g(x)}dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -i\,\mathrm{sgn}(n)\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} = -\int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{\tilde{g}(x)}dx = -\langle f, \tilde{g}\rangle. \tag{3.90}$$

Supposons que l'on ait montré que $f \mapsto \tilde{f}$ est bornée par C sur $L^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p \leq 2$, l'équation ci-dessus nous dit que $\tilde{g}$ définit une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbb{T}) \cap L^p(\mathbb{T})$ pour la norme L^p qui vérifie

$$|\langle f, \tilde{g}\rangle| \leq C\|g\|_{L^q}\|f\|_{L^p}$$

Cette forme se prolonge donc continûment à $L^p(\mathbb{T})$ (comme $L^2(\mathbb{T}) \cap L^p(\mathbb{T})$ contient les fonctions continues qui sont denses dans $L^p(\mathbb{T})$)). Par le théorème 2.25, on obtient que, si $g \in L^q(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ alors $\tilde{g} \in L^q(\mathbb{T})$ et que $\|\tilde{g}\|_{L^q} \leq C\|g\|_{L^q}$.
Il nous suffit donc de démontrer le théorème 3.110 pour $1 < p < 2$.

Remarque 3.111. L'égalité (3.90) montre que, sur $L^2(\mathbb{T})$, l'application linéaire $f \mapsto \tilde{f}$ est l'opposée de son adjoint ; ceci reste vrai sur $L^p(\mathbb{T})$, l'adjoint agissant sur $L^q(\mathbb{T})$, le dual de $L^p(\mathbb{T})$.

On suppose donc que $1 < p < 2$. Par le premier encadrement dans (3.89), il nous suffit d'estimer les $(m_n(\tilde{f}))_{n\in\mathbb{Z}}$. Décomposons $f = f_n + g_n$ où $f_n := f\,\mathbf{1}_{\{x;|f(x)|>2^n\}}$. Comme $1 < p < 2$, on sait que $f_n \in L^1(\mathbb{T})$ et $g_n \in L^2(\mathbb{T})$. Par (3.89), on a donc $\|f_n\|_{L^1} \leq \sum_{k\geq n+1} 2^k m_k(f)$ et $\|g_n\|_{L^2} \leq \sum_{k\leq n} 2^{2n} m_k(f)$. Par linéarité, $\tilde{f} = \widetilde{f_n} + \widetilde{g_n}$, Donc, par l'analogue de (3.84), on a

$$m_{n+1}(\tilde{f}) \leq |\{t; |\widetilde{f_n}| \geq 2^{n-1}\}| + |\{t; |\widetilde{g_n}| \geq 2^{n-1}\}|. \tag{3.91}$$

Ainsi, par (3.74), on a

$$|\{t; |\widetilde{f_n}| > 2^{n-1}\}| \leq 2^{-n+9}\|f_n\|_{L^1} \leq 2^9\, 2^{-n} \sum_{k\geq n+1} 2^k m_k(f).$$

D'autre part, comme la conjugaison est de norme 1 sur $L^2(\mathbb{T})$, on a

$$|\{t; |\widetilde{g_n}| > 2^{n-1}\}| \leq 2^{-2n+2}\|g_n\|_{L^2} \leq 4\,2^{-2n} \sum_{k\leq n} 2^{2k} m_k(f).$$

Par (3.91) et (3.89), on en déduit

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}\|_{L^p}^p &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np} m_n(\tilde{f}) \leq 2^9 \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np} \left(2^{-n} \sum_{k\geq n+1} 2^k m_k(f) + 2^{-2n} \sum_{k\leq n} 2^{2k} m_k(f) \right) \\
&\leq 2^9 \left(\sum_{\substack{(k,n)\in\mathbb{Z} \\ k\geq n}} 2^{(n-k)(p-1)} 2^{kp} m_k(f) + \sum_{\substack{(k,n)\in\mathbb{Z} \\ k\leq n}} 2^{(p-2)(n-k)} 2^{kp} m_k(f) \right) \\
&\leq 2^9 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n\leq k} 2^{(n-k)(p-1)} + \sum_{n\geq k} 2^{(p-2)(n-k)} \right) 2^{kp} m_k(f) \\
&\leq 2^9 \left(\frac{1}{1-2^{1-p}} + \frac{1}{1-2^{p-2}} \right) \|f\|_{L^p}^p.
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du théorème 3.110. $\square$

Chapitre 4

Appendice

4.1 Inégalités

Si $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|x-y|^2/2 \geq 0$, ce qui s'écrit aussi $xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$. On peut aussi réecrire cela en disant que

$$\forall a, b \geq 0, \qquad \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \tag{4.1}$$

L'inégalité suivante, qui est à la base de la plupart des inégalités de ce chapitre, est une version pour une combinaison plus générale. Elle exprime que le logarithme est concave.
Il peut être pratique d'autoriser la valeur $+\infty$. Si besoin, on conviendra que $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Proposition 4.1 (Inégalité arithmético-géométrique)**.** *Soit $t \in]0,1[$ et $a, b \in [0, +\infty]$. Alors*

$$a^{1-t}b^t \leq (1-t)a + tb \tag{4.2}$$

avec, lorsque a et b sont finis, égalité si et seulement si $b = a$.

L'inégalité est aussi vraie, mais triviale, lorsque $t = 0$ ou $t = 1$.

Démonstration. Si $a = 0$ ou $b = 0$, l'inégalité est vraie, et il y a égalité si et seulement si $b = 0$. Si $a = +\infty$ ou $b = \infty$, l'inégalité est trivialement vraie. On peut donc supposer $0 < a, b < +\infty$. Introduisons la fonction C^1 sur $]0, +\infty[$ définie par

$$\forall a > 0, \quad f(a) = a^{1-t}b^t - (1-t)a - tb. \tag{4.3}$$

On a $f'(a) = (1-t)a^{-t}b^t - (1-t) = (1-t)\left[\left(\frac{b}{a}\right)^t - 1\right]$. Ainsi, f est (strictement) croissante sur $]0, b]$ et (strictement) décroissante sur $[b, +\infty[$, ce qui veut dire qu'elle atteint son maximum en $a = b$. Or $f(b) = 0$ et donc $f \leq 0$. La stricte monotonie assure que f ne s'annule que en b. $\square$

Pour $\lambda > 0$, on peut multiplier a par $\lambda^{1/(1-t)}$ et b par $1/\lambda^{1/t}$ et on obtient le

Lemme 4.2 (Inégalité arithmético-géométrique bis)**.** *Soit $t \in]0,1[$. Alors, pour $a, b \in [0, +\infty]$ et $\lambda > 0$ on a*

$$a^{1-t}b^t \leq (1-t)\lambda^{\frac{1}{1-t}}a + t\frac{b}{\lambda^{\frac{1}{t}}} \tag{4.4}$$

et, lorsque a *et* b *sont finis, il y a égalité si et seulement si* $\lambda^{\frac{1}{1-t}}a = \frac{b}{\lambda^{\frac{1}{t}}}$.
En particulier, si $0 < a, b < +\infty$*, il y a égalité pour un certain* $\lambda > 0$*, ce qui peut se résumer par :*

$$\inf_{\lambda>0}\left((1-t)\lambda^{\frac{1}{1-t}}a + t\frac{b}{\lambda^{\frac{1}{t}}}\right) = \min_{\lambda>0}\left((1-t)\lambda^{\frac{1}{1-t}}a + t\frac{b}{\lambda^{\frac{1}{t}}}\right) \; = \; a^{1-t}b^t. \tag{4.5}$$

Démonstration. Il suffit donc de prendre $\lambda := \left(\frac{b}{a}\right)^{t(1-t)}$. □

On préfère parfois introduire $p = \frac{1}{1-t} \in]1, +\infty[$ et $q = \frac{1}{t} \in]1, +\infty[$, qui vérifient $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ –on dit que ces nombres sont *conjugués*[1]–, et remplacer a par a^p et b par b^q, de sorte qu'on trouve le

Lemme 4.3 (Inégalité arithmético-géométrique bis bis)**.** *Soit* $p, q > 1$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Alors, pour* $a, b \in [0, +\infty]$ *et* $\lambda > 0$ *on a*

$$ab \leq \lambda^p\, a^p/p + \lambda^{-q}\, b^q/q \tag{4.6}$$

et, lorsque a *et* b *sont finis, il y a égalité si et seulement si* $\lambda^p a^p = \lambda^{-q} b^q$.
En particulier, si $0 < a, b < +\infty$*, il y a égalité pour un certain* $\lambda > 0$*, ce qui peut se résumer par :*

$$\inf_{\lambda>0}\left(\lambda^p a^p/p + t\lambda^{-q}b^q/q\right) = \min_{\lambda>0}\left(\lambda^p a^p/p + t\lambda^{-q}b^q/q\right) \; = \; ab. \tag{4.7}$$

Sous cette dernière forme, l'inégalité arithmético-géométrique s'appelle aussi *inégalité d'Young*. L'inégalité la plus simple et la plus classique (liée à Cauchy-Schwartz) correspond à $t = 1/2$, c'est-à-dire $p = q = 2$.

1. par exemple $p = q = 2$ ou $p = 1$ et $q = +\infty$ (ici non considéré)

Bibliographie

[1] Dario Cordero Erausquin. Analyse Fonctionnelle - polycopié L3 3M210. https://webusers.imj-prg.fr/~dario.cordero/enseignement.html, 2015.

[2] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Dover Publications Inc., New York, corrected edition, 1976.

[3] Nicolas Lerner. Lecture Notes on Real Analysis. http://people.math.jussieu.fr/~lerner/realanalysis.lerner.pdf, 2011.

[4] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1975. Traduit de l'anglais par N. Dhombres et F. Hoffman.

[5] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, third edition, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.

[6] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.