Démonstration. Par le théorème de Lusin, pour chaque $n \geq 1$, on peut trouver $g_n \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $|g_n(x)| \leq 1$ sur X et tel que $\mu(\{x;\ f(x) \neq g_n(x)\}) \leq 2^{-n}$. Comme $\sum_{n\geq 1} \mu(\{x;\ f(x) \neq g_n(x)\}) < +\infty$, on a

$$\mu(\{x; \#\{n; f(x) \neq g_n(x)\} = +\infty\}) = \mu\left(\bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq m} \{x;\ f(x) \neq g_n(x)\}\right) = 0.$$

Ainsi, pour presque tout x, à partir d'un certain rang, la suite $(g_n(x))_n$ est constante et égale à $f(x)$. Ceci achève la preuve du corollaire. □

Théorème 1.44. *(Théorème de Vitali-Carathéodory) Soit $f \in L^1(\mu)$, f à valeurs réelles. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe deux fonctions u et v telles que $u \leq f \leq v$, u est semi-continue supérieurement, v est semi-continue inférieurement et*

$$\int_X (v - u)d\mu < \varepsilon. \tag{1.29}$$

Démonstration. Supposons d'abord que $f \geq 0$. En reprenant la construction des suites $(s_n)_n$ et $(t_n)_n$ faite au début de la preuve du théorème 1.41 (voir en particulier, (1.27)), on voit que

$$f = \sum_{n\geq 1} c_n \mathbf{1}_{E_n} \tag{1.30}$$

où $(E_n)_n$ sont des boréliens et les $(c_n)_n$ sont strictement positifs.
Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\int_X f d\mu = \sum_{n\geq 1} c_n \mu(E_n) \tag{1.31}$$

ainsi comme f est intégrable, la série du membre de droite de (1.31) converge. Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème 1.17, on construit des compacts $(K_n)_{n\geq 1}$ et des ouverts $(V_n)_{n\geq 1}$ tels que, pour $i \geq 1$, $K_n \subset E_n \subset V_n$ et

$$c_n\mu((V_n \setminus K_n) < 2^{-n-1}\varepsilon. \tag{1.32}$$

Choisissons N tel que $\sum_{n\geq N+1} c_n\mu(E_n) < \frac{\varepsilon}{4}$. Comme $V_n = (V_n \setminus E_n) \cup E_n \subset (V_n \setminus K_n) \cup E_n$, (1.32) nous donne

$$\sum_{n\geq N+1} c_n\mu(V_n) \leq \sum_{n\geq N+1} c_n\mu(E_n) + \sum_{n\geq N+1} 2^{-n-1}\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.33}$$

Posons

$$v = \sum_{n\geq 1} c_n \mathbf{1}_{V_n} \quad \text{et} \quad u = \sum_{n=1}^{N} c_n \mathbf{1}_{K_n}. \tag{1.34}$$

Alors, par les remarques suivant la définition 1.12, u est semi-continue supérieurement et v est semi-continue inférieurement. La définition des $(K_n)_n$ et $(V_n)_n$ et (1.30) impliquent que $u \leq f \leq v$. Enfin, on calcule

$$v - u = \sum_{n=1}^{N} c_n(\mathbf{1}_{V_n} - \mathbf{1}_{K_n}) + \sum_{n\geq N+1} c_n \mathbf{1}_{V_n} = \sum_{n\geq 1} c_n(\mathbf{1}_{V_n\setminus K_n}) + \sum_{n\geq N+1} c_n \mathbf{1}_{V_n}. \tag{1.35}$$

Ainsi (1.33) garantit (1.29).
Dans le cas général, on décompose $f = f^+ - f^-$ où $(f^\pm)$ sont positives mesurables. On construit $u^\pm$ et $v^\pm$ comme ci-dessus pour $f^\pm$ et on pose $u = u^+ - v^-$ et $v = v^+ - u^-$. En se souvenant de l'exercice 1.13, on voit que u et v ont les propriétés requises. Ceci prouve le théorème 1.44. □

Exercice 1.45. Montrer qu'on ne peut pas en général prendre u et v continues.

1.4 Espaces L^p.

Dans toute cette section [1], $(X, \mathcal{S}, \mu)$ désigne un espace mesuré quelconque. Lorsque des hypothèses supplémentaires seront nécessaires, elles seront précisées.

1.4.1 Inégalités de Hölder

Proposition 1.46 (Inégalité de Hölder). *Soit $f, g : X \to [0, +\infty]$ deux fonctions mesurables positives et $t \in]0,1[$. Alors on a*

$$\int f^{1-t} g^t \, d\mu \leq \Big(\int f \, d\mu \Big)^{1-t} \Big(\int g \, d\mu \Big)^t.$$

De plus, si $0 < \int f \, d\mu, \int g \, d\mu < +\infty$, il y a égalité si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que $g = \lambda f$ μ-pp.

Remarque 1.47. Vous noterez que l'inégalité est bien homogène en f et g.

Remarque 1.48. Pour une fonction positive f et $r > 0$ on a

$$\int f^r \, d\mu > 0 \Longleftrightarrow \mu(\{f \neq 0\}) = \mu(\{x \in X \; ; \; f(x) \neq 0\}) \neq 0,$$

ce qui veut dire qu'il existe $A \in \mathcal{S}$, avec $\mu(A) \neq 0$ tel que $f > 0$ sur A. On écrit aussi "$f \not\equiv 0$ μ-pp" qu'il faut comprendre comme "f n'est pas égale à une fonction nulle μ-pp".

Démonstration. D'abord, on remarque que l'inégalité devient une égalité lorsque $f = g$.
Si $\int f \, d\mu = +\infty$, il n'y a rien à montrer. De même, si $\int f \, d\mu = 0$ alors $f = 0$ μ-pp et l'inégalité est triviale. Idem avec g. On supposera donc que $0 < \int f \, d\mu, \int g \, d\mu < +\infty$.
On va utiliser deux fois le Lemme 4.2. Tout d'abord, pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in X$ on a

$$f(x)^{1-t} g(x)^t \leq (1-t)\lambda^{\frac{1}{1-t}} f(x) + t\lambda^{-\frac{1}{t}} g(x)$$

et donc en intégrant on trouve que pour tout $\lambda > 0$,

$$\int f^{1-t} g^t \, d\mu \leq (1-t)\lambda^{\frac{1}{1-t}} \int f \, d\mu + t\lambda^{-\frac{1}{t}} \int g \, d\mu.$$

En prenant l'infimum sur les λ, ou trouve donc bien $\int f^{1-t} g^t \, d\mu \leq \Big(\int f \, d\mu \Big)^{1-t} \Big(\int g \, d\mu \Big)^t$.
Pour la réciproque, on suppose donc que les intégrales sont non-nulles et finies. On reprend la démonstration ci-dessous mais au lieu de prendre l'infimum sur les λ, on suppose qu'on a pris, dès le début le $\lambda = \lambda_0 > 0$ optimal pour lequel l'infimum est atteint (la valeur valeur exacte, dont on n'a pas besoin, est $\lambda_0 = \Big(\frac{\int g \, d\mu}{\int f \, d\mu} \Big)^{t(1-t)} > 0$). Alors on a

$$\Big(\int f \, d\mu \Big)^{1-t} \Big(\int g \, d\mu \Big)^t - \int f^{1-t} g^t \, d\mu = \int \Big[(1-t)\lambda_0^{\frac{1}{1-t}} f(x) + t\lambda_0^{-\frac{1}{t}} g(x)^t - f(x)^{1-t} g(x)^t \Big] \, d\mu.$$

Le terme sous l'intégrale est positif, et donc pour que son intégrale soit nulle, il faut qu'il soit nul μ-pp. Mais par l'étude des cas d'égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique, cela implique que $\lambda_0^{\frac{1}{1-t}} f = \lambda_0^{-\frac{1}{t}} g$ μ-pp. $\square$

Il y a beaucoup de formulations équivalentes de l'inégalité de Hölder. En voici une pour ceux qui préfèrent les p, q. On rappelle que $p/q = p - 1$.

1. Cette section est tirée du polycopié [1] et reproduite ici avec l'aimable autorisation de son auteur.

Proposition 1.49 (Inégalité de Hölder)**.** *Soit $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et $f, g : X \to [0, +\infty]$ deux fonctions mesurables positives sur X. Alors,*

$$\int fg\, d\mu \leq \Big(\int f^p\, d\mu\Big)^{1/p} \Big(\int g^q\, d\mu\Big)^{1/q}.$$

avec égalité lorsque $g = f^{p-1}$. De plus, lorsque $0 < \int f^p\, d\mu, \int g^q\, d\mu < +\infty$ il y a égalité si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que $g^q = \lambda f^p$ (i.e. $g = \tilde{\lambda}\, f^{p-1}$ pour un $\tilde{\lambda} \geq 0$).

Démonstration. On applique la proposition précédente en remplaçant $(1-t)$ par $\frac{1}{p}$, et donc t par $\frac{1}{q}$, et en l'appliquant à f^p à la place de f et g^q à la place de g. $\square$

Le cas le plus rencontré est le cas $p = q = 2$, et l'inégalité s'appelle alors *inégalité de Cauchy-Schwartz.*

Remarque 1.50. Le cas du couple $p = 1$ et $q = \infty$ est trivial et s'énonce comme suit : si f, g sont deux fonctions mesurables positives sur X, alors

$$\int fg\, d\mu \leq \big(\sup g\big) \int f\, d\mu.$$

Remarque 1.51. Une conséquence de l'inégalité de Hölder est que si on se donne p et q dans $]1, +\infty[$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive avec $\int f^p\, d\mu < +\infty$, alors

$$\Big(\int f^p\, d\mu\Big)^{1/p} = \sup_{g \geq 0} \frac{\displaystyle\int fg\, d\mu}{\Big(\displaystyle\int g^q\, d\mu\Big)^{1/q}} = \sup_{g \geq 0,\, \int g^q\, d\mu \leq 1} \int fg\, d\mu.$$

où les sup sont pris sur les fonction mesurables positives telles que $0 < \int g^q\, d\mu < +\infty$). De plus ce sup est atteint. En effet, l'inégalité de Hölder montre que $\dfrac{\displaystyle\int fg\, d\mu}{\Big(\displaystyle\int g^q\, d\mu\Big)^{1/q}} \leq \Big(\int f^p\, d\mu\Big)^{1/p}$, et donc *idem* pour le sup sur g. On voit par ailleurs qu'il y a égalité si $g = f^{p-1}$ par exemple (si f est non nulle ; si f est nulle μ-pp, on prend n'importe que g), ce qui donne à la fois l'égalité voulue, et le fait que le sup est atteint. La deuxième inégalité découle par homogénéité.
On retrouvera une formule similaire lors de l'étude de la dualité $L^p - L^q$.

1.4.2 Inégalité de Minkowski

Proposition 1.52. *Soit $p \in]1, +\infty[$. Si $f, g : X \to [0, +\infty]$ sont deux fonctions mesurables positives sur X, alors*

$$\Big(\int (f+g)^p\, d\mu\Big)^{1/p} \leq \Big(\int f^p\, d\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int g^p\, d\mu\Big)^{1/p}.$$

Si $0 < \int f^p\, d\mu, \int g^p\, d\mu < +\infty$, alors il y a égalité si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que $g = \lambda f$ μ-pp.

Démonstration. Soit $q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On rappelle que $q(p-1) = p$. Si f ou g est nulle μ-pp, il n'y a rien à montrer ; on supposera donc que ce n'est pas le cas. Idem si l'une des intégrales de droite vaut $+\infty$. On suppose donc les intégrales du terme de droite sont finies et que l'intégrale du terme de gauche est

non-nulle.
On a

$$\forall a, b \in [0, +\infty], \qquad (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \tag{1.36}$$

On montrera cette inégalité plus loin. Cela permet de voir, en l'appliquant à $a = f(x)$ et $b = g(x)$ et en intégrant sur X par rapport à $d\mu(x)$ que si les intégrales de droites sont finies, l'intégrale de gauche aussi. Alors, par le cas d'égalité (trivial) dans l'inégalité de Hölder, on sait qu'il existe $H \geq 0$ tel que

$$\Big(\int (f+g)^p \, d\mu\Big)^{1/p} = \int (f+g) H \, d\mu \quad \text{et} \quad \int H^q \, d\mu = 1.$$

De façon explicite $H = \dfrac{1}{\big(\int (f+g)^p \, d\mu\big)^{1/q}} (f+g)^{p-1}$ sur X. On a donc,

$$\Big(\int (f+g)^p \, d\mu\Big)^{1/p} = \int f H \, d\mu + \int g H \, d\mu \leq 1 \times \Big(\int f^p \, d\mu\Big)^{1/p} + 1 \times \Big(\int g^p \, d\mu\Big)^{1/p},$$

où l'on a utilisé deux fois l'inégalité de Hölder. Cela montre l'inégalité voulue.
On voit qu'il y a égalité si $g = \lambda f$ μ-pp. Réciproquement, pour qu'il y ait égalité, il faut que dans la preuve ci-dessus, il y ait égalité dans les deux inégalités de Hölder utilisées. Et donc, il faut que μ-pp $f = \lambda_1 H^{p-1}$ et $g = \lambda_2 H^{p-1}$, avec $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Donc il faut que $g = \lambda f$ pour un certain $\lambda > 0$. □

1.4.3 Espace $\mathcal{L}^p$ et espace L^p

Si f est une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note, pour $p \in [1, +\infty[$

$$\| f \|_p := \left(\int_E | f |^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

qu'on appelle[2] *norme* $\mathcal{L}^p$ de f, et lorsque $p = \infty$,

$$\| f \|_\infty := \inf\{a > 0 \; ; \; \mu(\{| f | \geq a\}) = 0\},$$

qu'on appelle[3] *supremum essentiel* de f.

Définition 1.53 ($p \in [1, +\infty[$)**.** On note $\mathcal{L}^p(E, \mathcal{S}, \mu)$, ou $\mathcal{L}^p(\mu)$, l'ensemble de toutes les fonctions mesurables à valeurs dans ans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que $| f |^p$ est μ-intégrable, i.e. telles que $\|f\|_p < +\infty$.

Définition 1.54 ($p = \infty$)**.** On note $\mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{S}, \mu)$, ou $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, l'ensemble de toutes les fonctions mesurables f à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui sont *μ-essentiellement bornées*, c'est-à-dire telles qu'il existe $a > 0$ pour lequel $\mu(\{| f | \geq a\}) = 0$, soit encore telles que $\|f\|_\infty < +\infty$.

On remarquera que pour $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ on a

$$\mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) = 0.$$

En effet, on a $\mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) = \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} \Big\{|f| \geq \|f\|_\infty + \dfrac{1}{n}\Big\}\Big)$ et on conclut par convergence monotone. En particulier, pour toute partie mesurable A on a $\mu(A) = \mu(A \cap \{|f| \leq \|f\|_\infty\})$.

2. mais dont nous verrons qu'il ne s'agit en fait que d'une semi-norme
3. mais on devrait dire μ-supremum essentiel

Remarque 1.55. Si on éprouve le besoin de préciser que l'on travaille avec des fonctions réelles ou des fonctions complexes, on peut ajouter "espace $\mathcal{L}^p$-réel" ou "espace $\mathcal{L}^p$-complexe".

Remarque 1.56. Dans les deux définitions ci-dessus, on peut autoriser la fonction $|f|$ à prendre la valeurs $+\infty$ (en particulier on peut considérer des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$). Cela ne change rien du point de vue de l'intégration par rapport à μ, car pour une fonction dans $\mathcal{L}^p$, cela ne peut avoir lieu que sur un ensemble de μ-mesure nulle. En effet, si p est fini, $|f|^p$ μ-intégrable entraîne que $\mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$. Pour $p = +\infty$, si $\|f\|_\infty < +\infty$, cela veut dire qu'il existe $a > 0$ fini tel que $\mu(\{|f| \geq a\}) = 0$, et $\mu(\{|f| = +\infty\}) \leq \mu(\{|f| \geq a\})$.

Proposition 1.57. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on a, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{L}^p$, on a*

1. *$\|\lambda f\|_p = |\lambda|\|f\|_p$, et*
2. *$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.*

En particulier, $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel.

Démonstration. Le premier point est évident par linéarité de l'intégrale si $p < \infty$. Si $p = +\infty$,

$$\begin{aligned}\| af \|_\infty &= \inf\{m > 0 : \mu(\{| af | \geq m\}) = 0\} = | a | \inf\{m' > 0 : \mu(\{| af | \geq | a |m'\}) = 0\} \\ &= | a | inf\{m' > 0 : \mu(\{| f | \geq m'\}) = 0\} = | a | \| f \|_\infty.\end{aligned}$$

Le deuxième point est évident pour $p = 1$ à partir de l'inégalité $|f + g| \leq |f| + |g|$. Pour $p \in]1, +\infty[$, on combine cela avec l'inégalité de Minkowski. Pour le cas $p = \infty$, on remarque que si $a > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ on a,

$$\mu(\{|f + g| \geq a\}) \leq \mu(\{|f| + |g| \ \geq a\}) = \mu\Big(\{|f| + |g| \ \geq a\} \cap \{|f| \leq \|f\|_\infty\} \cap \{|g| \leq \|g\|_\infty\}\Big) = \mu(\emptyset) = 0,$$

et donc $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. □

Par ailleurs, si f est la fonction nulle, on a $\|f\|_p = 0$. Alors que manque-t-il à $\|\cdot\|_p$ pour être une norme sur $\mathcal{L}^p$? Pas grand chose, mais le problème vient du fait que pour $f \in \mathcal{L}^p$ on a

$$\|f\|_p = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \ \ \mu\text{-p.p.}$$

Cela est clair pour $p < +\infty$, puisque dire que la fonction positive $|f|^p$ a une intégrale nulle, cela veut dire qu'elle est nulle μ-pp. Pour $p = \infty$, si $\|f\|_\infty = 0$, alors $\mu(\{|f| > 0\}) = \mu(\bigcap_{n\geq 1}\{|f| \ \geq \frac{1}{n}\}) = 0$, par convergence monotone.

Ainsi, on veut construite un espace tel que f nulle μ-presque partout veut dire que f est le vecteur nul. Pour cela, on fait le quotient de $\mathcal{L}^p$ par la relation d'équivalence suivante

$$f \sim g \Longleftrightarrow f = g \ \ \mu\text{-p.p.} \Longleftrightarrow \|f - g\|_p = 0.$$

Ainsi, on considère l'ensemble quotient $\mathcal{L}^p(\mu)/\sim$ (que l'on notera $L^p(\mu)$) formé par les classes d'équivalences modulo $\sim$. Notez que la relation d'équivalence associée à chaque $\|\cdot\|_p$ ne dépend pas de p et est la même pour tous les espaces $\mathcal{L}^p$: la classe d'une fonction f est constituée par les fonctions qui coïncident avec f μ-presque partout.

Si on note $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions mesurables nulles μ-presque partout, on peut aussi écrire

$$f \sim g \Longleftrightarrow f - g \in \mathcal{N}.$$

Or $\mathcal{N}$ est un espace vectoriel (et un sous-espace vectoriel de tout $\mathcal{L}^p(\mu)$), et il est classique de voir que les structures d'espace vectoriel passent au quotient. En résumé, on obtient la

Définition 1.58. Pour $p \in [1, +\infty]$, on note $L^p(E, \mathcal{S}, \mu)$, ou $L^p(\mu)$, l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de $\mathcal{L}^p(\mu)$ par la relation d'équivalence définie par l'égalité μ-p.p.
Soit $\tilde{f} := \{g\ ;\ g = f\ \mu\text{-p.p.}\}$ la classe d'équivalence de f. Les opérations classiques s'étendent aux classes d'équivalence, avec $\widetilde{af} = a\tilde{f}$ et $\widetilde{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$.
On peut également définir $\|\cdot\|_p$ sur $L^p(\mu)$ par $\|\tilde{f}\|_p = \|f\|_p$, qui ne dépend pas du représentant choisi, car $f = g$ μ-p.p. implique $\|f\|_p = \|g\|_p$.

Remarque 1.59. On fera systématiquement l'abus de notation qui consiste à ne pas différencier fonctions et classes d'équivalences, c'est-à-dire à utiliser le même symbole pour une fonction f et pour sa classe d'équivalence $\overline{f}$.
C'est une question d'habitude. La seule manière de comprendre L^p, c'est de l'utiliser. En fait, sur $L^p(\mu)$ on pense plutôt "$\mathcal{L}^p(\mu)$", c'est-à-dire à des fonctions, plutôt qu'à des classes d'équivalences, mais on se souvient que les objets ne sont définis que μ-pp. Ainsi, par exemple, on a coutume de dire que deux fonctions f et g sont égales dans L^p si elles coïncident μ-pp (même si on devrait simplement dire qu'elle définissent la même classe d'équivalence dans $L^p(\mu)$).

On a alors immédiatement ce que l'on cherchait.

Théorème 1.60. *L'ensemble $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.*

Exemple 1.61. On note $\ell_p(\mathbb{N})$ ou simplement ℓ_p l'espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$, où m est la mesure de comptage. On distingue parfois les espaces réels $\ell_p^{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$et complexes $\ell_p^{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$.
Soit $u \in \ell^p$. Si $p < \infty$, alors

$$\|u\|_p = \left(\sum_n |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

tandis que si $p = +\infty$,

$$\|u\|_\infty = \sup_n |u_n|.$$

Il n'est pas besoin ici de quotienter $\mathcal{L}^p$ car $\|u\|_p = 0$ implique $u = 0$.
On a la même chose pour $\ell^p(\mathbb{Z}) = \mathcal{L}^p(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), m)$.

1.4.4 Convergence dans L^p et convergence simple

Rappelons que la topologie usuelle d'un espace vectoriel normé est la topologie relative à la distance $d(f, g) = \|f - g\|$. Ainsi on dira que la suite (f_n) converge (vers f) dans L^p si

a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^p$ et $f \in L^p$;
b) $\lim_n \|f - f_n\|_p = 0$.

On rappelle que la suite (f_n) converge simplement vers f si $\lim_n f_n(x) = f(x)$ pour μ-presque tout x.
On remarque que si (f_n) converge dans $L^1(\mu)$ vers f, alors $\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\mu$. La réciproque est fausse en général.
Le théorème de convergence dominée est généralement énoncé en terme de fonction intégrable, mais on peut aussi en donner une version (équivalente) L^p.

Proposition 1.62. *Convergence L^p-dominée Soit $p \in [1, +\infty[$. Si $f_n \to f$ μ-p.p. et qu'il existe $g \in L^p$ tel que $|f_n| \leq g$ pour tout entier n, alors $f_n \overset{L^p}{\to} f$.*

Démonstration. On applique le théorème de convergence dominée. En effet, $|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^p |g|^p$ μ-p.p., et par hypothèse $|g|^p$ est intégrable, donc comme $|f_n - f|^p \to 0$, μ-p.p., on a la convergence vers 0 de $\int |f_n - f|^p\, d\mu$. $\square$

Proposition 1.63 (Extraction d'une sous-suite convergeant simplement)**.** *Soit $p \in [1, +\infty]$. Si $f_n \overset{L^p}{\to} f$, alors il existe une suite extraite de (f_n) qui converge vers f μ-p.p.*
Dans le cas $p = +\infty$, on a bien sûr beaucoup mieux : $f_n \to f$ uniformément en dehors d'un ensemble négligeable (en particulier, $f_n \to f$ μ-p.p., pas besoin de sous-suite).

Démonstration. On traite d'abord le cas $1 \leq p < +\infty$. Si (f_n) converge vers f dans $L^p(\mu)$, on peut trouver une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ tel que pour tout $k \geq 1$,

$$\|f_{n_k} - f\|_p \leq 2^{-k}.$$

Introduisons la suite de fonctions positives $u_k = |f_{n_k} - f|^p$. Par le théorème de Beppo-Levi (convergence monotone) on a

$$\int \sum_{k\geq 0} u_k(x)\, d\mu(x) = \sum_{k\geq 0} \int u_k(x)\, d\mu(x) \leq \sum_{k\geq 0} (2^{1/p})^{-k} < +\infty.$$

Par conséquent, il existe un ensemble de mesure nulle $\mathcal{N}$ tel que $\forall x \in X \setminus \mathcal{N}$, $\sum_{k\geq 0} u_k(x) < +\infty$. Donc, pour $x \in X \setminus \mathcal{N}$ la série réelle $\sum u_k(x)$ est convergente, et donc son terme général tend vers zéro, c'est à dire $f_{n_k}(x) \to f(x)$.
Pour $p = +\infty$, c'est la définition de la convergence dans $L^\infty(\mu)$. $\square$

Exemple 1.64. Dans le cas de l'espace ℓ^p (pour $p < \infty$), une suite (de fonctions, aussi appelées suites ici...) $(u^{(n)})$ converge vers la fonction $u \in \ell^p$ si $\sum_k |\, u_k^{(n)} \,|^p < \infty$, si $\sum_k |\, u_k \,|^p < \infty$ et si

$$\lim_n \sum_k |\, u_k^{(n)} - u_k \,|^p = 0.$$

Ceci implique en particulier que $u_k^{(n)} \longrightarrow u_k$ lorsque $n \to \infty$. En conclusion, dans l'espace ℓ^p (vrai aussi si $p = +\infty$ par b)ii)),

$$f_n \overset{\ell^p}{\to} f \qquad \Longrightarrow \qquad f_n \to f \qquad \text{simplement (partout).}$$

Évidemment, on n'a pas la réciproque, comme on peut le voir sur le contre-exemple $u^{(n)} = \mathbf{1}_{\{n\}}$. Alors la suite $(u^{(n)})$ converge simplement vers la fonction nulle car $u_k^{(n)} = 0$ pour tout $k > n$. Néanmoins pour tout n, la fonction $u^{(n)}$ est à distance 1 de la fonction nulle : $\|\, u^{(n)} - 0 \,\|_p = (\sum_k |\, u_k^{(n)} \,|^p)^{1/p} = 1$ pour tout p (même $p = \infty$), et donc ne converge pas vers la suite nulle dans ℓ^p. En effet, ici la plus petite fonction dominant la suite $(u^{(n)})$ est la fonction v constante à 1. Pour $p < \infty$, cette fonction n'est pas dans ℓ^p, donc on ne peut pas appliquer a). De plus, $v \in \ell^\infty$, ce qui montre aussi que la Proposition 1.62 n'est pas valide en général pour $p = \infty$.

Corollaire 1.65. *Soit $p \in [1, +\infty]$. Si l'on a la convergence de la suite (f_n) vers f dans L^p et vers g μ-p.p. alors f et g sont égales μ-p.p.*

Démonstration. On sait qu'il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})$ qui converge μ-p.p. vers f. Or la suite (f_n) converge μ-p.p. vers g, donc la sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ également. Ainsi $f = g$ μ-p.p. $\square$

1.4.5 Complétude des espaces L^p

Théorème 1.66 (Théorème de Riesz–Fisher)**.** *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $L^p(\mu)$. On veut montrer qu'elle converge dans L^p. Remarquons qu'il suffit de montrer qu'une sous-suite $(f_{n_k})_k$ converge. En effet, si f est la limite de cette sous-suite on a alors pour tout n, k,

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f_n\|_p,$$

et chaque terme peut être rendu petit, le premier en prenant k assez grand (par définition de la limite), et le deuxième en prenant k (puisque $n_k \geq k$) et n assez grands, par le caractère de Cauchy.
Le caractère de Cauchy nous permet de trouver une sous-suite (f_{n_k}) tel que

$$\forall k \geq 0, \qquad \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k}.$$

Posons alors

$$u_0 = f_{n_0}, \qquad \text{et pour } k \geq 1 \;\; u_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}},$$

de sorte que pour $N \geq 0$, la somme partielle vérifie

$$U_N := u_0 + u_1 + \ldots + u_N = f_{n_N}.$$

On se demande donc si la série $\sum u_k$ converge dans $L^p(\mu)$.
Posons, pour (presque tout) $x \in E$, et $N \geq 0$,

$$V_N(x) = \sum_{k=0}^{N} |u_k(x)|.$$

Pour x fixé, c'est une suite croissante qui converge vers une limite que l'on note $V(x)$:

$$V(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(x)| \in [0, +\infty].$$

La suite croissante $V_N(x)^p$ converge elle vers $V(x)^p$ lorsque $N \to +\infty$ (en convenant que $(+\infty)^p = +\infty$) et comme

$$\int V_N(x)^p \, d\mu(x) = \Big\| \sum_{k=0}^{N} |u_j| \Big\|_p^p \leq \Big(\sum_{k=0}^{N} \|u_j\|_p \Big)^p \leq \Big(\|f_{n_0}\|_p + \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \Big)^p =: M < +\infty,$$

on a par convergence monotone

$$\int V(x)^p \, d\mu(x) \leq M < +\infty.$$

Cela force l'ensemble $\mathcal{N} := \{V^p = +\infty\} = \{V = +\infty\}$ à être de mesure nulle. Pour $x \notin \mathcal{N}$, on a

$$V(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \; |u_k(x)| < +\infty,$$

ce que veut dire que la série dans $\mathbb{K}$, $\sum u_k(x)$ est elle aussi convergente, car absolument convergente ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est complet). Pour $x \notin \mathcal{N}$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_j(x) = \lim_{N \to +\infty} U_N(x) = \lim_{N \to +\infty} f_{n_N}(x)$$

la somme de cette série convergente. On peut poser $f(x) = 0$ pour $x \in \mathcal{N}$, si on veut, mais ce n'est pas nécessaire si on raisonne μ-pp. Notez que f est une fonction mesurable comme limite simple (presque partout) d'une suite de fonctions mesurables. Par ailleurs, on a μ-pp, par convergence simple,

$$|f|^p \leq \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| \Big)^p = V^p$$

et donc $f \in L^p(\mu)$. Il reste à montrer la convergence dans $L^p(\mu)$. On a que U_N converge simplement vers f et $|U_N| \leq V_N \leq V$. Comme $V \in L^p(\mu)$, on peut conclure par convergence dominée dans $L^p(\mu)$ que U_N converge vers f dans $L^p(\mu)$ dans le cas $p < +\infty$. On a donc bien montré que la sous-suite (f_{n_k}) convergeait dans $L^p(\mu)$. $\square$

1.5 Approximation

Théorème 1.67. *(Approximation par des fonctions simples) Soit $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espace mesuré. Soit S l'ensemble des fonctions s simples à valeurs complexes (i.e. $s = \sum_{1 \le i \le n} \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}$ où $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $E_i \in \mathcal{S}$) telles que $\mu(\{x;\ s(x) \neq 0\}) < +\infty$.*
Pour $1 \le p < +\infty$, S est dense dans $L^p(\mu)$.

Démonstration. Clairement $S \subset L^p(\mu)$ pour tout $1 \le p < +\infty$. Soit maintenant $f \in L^p(\mu)$ telle que $f \ge 0$. On peut alors construire une suite de fonctions simples $(s_n)_{n \ge 1}$ qui converge en croissant vers f (voir le début de la preuve du théorème 1.41). Pour tout $n \ge 1$, $0 \le s_n \le f$. Ainsi $|f - s_n|^p \le f^p$ et le théorème de convergence dominée nous dit que $\|f - s_n\|_p \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc f est dans l'adhérence de S pour la norme $\|\cdot\|_p$. Pour f à valeurs complexes, on la décompose en partie réelle et imaginaire, puis ses parties réelle et imaginaire en différence de partie positive et négative. $\square$

Théorème 1.68. *(Approximation par des fonctions continues) Supposons que $(X, \mathcal{S}, \mu)$ est un espace de Hausdorff localement compact mesuré tel que la mesure μ et la σ-algèbre associée vérifient les propriétés (2)-(5) du théorème 1.19.*
Alors, pour $1 \le p < +\infty$, $\mathcal{C}_c(X)$ est dense dans $L^p(\mu)$.

Remarque 1.69. Dans ce cadre, on peut considérer l'espace vectoriel $\mathcal{C}_c(X)$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$. Alors, $L^p(\mu)$ est le complété de cet espace.

Démonstration. Définissons S comme dans le théorème 1.67. Pour $s \in S$ et $\varepsilon > 0$, par le théorème 1.41 , le théorème de Lusin, il existe $g \in \mathcal{C}_c(X)$ tel que g et s coïncident sauf sur un ensemble de mesure majorée par ε et, de plus, $\|g\|_\infty \le \|s\|_\infty$. Ainsi, pour $1 \le p < +\infty$, $\|g - s\|_p \le 2\varepsilon^{1/p}\|s\|_\infty$. Le théorème 1.68 est alors un corollaire immédiat du théorème 1.67. $\square$

Corollaire 1.70. *Considérons $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue et $p \in [1, +\infty[$. Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on définit $f_x :\ y \in \mathbb{R}^d \mapsto f(y - x)$. Alors $f_x \underset{|x| \to 0}{\to} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Soit $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. En effet, les supports des fonctions $(g_x - g)_{|x| \le 1}$ sont tous contenu dans un compact fixé et ces fonctions sont majorées par $2\|g\|_\infty$. Par continuité, on a $g_x - g \underset{x \to 0}{\to} 0$ en tout point. Le théorème de convergence dominée nous dit alors que $\|g_x - g\|_p \underset{x \to 0}{\to} 0$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.
Comme $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, cette convergence s'étend à $L^p(\mathbb{R}^d)$. En effet, si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, on a $\|f_x - f\|_p \le \|g_x - g\|_p + 2\|f - g\|_p$. $\square$

Remarque 1.71. Le corollaire 1.70 nous dit que, pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, l'application $x \in \mathbb{R}^d \mapsto f_x \in L^p(\mathbb{R}^d)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.72. Soit X un espace de Hausdorff localement compact. Soit $u :\ X \to \mathbb{C}$. On dit que u *s'annule à l'infini* si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\overline{\{x;\ |u(x)| \ge \varepsilon\}}$ est compact.
L'ensemble des fonctions continues sur X s'annulant à l'infini est noté $\mathcal{C}_0(X)$.

Théorème 1.73. *Si X est un espace de Hausdorff localement compact, alors $\mathcal{C}_0(X)$ est la complétion de $\mathcal{C}_c(X)$ pour la métrique définie par la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}_0(X)$ et $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe K compact tel que $|f(x)| < \varepsilon$ si $x \notin K$. Par le lemme d'Urysohn, il existe $g \in \mathcal{C}_c(X)$ tel que $0 \le g \le 1$ et $g_{|K} = 1$. Donc $h := fg \in \mathcal{C}_c(X)$ et $\|f - h\|_\infty \le \sup_{x \notin K} |(1 - g)(x) f(x)| \le \sup_{x \notin K} |f(x)| \le \varepsilon$. Donc, $\mathcal{C}_c(X)$ est dense dans $\mathcal{C}_0(X)$.

Soit $(f_n)_n$ de Cauchy dans $\mathcal{C}_0(X)$. Alors, pour $x \in X$, $(f_n(x))_n$ est de Cauchy donc converge vers $f(x)$. Comme $(f_n)_n$ de Cauchy pour $\|\cdot\|_\infty$, on a que f_n converge uniformément vers f donc f est continue. Enfin, pour $\varepsilon > 0$, il existe n tel que $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon/2$ et K_n un compact tel que $\forall x \notin K_n$, $|f_n(x)| \leq \varepsilon/2$. Donc, $\forall x \notin K_n$, $|f(x)| \leq \varepsilon$. Ainsi $f \in$ appartient à $\mathcal{C}_0(X)$ qui est donc complet. Ceci complète la preuve du théorème 1.73. $\square$

Remarque 1.74. Remarquons que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$ mais $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \neq L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Chapitre 2

Mesures à valeurs complexes et dérivation de mesures

On s'est pour l'instant intéressé à des mesures positives. On va maintenant considérer des mesures à valeurs complexes ou mesures complexes. Ce passage est analogue au passage des séries à termes positifs aux séries à termes complexes.

2.1 Mesures complexes - Variation totale

Définition 2.1. Soit $\mathcal{S}$ une σ-algèbre sur un espace X.
Une *mesure complexe* sur $(X, \mathcal{S})$ est une application $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ telle que, si $E \in \mathcal{S}$ et $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une partition de E dans $\mathcal{S}$ (i.e. $\forall i$, $E_i \in \mathcal{S}$, $\forall i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ et $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i = E$), on a

$$\mu(E) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i). \tag{2.1}$$

Remarque 2.2. D'abord la définition implique que tout ensemble mesurable est de mesure $\mu(E)$ finie. L'égalité (2.1) requiert implicitement que $\sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu(E_i)| < +\infty$; en effet, pour une partition données, dans la réunion définissant E, on peut réordonner les termes de façon arbitraires. Donc la somme dans le membre de droite de (2.1) doit converger vers la même valeur ce quelque soit la permutation des termes. Ceci impose que la somme converge absolument (voir [5, Théorème 3.56]).

Exercice 2.3. Soient λ une mesure positive sur $(X, \mathcal{S})$ et $h \in L^1(\lambda)$. Pour $E \in \mathcal{S}$, on pose

$$\mu(E) = \int_E h \, d\lambda. \tag{2.2}$$

Montrer que μ est une mesure complexe sur $(X, \mathcal{S})$ que l'on notera $d\mu = h \, d\lambda$.

Définition 2.4. Soit μ une mesure à valeur complexe. On définit sa *variation totale* notée $|\mu| : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ de la façon suivante : pour $E \in \mathcal{S}$, on pose

$$|\mu|(E) = \sup_{(E_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ partition de } E} \sum_{j\in\mathbb{N}} |\mu(E_j)|.$$

Cette définition nous donne immédiatement que

$$\forall E \in \mathcal{S}, \quad |\mu(E)| \leq |\mu|(E). \tag{2.3}$$

Théorème 2.5. *La variation totale d'une mesure complexe μ sur $\mathcal{S}$ est une mesure positive sur $\mathcal{S}$.*

Démonstration. Soit $E \in \mathcal{S}$ et $E = \cup_i E_i$ une partition de E dans $\mathcal{S}$. Pour i tel que $|\mu|(E_i) > 0$, soit $t_i < |\mu|(E_i)$. Ainsi, E_i admet une partition $(A_{ij})_j$ telle que $\sum_j |\mu(A_{ij}| > t_i$. Comme $(A_{ij})_{i,j}$ fournit une partition de E, on a

$$\sum_i t_i \leq \sum_{i,j} |\mu(A_{ij}| \leq |\mu|(E).$$

En faisant $t_i \to |\mu|(E_i)$ pour chaque i tel que $|\mu|(E_i) > 0$, on obtient

$$\sum_i |\mu|(E_i) \leq |\mu|(E). \tag{2.4}$$

Montrons l'inégalité réciproque. Pour cela, soit $(A_j)_j$ une seconde partition de E. Alors, pour i fixé, $(A_j \cap E_i)_j$ est une partition de E_i et pour j fixé, $(A_j \cap E_i)_i$ une partition de A_j. Ainsi

$$\sum_j |\mu(A_j)| = \sum_j \left| \sum_i \mu(A_j \cap E_i) \right| \leq \sum_j \sum_i |\mu(A_j \cap E_i)| = \sum_i \sum_j |\mu(A_j \cap E_i)| \leq \sum_i |\mu|(E_i).$$

Comme ceci vaut pour toute $(A_j)_j$ partition de E, on a

$$|\mu|(E) \leq \sum_i |\mu|(E_i).$$

En se souvenant de (2.4), on voit que $|\mu|$ est σ-additive.
Un calcul trivial donne $|\mu|(\emptyset) = 0$. Ainsi $|\mu|$ est une mesure. □

Théorème 2.6. *Si μ est une mesure complexe sur X, alors $|\mu|(X) < +\infty$.*

Démonstration. On commence par prouver le

Lemme 2.7. *Soient $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes. Alors, il existe $A \subset \{1, \dots, n\}$ tel que*

$$\left| \sum_{j \in A} z_j \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{1 \leq j \leq n} |z_j|.$$

Démonstration. On peut écrire $z_j = |z_j| e^{i\theta_j}$. Pour $-\pi \leq \theta \leq \pi$, soit $A(\theta)$ l'ensemble des j pour lesquels $\cos(\theta_j - \theta) > 0$. Ainsi

$$\left| \sum_{j \in A(\theta)} z_j \right| = \left| \sum_{j \in A(\theta)} e^{-i\theta} z_j \right| \geq \mathrm{Re} \left(\sum_{j \in A(\theta)} e^{-i\theta} z_j \right) = \sum_{j=1}^{N} |z_j| \max(\cos(\theta_j - \theta), 0).$$

On choisit maintenant pour θ la valeur dans $[-\pi, \pi]$ qui maximise la fonction dans le membre de droite de la dernière égalité. La valeur de cette fonction en ce maximum est supérieure à la moyenne de cette fonction sur $[-\pi, \pi]$. On obtient ainsi pour ce θ que, si on pose $A = A(\theta)$ alors

$$\left| \sum_{j \in A} z_j \right| \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} |z_j| \int_{-\pi}^{\pi} \max(\cos(\theta_j - \theta), 0) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \max(\cos(\theta), 0) d\theta \left[\sum_{j=1}^{N} |z_j| \right] = \frac{1}{\pi} \sum_{1 \leq j \leq n} |z_j|.$$

□

Revenons à la preuve du théorème 2.6. Supposons qu'il existe $E \in \mathcal{S}$ tel que $|\mu|(E) = +\infty$. Soit $t = \pi(1+|\mu(E)|)$. Comme $|\mu|(E) > t$, il existe $(E_i)_{i\geq 1}$, une partition de E et un entier N tels que $\sum_{i=1}^{N} |\mu(E_i)| > t$. On peut alors appliquer le lemme 2.7 aux complexes $z_i = \mu(E_i)$, $i = 1, \cdots, N$. Ceci nous donne l'existence d'un ensemble $A \subset E$ (A est réunion de E_i bien choisis) tel que $|\mu(A)| > \dfrac{t}{\pi} > 1$. Mais en posant $B = E \setminus A$, on calcule

$$|\mu(B)| = |\mu(E) - \mu(A)| \geq |\mu(A)| - |\mu(E)| > \frac{t}{\pi} - |\mu(E)| = 1.$$

On a donc partitionné $E = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ où $|\mu(A)| > 1$ et $|\mu(B)| > 1$. Évidemment, on a soit $|\mu|(A) = +\infty$ ou $|\mu|(B) = +\infty$.
On peut maintenant réappliquer le même procédé à celui de A et B qui est de mesure $|\mu|$ infinie. En procédant ainsi, par récurrence, on construit une suite d'ensembles mesurables, disons, $(C_j)_j$ deux à deux disjoints tel que pour tout j, $|\mu(C_j)| > 1$. La σ-additivité de μ nous dit que $\mu(\cup_j C_j) = \sum_j \mu(C_j)$. Mais ceci ne se peut car cette dernière série ne converge évidemment pas. On obtient la contradiction souhaitée pour achever la preuve du théorème 2.6. $\square$

Proposition 2.8. *L'application $\mu \mapsto \|\mu\| := |\mu|(X)$ définit une norme sur l'espace vectoriel des mesures complexes sur $(X, \mathcal{S})$ (muni de ses opérations naturelles).*

Exercice 2.9. Démontrer la proposition 2.8.

Définition 2.10. Pour une mesure réelle μ, on définit ses *variations positive et négative* respectivement comme les mesures positives $\mu^+ = \dfrac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ et $\mu^- = \dfrac{1}{2}(|\mu| - \mu)$.

On a $\mu = \mu^+ - \mu^-$ et $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Cette décomposition est la *décomposition de Jordan* de la mesure μ.

2.2 Absolue continuité

2.2.1 Définitions et premières propriétés

Soient λ une mesure positive et μ une mesure quelconque (positive ou complexe) sur $(X, \mathcal{S})$.
Le but de ce chapitre va être de comparer ces deux mesures, plus précisément, essayer d'en définir le quotient ; ce n'est bien sûr pas toujours possible.
Commençons par introduire quelques définitions.

Définition 2.11. On dit que μ est *absolument continue* par rapport à λ si et seulement si, pour $E \in \mathcal{S}$, $\lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$. On note alors $\mu \ll \lambda$.

Exemple 2.12. Soit λ une mesure positive sur X et $f \in L^1(\lambda)$. Alors la mesure $\mu := f\,d\lambda$ définie par $\mu(E) := \int_E f\,d\lambda$ pour $E \in \mathcal{S}$ est absolument continue par rapport à λ.
En passant des fonction indicatrices d'ensembles mesurable aux fonctions simples puis aux fonctions mesurables positives, on voit que μ est définie par la propriété $\displaystyle\int_X g\,d\mu = \int_X gf d\lambda$ pour toute g mesurable positive ou pour toute g telle que fg est λ-intégrable.

Définition 2.13.
1. S'il existe $A \in \mathcal{S}$ tel que, pour tout $E \in \mathcal{S}$, $\mu(E) = \mu(E \cap A)$, on dit que μ est concentrée sur A. De façon équivalente, on peut demander que $\mu(E) = 0$ dès que $E \cap A = \emptyset$.
2. On dit que μ_1 et μ_2, deux mesures sur $(X, \mathcal{S})$, sont *mutuellement singulières* si elles sont concentrées sur des ensembles disjoints. On note alors $\mu_1 \perp \mu_2$.

Proposition 2.14. *Supposons que λ, μ, μ_1 et μ_2 sont des mesures sur $(X,\mathcal{S})$ et que λ est positive. Alors :*

1. *si μ est concentrée sur A, $|\mu|$ l'est aussi ;*
2. *si $\mu_1 \perp \mu_2$ alors $|\mu_1| \perp |\mu_2|$;*
3. *si $\mu_1 \perp \lambda$ et $\mu_2 \perp \lambda$ alors $\mu_1 + \mu_2 \perp \lambda$;*
4. *si $\mu_1 \ll \lambda$ et $\mu_2 \ll \lambda$ alors $\mu_1 + \mu_2 \ll \lambda$;*
5. *si $\mu \ll \lambda$ alors $|\mu| \ll \lambda$;*
6. *si $\mu_1 \ll \lambda$ et $\mu_2 \perp \lambda$ alors $\mu_1 \perp \mu_2$;*
7. *si $\mu \ll \lambda$ et $\mu \perp \lambda$ alors $\mu = 0$.*

Démonstration. On démontre les propriétés dans l'ordre.

1. Si $E \cap A = \emptyset$ et que $(E_j)_j$ est une partition de E alors $\mu(E_j) = 0$ pour tout j. Ainsi $|\mu|(E) = 0$.
2. Ceci suit immédiatement de 1.
3. Pour $i \in \{1,2\}$, il existe A_i et B_i disjoints tels que μ_i est concentrée sur A_i et λ sur B_i. Ainsi $\mu_1 + \mu_2$ est concentrée sur $A = A_1 \cup A_2$ et λ est concentrée sur $B = B_1 \cap B_2$. Or $A \cap B \subset (A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) = \emptyset$.
4. C'est clair.
5. Si $\lambda(E) = 0$ et que $(E_j)_j$ est une partition de E, alors $\lambda(E_j) = 0$ pour tout j. Comme $\mu \ll \lambda$, on a $\mu(E_j) = 0$ pour tout j. Ainsi $\sum_j |\mu(E_j)| = 0$. On a donc $|\mu|(E) = 0$.
6. Comme $\mu_2 \perp \lambda$, il existe A tel que $\lambda(A) = 0$ et μ_2 concentrée sur A. Comme $\mu_1 \ll \lambda$, pour tout $E \subset A$, $\mu_1(E) = 0$. Ainsi μ_1 est aussi concentrée sur le complémentaire de A.
7. Par le point 6, les hypothèses du point 7 impliquent que $\mu \perp \mu$. Donc $\mu = 0$.

□

2.2.2 Le théorème de Lebesgue-Radon-Nicodym

Ce résultat est le principal de ce chapitre. Il établit la comparaison évoquée ci-dessus.

Théorème 2.15 (Théorème de Lebesgue-Radon-Nicodym)**.** *Soient λ une mesure σ-finie positive et μ une mesure complexe sur $(X,\mathcal{S})$. Alors*

1. *il existe une unique paire de mesures complexes μ_a et μ_s sur $(X,\mathcal{S})$ telles que*

$$\mu = \mu_a + \mu_s, \qquad \mu_a \ll \lambda, \qquad \mu_s \perp \lambda \; ; \tag{2.5}$$

   si μ est positive alors μ_a et μ_s le sont aussi ;

2. *il existe une unique fonction $h \in L^1(\lambda)$ telle que $d\mu_a = hd\lambda$.*

La paire (μ_a, μ_s) est appelée *décomposition de Lebesgue* de μ par rapport à λ. La fonction h est appelée *dérivée de Radon-Nicodym* de μ par rapport à λ.
Le point (2) du théorème 2.15 est appelé Théorème de Radon-Nikodym. Si λ est σ-finie, il démontre que si μ est absolument continue par rapport à λ alors μ est de la forme donnée dans l'exemple 2.12.

Démonstration. Commençons par démontrer l'unicité de la paire (μ_a, μ_s). Supposons que (μ'_a, μ'_s) est une autre paire ayant les mêmes propriétés. Alors $\mu_a - \mu'_a = \mu_s - \mu'_s$. Or $\mu_a - \mu'_a \ll \lambda$ et $\mu_s - \mu'_s \perp \lambda$ donc $\mu_a - \mu'_a = \mu_s - \mu'_s = 0$ par les points 3, 4 et 7 de la proposition 2.14.
Pour démontrer l'existence de la décomposition, on va d'abord se ramener au cas $\lambda(X) < +\infty$ et, pour cela, démontrer le

Lemme 2.16. *Soit λ une mesure positive σ-finie sur une σ-algèbre $\mathcal{S}$ sur un ensemble X. Alors, il existe une fonction $w \in L^1(\lambda)$ telle qu'en tout $x \in X$, on a $0 < w(x) < 1$.*

Démonstration. Comme μ est σ-finie, on peut décomposer $X = \cup_{i\geq 1} E_i$ où $E_i \in \mathcal{S}$ et $\lambda(E_i) < +\infty$. Alors, en utilisant le théorème de convergence monotone, on vérifie que la fonction $w = \sum_{i\geq 1} \frac{1}{2^i(1+\lambda(E_i))} \mathbf{1}_{E_i}$ convient □

Soit λ comme dans l'énonce du théorème 2.15. Avec w choisie comme dans le lemme 2.16, la mesure $d\tilde{\lambda} := w\, d\lambda$ est finie et elle a les mêmes ensembles de mesure nulle que λ c'est-à-dire que $\lambda \ll \tilde{\lambda} \ll \lambda$. En effet, si $\tilde{\lambda}(E) = \int_E w d\lambda = 0$ alors, comme elle est positive, w est nulle λ-presque partout sur E or w ne s'annule nulle part ; c'est donc que $\lambda(E) = 0$.
Soit μ comme dans l'énoncé du théorème 2.15. Commençons par supposer que μ positive et finie. Alors la mesure $d\nu = d\mu + w d\lambda$ est aussi positive et finie. Par définition (voir l'exemple 2.12), pour toute f mesurable positive, on a

$$\int_X f d\nu = \int_X f d\mu + \int_X f\, w\, d\lambda \geq \int_X f d\mu.$$

Comme ν est finie, on sait que $L^2(\nu) \subset L^1(\nu) \subset L^1(\mu)$ (par l'inégalité ci-dessus). Donc si $f \in L^2(\nu)$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on calcule

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f|\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\nu \leq \sqrt{\nu(X)} \|f\|_{L^2(\nu)}.$$

Ainsi l'application linéaire $f \mapsto \int_X f d\mu$ est une forme linaire bornée sur $L^2(\nu)$. Par le théorème de Riesz-Fisher (cf [1, Chapitre 4.4]), il existe $g \in L^2(\nu)$ telle que, pour $f \in L^2(\nu)$, on a

$$\int_X f d\mu = \int_X f g d\nu. \tag{2.6}$$

Remarquons que $g \in L^2(\nu)$ n'est définie que ν-presque partout.
Comme $0 \leq \mu \leq \nu$, en appliquant (2.6) à $f = \mathbf{1}_E$ où $E \in \mathcal{S}$ tel que $\nu(E) > 0$, on obtient

$$0 \leq \frac{1}{\nu(E)} \int_E g\, d\nu = \frac{\mu(E)}{\nu(E)} \leq 1$$

On en déduit que ν-presque partout, on a $0 \leq g \leq 1$. On peut donc supposer sans modifier (2.6) que g est à valeurs dans $[0, 1]$. En se souvenant de $d\nu = d\mu + w d\lambda$, réécrivons (2.6) comme

$$\int_X (1-g) f d\mu = \int_X f\, g\, w\, d\lambda. \tag{2.7}$$

Posons $A := \{x;\ 0 \leq g(x) < 1\}$ et $S := \{x;\ g(x) = 1\}$ et définissons deux mesures μ_a et μ_s par $\mu_a(E) = \mu(A \cap E)$ et $\mu_s(E) = \mu(S \cap E)$ pour $E \in \mathcal{S}$.
Pour $f = \mathbf{1}_S$, le membre de gauche de (2.7) s'annule et celui de droite devient $\int_S w d\lambda$. Comme w est positive et ne s'annule pas, on voit que $\lambda(S) = 0$. Donc $\mu_s \perp \lambda$.
Comme g est bornée, dans (2.7), on peut remplacer f par $(1 + g + \cdots + g^n)\mathbf{1}_E$ pour un entier n arbitraire ce qui nous donne

$$\int_{A\cap E} (1-g^n)\, d\mu = \int_E (1-g^n)\, d\mu = \int_E (1 + g + \cdots + g^n)\, g\, w\, d\lambda. \tag{2.8}$$

Comme en tout point $x \in A$, $g^n(x) \searrow 0^+$ quand $n \to +\infty$, le membre de gauche de (2.8) converge vers $\mu(A \cap E) = \mu_a(E)$.
La suite $((1 + g + \cdots + g^n)\, g\, w)_n$ est positive et croissante ; elle converge donc vers une fonction mesurable positive que l'on notera h. Ainsi, par le théorème de convergence monotone, le membre de gauche de (2.8) converge vers $\int_E h d\lambda$ quand $n \to +\infty$. Pour $E = X$, comme λ_a est finie, on obtient que $h \in L^1(\lambda)$. Ceci prouve le point 2 du théorème 2.15. Mais ce point 2 implique immédiatement que $\mu_a \ll \lambda$ (voir l'exemple 2.12). Ceci achève la preuve du théorème 2.15 quand μ est positive.
Pour μ complexe, on écrit $\mu = \mu_r + i\, \mu_i$ où μ_r et μ_i sont des mesures réelles, puis, on applique la construction précédente aux variations positives et négatives de ces mesures.
Le théorème 2.15 est démontré. □

Remarque 2.17. Si μ est positive et σ-finie, les conclusions du théorème 2.15 pour λ et μ restent presque toutes vraies : simplement, la fonction h n'est plus nécessairement intégrable mais elle est mesurable à valeurs positives. Pour voir cela, on décompose $X = \cup_n X_n$ où $(\mu + \lambda)(X_n) < +\infty$ pour tout n. Sur chaque X_n i.e. pour $\lambda_{|X_n}$ et $\mu_{|X_n}$, on applique le théorème 2.15 pour obtenir h_n sur X_n ; l'unicité nous permet de dire que si $\lambda(X_n \cap X_m) \neq 0$, alors $(h_n)_{|X_n \cap X_m} = (h_m)_{|X_n \cap X_m}$. La famille $(h_n, X_n)_n$ définit donc bien une fonction h positive et mesurable qui vérifie la propriété souhaitée. De plus, elle est également "localement" intégrable au sens où, pour tout n, $\int_{X_n} h\, d\lambda < +\infty$.

Remarque 2.18. On ne peut pas simplement omettre l'hypothèse de σ-finitude sur λ. Par exemple, sur $[0, 1]$ on peut supposer que μ est la mesure de Lebesgue et λ la mesure de comptage (toutes deux sur la σ-algèbre de Lebesgue). Alors μ n'a pas de décomposition de Lebesgue par rapport à λ et, bien que λ soit bornée et $\mu \ll \lambda$, il n'existe pas de fonction $h \in L^1(\mu)$ telle que $d\mu = h d\lambda$.

Théorème 2.19. *Soient λ et μ deux mesures sur $(X, \mathcal{S})$ respectivement positive et complexe. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mu \ll \lambda$
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *tel que* $\sup\limits_{\substack{E \in \mathcal{S} \\ \lambda(E) < \delta}} |\mu|(E) \leq \varepsilon$.

Remarque 2.20. Dans le théorème 2.19, si μ est une mesure positive mais de masse totale infinie, on n'a pas forcément (1) $\Longrightarrow$ (2). On peut par exemple prendre μ égale à la mesure de Lebesgue sur $(0, 1)$ et poser $\mu(E) = \displaystyle\int_E x^{-1} dx$ pour $E \subset (0, 1)$ Lebesgue mesurable.

Démonstration. Supposons 2. Si $\lambda(E) = 0$ alors $\lambda(E) < \delta$ pour tout $\delta > 0$. Donc $|\mu|(E) < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ c'est-à-dire $|\mu|(E) = 0$, soit encore, $\mu(E) = 0$. On obtient donc le point 1.
Supposons que le point 2 est faux. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \geq 1$, $E_n \in \mathcal{S}$ tel que $\lambda(E_n) < 2^{-n}$ et $|\mu|(E_n) > \varepsilon$. Posons

$$\forall n \geq 1, A_n = \bigcup_{m \geq n} E_m \quad \text{et} \quad A = \bigcap_{n \geq 1} A_n.$$

Alors $\lambda(A_n) < 2^{-n+1}$ et $A_{n+1} \subset A_n$. Donc, par convergence monotone $\lambda(A) = 0$ et $|\mu|(A) = \lim\limits_{n \to +\infty} |\mu|(A_n) \geq \varepsilon > 0$ (comme $|\mu|(A_n) \geq |\mu|(E_n)$). Ceci contredit $|\mu| \ll \lambda$ et, en utilisant le point 5 de la proposition 2.14, cela contredit également le point 1.
Ceci achève la preuve du théorème 2.19. □

2.2.3 Conséquences du théorème de Lebesgue-Radon-Nicodym

Les mesures que nous considérons sont σ-finies.