

Série trigonométrique

Définition 3.6. On appelle *série trigonométrique* une expression de la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{int}$ où $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une

suite à valeurs complexes. Les $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont appelés coefficients de la série.

La *série trigonométrique conjuguée* de la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{int}$ est par définition la série trigo-

nométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} -i \operatorname{sgn}(n) a_n e^{int}$.

Une série trigonométrique est un *polynôme trigonométrique* si au plus un nombre fini de ses coefficients sont non nuls. Son degré est alors le maximum des valeurs absolues des indices des coefficients non nuls.

On peut noter que l'ensemble des polynôme trigonométriques est un sous-espace vectoriel $L^1(\mathbb{T})$ stable par la convolution (par le dernier point du Théorème 3.4) et qu'à ce titre, il constitue une sous-algèbre commutative de $(L^1(\mathbb{T}), +, \cdot, *)$.

À une fonction f intégrable sur \mathbb{T} on associe naturellement sa série de Fourier, la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$.

On va maintenant étudier les relations entre f et sa série de Fourier.

3.1.2 Convergence des séries trigonométriques

Définition 3.7. Soit $(k_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions intégrables sur \mathbb{T} . Cette suite est appelée *approximation de l'identité* si elle satisfait

1. $\forall n \geq 0, \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k_n(t) dt = 1,$
2. $\sup_{n \geq 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |k_n(t)| dt < +\infty,$
3. $\forall \delta > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |k_n(t)| dt = 0.$

Théorème 3.8. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $(k_n)_{n \geq 0}$ une approximation de l'identité. Alors $\|f - k_n * f\|_1 \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration. Supposons $\|f\|_1 \neq 0$ sinon il n'y a rien à faire. On calcule

$$(3.3) \quad \begin{aligned} (2\pi)^2 \|f - k_n * f\|_1 &= \int_{\mathbb{T}} \left| \int_{\mathbb{T}} (f(t) - f(t - \tau)) k_n(\tau) d\tau \right| dt \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} |k_n(t)| dt \cdot \sup_{[0, \delta] \cup [2\pi - \delta, 2\pi]} \|f - f_\tau\|_1 + 2\|f\|_1 \int_{\delta}^{2\pi - \delta} |k_n(t)| dt. \end{aligned}$$

Par le corollaire 1.70 l'application $\tau \mapsto \|f - f_\tau\|_1$ est continue en 0 et en 2π (par périodicité de f).

Pour $\varepsilon > 0$, il existe donc $\delta > 0$ tel que $\sup_{[0, \delta] \cup [2\pi - \delta, 2\pi]} \|f - f_\tau\|_1 < \frac{\varepsilon}{2 \sup_{n \geq 0} \int_{\mathbb{T}} |k_n(t)| dt}$ et pour cette valeur

de δ il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $\int_{\delta}^{2\pi - \delta} |k_n(t)| dt < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_1}$.

Ainsi, par (3.3), pour $n \geq n_0$, on a $\|f - k_n * f\|_1 < \varepsilon$. □

Le noyau de Fejér

On définit le noyau de Fejér par

$$(3.4) \quad F_n(t) := \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 = \sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n+1} \right) e^{ijt} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \sum_{k=-j}^j e^{ikt}.$$

La vérification de ces égalités est laissée au lecteur.

Lemme 3.9. $(F_n)_{n \geq 0}$ est une approximation de l'identité.

Le lemme se vérifie aisément. On calcule alors pour $f \in L^1(\mathbb{T})$

$$(3.5) \quad F_n * f(t) = \sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n+1} \right) \hat{f}(j) e^{ijt}.$$

Théorème 3.10 (Théorème d'unicité). Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et que $\hat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $f = 0$.

Démonstration. Par (3.5), si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et que $\hat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $F_n * f = 0$. Donc $f = 0$ par le théorème 3.8. \square

Théorème 3.11 (Lemme de Riemann-Lebesgue). Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Alors $\hat{f}(n) \xrightarrow{|n| \rightarrow +\infty} 0$.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$, On a

$$(3.6) \quad |\hat{f}(n)| \leq |\widehat{F_m * f}(n)| + |\widehat{F_m * f}(n) - \hat{f}(n)| \leq |\widehat{F_m * f}(n)| + \|F_m * f - f\|_1.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Fixons m tel que $\|F_m * f - f\|_1 < \varepsilon$. Or $F_m * f$ est un polynôme trigonométrique de degré au plus m par (3.5), donc si $|n| > m$, on a $|\widehat{F_m * f}(n)| = 0$. Ainsi $|\hat{f}(n)| < \varepsilon$. \square

Soit $K \subset L^1(\mathbb{T})$ compact. Alors, pour $\varepsilon > 0$, il existe P_1, \dots, P_N polynômes trigonométriques tel que $\forall f \in K, \exists j, 1 \leq j \leq N$ tel que $\|f - P_j\|_1 \leq \varepsilon$. Si n est supérieur au $\max_{1 \leq j \leq N} (\deg P_j)$, on a $\sup_{f \in K} |\hat{f}(n)| \leq \varepsilon$. On a donc démontré le

Lemme 3.12 (Lemme de Riemann-Lebesgue uniforme). Soit $K \subset L^1(\mathbb{T})$ compact. Alors

$$(3.7) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{f \in K} |\hat{f}(n)| = 0.$$

Remarque 3.13. Considérons la somme de Fourier partielle d'ordre n de f dans $L^1(\mathbb{T})$ i.e. $[S_n(f)](t) :=$

$$\sum_{j=-n}^n \hat{f}(j) e^{ijt}. \text{ On vérifie}$$

$$F_n * f = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n S_j(f)$$

et

$$S_n(f) = D_n * f \text{ où } D_n(t) := \sum_{j=-n}^n e^{ijt} = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} \text{ est le noyau de Dirichlet.}$$

On notera que $(D_n)_{n \geq 0}$ n'est pas une approximation de l'identité : si la condition 1 de la définition est vérifiée, 2 et 3 ne le sont pas.

Définition 3.14. Un *espace de Banach homogène* sur \mathbb{T} est un sous-espace vectoriel \mathcal{B} de $L^1(\mathbb{T})$ muni d'une norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B}} \geq \|\cdot\|_1$ qui en fait un espace de Banach et tel que

1. si $f \in \mathcal{B}$ et $\tau \in \mathbb{T}$ alors $f_{\tau} \in \mathcal{B}$ et $\|f_{\tau}\|_{\mathcal{B}} = \|f\|_{\mathcal{B}}$;
2. pour $f \in \mathcal{B}$, $\lim_{t \rightarrow 0} \|f_t - f\|_{\mathcal{B}} = 0$.

Remarque 3.15 (Intégration d'une fonction continue à valeurs dans un espace de Banach). Grâce à la condition 1, la condition 2 implique $\lim_{t \rightarrow \tau} \|f_t - f_{\tau}\|_{\mathcal{B}} = 0$ pour $\tau \in \mathbb{T}$. Ainsi l'application $\tau \in \mathbb{T} \mapsto f_{\tau} \in \mathcal{B}$ est continue.

Exemples d'espaces de Banach homogènes :

1. $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, l'espace des fonction continues sur \mathbb{T} muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$;
2. $\mathcal{C}^n(\mathbb{T})$, l'espace des fonction n fois continûment différentiables sur \mathbb{T} muni de sa norme naturelle ;
3. $L^p(\mathbb{T})$ muni de sa norme naturelle pour $1 \leq p < +\infty$.

Notez que $L^{\infty}(\mathbb{T})$ n'est pas un espace de Banach homogène.

Proposition 3.16. Soit \mathcal{B} un espace de Banach homogène sur \mathbb{T} . Soient $g \in L^1(\mathbb{T})$ et $f \in \mathcal{B}$. Alors $f * g \in \mathcal{B}$ et $\|f * g\|_{\mathcal{B}} \leq \|g\|_1 \|f\|_{\mathcal{B}}$.

Démonstration. On peut supposer que $\|f\|_{\mathcal{B}} \neq 0$ sinon il n'y a rien à faire. Le résultat de la proposition découle du cas quand g est la fonction indicatrice d'un intervalle, disons, $g = \mathbf{1}_{[a,b]}$. Comme on a l'égalité $\int_a^b f(t - \tau) d\tau = \int_0^{b-a} f(t - \tau - a) d\tau = \int_0^{b-a} f_a(t - \tau) d\tau$, pour ce cas-là, il suffit pour cela de démontrer le

Lemme 3.17. Pour $a \in [0, 2\pi[$, $t \mapsto I_a(f)(t) = \int_0^a f(t - \tau) d\tau$ est dans \mathcal{B} et satisfait $\|I_a(f)\|_{\mathcal{B}} \leq a \|f\|_{\mathcal{B}}$.

Supposons le lemme 3.17 prouvé et démontrons la proposition 3.16. Pour $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, on commence par montrer que

$$(3.8) \quad f * g(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} g(2\pi k 2^{-n}) \int_{\pi k 2^{-n+1}}^{\pi(k+1)2^{-n+1}} f(t - \tau) d\tau.$$

L'expression ci-dessus converge ponctuellement (par convergence dominée) mais aussi dans L^1 et dans \mathcal{B} ; en effet, pour $m > n$, on calcule

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=0}^{2^m-1} g(2\pi k 2^{-m}) \int_{\pi k 2^{-m+1}}^{\pi(k+1)2^{-m+1}} f(t - \tau) d\tau - \sum_{k=0}^{2^n-1} g(2\pi k 2^{-n}) \int_{\pi k 2^{-n+1}}^{\pi(k+1)2^{-n+1}} f(t - \tau) d\tau \right\|_{\mathcal{B}} \\ &= \left\| \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^{m-n}-1} [g(2\pi k 2^{-n}) - g(2\pi(k 2^{-n} + j 2^{-m}))] \int_{2\pi(k 2^{-n} + j 2^{-m})}^{2\pi(k 2^{-n} + (j+1) 2^{-m})} f(t - \tau) d\tau \right\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^{m-n}-1} 2^{-m} \|f\|_{\mathcal{B}} \sup_{0 \leq \tau \leq 2^{-n}} \|g - g_{\tau}\|_{\infty} = \|f\|_{\mathcal{B}} \sup_{0 \leq \tau \leq 2^{-n}} \|g - g_{\tau}\|_{\infty} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le lemme 3.17 dans la dernière estimation.

Ainsi, la suite $\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} g(2\pi k 2^{-n}) \int_{\pi k 2^{-n+1}}^{\pi(k+1)2^{-n+1}} f(t - \tau) d\tau \right)_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans \mathcal{B} , donc converge dans \mathcal{B} vers la même limite que dans L^1 . On a donc (3.8). D'autre part, comme ci-dessus, on estime

$$\left\| \sum_{k=0}^{2^m-1} g(2\pi k 2^{-m}) \int_{\pi k 2^{-m+1}}^{\pi(k+1)2^{-m+1}} f(t - \tau) d\tau \right\|_{\mathcal{B}} \leq 2^{-m} \sum_{k=0}^{2^m-1} |g(2\pi k 2^{-m})| \|f\|_{\mathcal{B}}$$

Or comme g est continue, par convergence des sommes de Riemann, le membre de droite de l'inégalité ci-dessus converge vers $\|g\|_{L^1}\|f\|_{\mathcal{B}}$. On obtient donc que, pour g continue, $f * g \in \mathcal{B}$ et $\|f * g\|_{\mathcal{B}} \leq \|g\|_1\|f\|_{\mathcal{B}}$. Pour finir la preuve de la proposition 3.16, il suffit d'approcher alors les fonctions intégrables par des fonctions continues. \square

Preuve du lemme 3.17. Rappelons que, pour $f \in \mathcal{B}$, on a $\sup_{\tau' \in \mathbb{T}} \|f_{\tau'} - f_{\tau'+\tau}\|_{\mathcal{B}} = \|f - f_{\tau}\|_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0$. Donc, pour tout $n \geq 1$, il existe $j_n \geq 1$ tel que $\sup_{|\tau| \leq 2^{-j_n}} \|f - f_{\tau}\|_{\mathcal{B}} \leq 2^{-n}\|f\|_{\mathcal{B}}$. On peut prendre la suite $(j_n)_n$ strictement croissante.

On définit la fonction $S_n f = 2^{-j_n} \sum_{0 \leq k \leq a2^{j_n}} f_{k2^{-j_n}}$. Elle est dans \mathcal{B} comme combinaison linéaire de fonctions de \mathcal{B} . De plus, on calcule

$$(3.9) \quad \|S_n f\|_{\mathcal{B}} \leq 2^{-j_n} \sum_{0 \leq k \leq a2^{j_n}} \|f_{k2^{-j_n}}\|_{\mathcal{B}} \leq a2^{j_n} 2^{-j_n} \|f\|_{\mathcal{B}} = a\|f\|_{\mathcal{B}}.$$

D'autre part, on calcule

$$\begin{aligned} \|S_n f - S_{n+1} f\|_{\mathcal{B}} &= \left\| 2^{-j_{n+1}} \sum_{0 \leq k \leq a2^{j_n}} \sum_{0 \leq l \leq 2^{j_{n+1}-j_n}} f_{k2^{-j_n}} - f_{k2^{-j_n} + l2^{-j_{n+1}}} \right\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq 2^{-j_{n+1}} \sum_{\substack{0 \leq k \leq a2^{j_n} \\ 0 \leq l \leq 2^{j_{n+1}-j_n}}} \|f_{k2^{-j_n}} - f_{k2^{-j_n} + l2^{-j_{n+1}}}\|_{\mathcal{B}} = 2^{-j_{n+1}} \sum_{\substack{0 \leq k \leq a2^{j_n} \\ 0 \leq l \leq 2^{j_{n+1}-j_n}}} \|f - f_{l2^{-j_{n+1}}}\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq 2^{-j_{n+1}} a2^{j_n} 2^{j_{n+1}-j_n} 2^{-n} \|f\|_{\mathcal{B}} = a2^{-n} \|f\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la propriété définissant j_n dans la dernière majoration.

On en déduit que $S_n f = S_1 f + \sum_{1 \leq k \leq n-1} S_{k+1} f - S_k f$ converge dans \mathcal{B} (qui est un espace de Banach) vers une

limite notée Sf . Par (3.9), on sait que $\|Sf\|_{\mathcal{B}} \leq a\|f\|_{\mathcal{B}}$. Comme L^1 est un Banach homogène, on sait que Sf est dans L^1 et que $\|Sf\|_{L^1} \leq a\|f\|_{L^1}$. Quand f est une fonction continue, l'approximation de l'intégrale par des sommes de Riemann nous dit que $Sf(t) = \int_0^a f(t - \tau) d\tau$. Comme S est bornée sur L^1 et que les fonctions continues y sont denses, ceci reste vrai pour f dans L^1 donc dans \mathcal{B} . Ceci achève la preuve du lemme 3.17. \square

On en déduit

Théorème 3.18. *Soit \mathcal{B} un espace de Banach homogène et $(k_n)_{n \geq 0}$ une approximation de l'identité. Alors pour $f \in \mathcal{B}$, on a $\|k_n * f - f\|_{\mathcal{B}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.*

Démonstration. Supposons $\|f\|_{\mathcal{B}} \neq 0$ sinon il n'y a rien à faire. On calcule

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \|f - k_n * f\|_{\mathcal{B}} &= \left\| \int_{\mathbb{T}} (f(\cdot) - f(\cdot - \tau)) k_n(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} \|f - f_{\tau}\|_{\mathcal{B}} |k_n(\tau)| d\tau \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} |k_n(t)| dt \cdot \sup_{[0, \delta] \cup [2\pi - \delta, 2\pi]} \|f - f_{\tau}\|_{\mathcal{B}} + 2\|f\|_{\mathcal{B}} \int_{\delta}^{2\pi - \delta} |k_n(t)| dt. \end{aligned}$$

Mutatis mutandis, on conclut comme dans la preuve du théorème 3.8. \square

Corollaire 3.19. Soit \mathcal{B} un espace de Banach homogène contenant les polynômes trigonométriques. Alors l'espace des polynômes trigonométriques dans \mathcal{B} est dense dans \mathcal{B} .

Corollaire 3.20 (Le théorème d'approximation de Weierstrass). Toute fonction continue 2π -périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

Remarque 3.21. D'autres approximations de l'identité :

— le noyau de de la Vallée Poussin :

$$(3.11) \quad V_n(t) = 2F_{2n+1}(t) - F_n(t).$$

— le noyau de Poisson : pour $0 < r < 1$,

$$P(r, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} r^{|j|} e^{ijt} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} = \operatorname{Re} \left(\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} \right).$$

Si $(r_n)_{n \geq 0}$ est une suite à termes positifs tendant vers 1, alors $(P(r_n, t))_{n \geq 0}$ est une approximation de l'identité; en effet

$$P(r, \cdot) * f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} r^{|j|} \hat{f}(j) e^{ijt}.$$

Convergence ponctuelle de $F_n * f$

Théorème 3.22 (Théorème de Fejér). Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $t_0 \in \mathbb{T}$.

1. Si $\lim_{h \rightarrow 0} f(t_0 + h) + f(t_0 - h) =: 2f_0$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ (condition de Fejér) alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (F_n * f)(t_0) = f_0$.
2. Si f est continue en tout point d'un intervalle compact I , $F_n * f$ converge uniformément vers f sur I .
3. Si $f \geq 0$ presque partout alors $F_n * f \geq 0$ presque partout pour tout n .

Remarque 3.23. Clairement le point (3) reste vrai si 0 est remplacé par un réel arbitraire ou si l'inégalité \geq est remplacée par \leq . Ceci suit de la positivité de F_n et de l'égalité 1. de la définition 3.7.

Démonstration. On suppose que la limite $\lim_{h \rightarrow 0} f(t_0 + h) + f(t_0 - h) =: 2f_0$ existe et est finie. Le cas quand elle est infinie se traite de la même manière.

Soit $\delta > 0$. On calcule

$$(3.12) \quad \begin{aligned} F_n * f(t_0) - f_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} F_n(\tau) (f(t_0 - \tau) - f_0) d\tau = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{2\pi - \delta} \right) F_n(\tau) (f(t_0 - \tau) - f_0) d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) F_n(\tau) \left(\frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - f_0 \right) d\tau \end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière égalité on a utilisé la parité de F_n .

Pour $\varepsilon > 0$ fixé on choisi

- $\delta > 0$ tel que, si $|h| \leq \delta$ alors $|f(t_0 + h) + f(t_0 - h) - 2f_0| \leq \varepsilon$,
- puis $n_0 > 0$ tel que pour $n \geq n_0$, $\sup_{t \in [\delta, 2\pi - \delta]} |F_n(t)| dt \leq \varepsilon$.

Par (3.12), pour $n \geq n_0$, on a $|F_n * f(t_0) - f_0| \leq \varepsilon + \varepsilon \|f - f_0\|_{L^1(\mathbb{T})}$. Ceci achève la preuve du point 1. Le point 2. est une conséquence immédiate du calcul précédent et de l'uniforme continuité de f sur I . Enfin le point 3. est une conséquence immédiate de la positivité de F_n . □

Remarque 3.24. Dans la preuve du Théorème de Fejér, on a utilisé que l'approximation de l'identité $(F_n)_{n \geq 0}$ était positive (i.e. pour tout n , la fonction F_n est à valeurs positives), paire et qu'elle vérifie : $\forall \delta > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [\delta, 2\pi - \delta]} |F_n(t)| = 0$ (ce qui est plus fort que point 3. de la définition 3.7).

Corollaire 3.25. Si f est continue en t_0 et si la série de Fourier de f converge en ce point alors sa somme est $f(t_0)$.

On peut affaiblir la condition de Fejér que la limite $\lim_{h \rightarrow 0} f(t_0 + h) + f(t_0 - h) =: 2f_0$ existe. En effet celle-ci implique

$$(3.13) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left| \frac{f(t_0 + \tau) + f(t_0 - \tau)}{2} - f_0 \right| d\tau = 0.$$

Mais cette dernière condition est beaucoup moins restrictive que celle de Fejér : en effet, par le corollaire 1.70, pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on sait que (3.13) est vraie pour presque tout $t_0 \in \mathbb{T}$ si on choisit $f_0 = f(t_0)$.

Théorème 3.26 (Lebesgue). Si (3.13) est vraie alors $F_n * f(t_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f_0$. En particulier, comme les points de Lebesgue sont de mesure totale, $F_n * f$ converge vers f presque partout.

Démonstration. D'après (3.4), comme $\sin(\tau/2) \geq \tau/\pi$ si $0 < \tau < \pi$, on a

$$(3.14) \quad 0 \leq F_n(\tau) \leq \min \left(n + 1, \frac{\pi^2}{(n + 1)\tau^2} \right).$$

Le calcul (3.12) et la positivité de F_n nous donne

$$(3.15) \quad |F_n * f(t_0) - f_0| \leq \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right) F_n(\tau) \left| \frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - f_0 \right| d\tau.$$

La seconde intégrale du membre de droite est alors majorée par

$$(3.16) \quad \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi F_n(\tau) \left| \frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - f_0 \right| d\tau \leq \frac{\pi}{(n + 1)\delta^2} (\|f\|_1 + |f_0|)$$

Ce qui tend vers 0 si on prend par exemple $\delta = n^{-1/4}$.

Pour estimer la première intégrale du membre de droite de (3.15), on pose

$$(3.17) \quad \phi(h) := \int_0^h \left| \frac{f(t_0 + \tau) + f(t_0 - \tau)}{2} - f_0 \right| d\tau.$$

Alors, en utilisant (3.14) et le fait que ϕ est absolument continue (cf section 2.3.3), on estime

$$(3.18) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\delta F_n(\tau) \left| \frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - f_0 \right| d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^\delta \right) F_n(\tau) \left| \frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - f_0 \right| d\tau \\ &\leq \frac{n + 1}{\pi} \phi(1/n) + \frac{\pi}{n + 1} \int_{1/n}^\delta \frac{\phi'(\tau)}{\tau^2} d\tau \\ &\leq \frac{n + 1}{\pi} \phi(1/n) + \frac{\pi}{n + 1} \left[\frac{\phi(\tau)}{\tau^2} \right]_{1/n}^\delta + \frac{2\pi}{n + 1} \int_{1/n}^\delta \frac{\phi(\tau)}{\tau^3} d\tau. \end{aligned}$$

La dernière étape du calcul a consisté en une intégration par partie, licite comme ϕ est absolument continue. L'hypothèse (3.13) nous assure alors que pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon > 0$ tel si $n \geq n_\varepsilon$ et $0 < \tau < \delta = n^{-1/4}$ alors $0 \leq \phi(\tau) \leq \varepsilon\tau$. En remplaçant ceci dans le dernier terme de (3.18), on obtient

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\delta F_n(\tau) \left| \frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - f_0 \right| d\tau \leq \frac{\varepsilon(n+1)}{n} + \frac{\pi\varepsilon n}{n+1} + \frac{2\pi\varepsilon}{n+1} \int_{1/n}^\delta \frac{d\tau}{\tau^2} \leq 4\pi\varepsilon.$$

Ceci achève la preuve du théorème 3.26. □

Corollaire 3.27. *Si la série de Fourier de f intégrable sur \mathbb{T} converge sur un ensemble E de mesure strictement positive, alors elle vaut f presque partout dans E . En particulier, si une série de Fourier converge vers 0 presque partout, alors les coefficients de Fourier sont tous nuls.*

On peut obtenir des résultats de convergence un peu plus fort pour le noyau de Poisson. Pour f intégrable sur \mathbb{T} , on pose

$$\psi(h) := \int_0^h \left(\frac{f(t_0 + \tau) + f(t_0 - \tau)}{2} - f_0 \right) d\tau.$$

En comparant avec (3.17), on constate que $|\psi(h)| \leq \phi(h)$.

Théorème 3.28 (Fatou). *Si $\psi(h) = o(h)$ quand $h \rightarrow 0$ alors $\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) r^{|n|} e^{int_0} = f_0$.*

La preuve qui se fait sur le modèle de celle du théorème 3.26 est laissée au lecteur (voir aussi la section 3.3). On voit en particulier qu'en tout point de Lebesgue (donc presque partout), voir la définition 2.36 et le théorème 2.37, on peut appliquer le théorème 3.28.

3.1.3 Ordre de grandeur des coefficients de Fourier

Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on sait que $\sup_n |\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1$ et $\hat{f}(n) \xrightarrow{|n| \rightarrow +\infty} 0$ par le lemme de Riemann Lebesgue (théorème 3.11). Dans cette section, nous allons nous intéresser à des questions du type

1. peut-on améliorer le lemme de Riemann Lebesgue et obtenir un taux de décroissance minimal pour $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ à l'infini ?
2. toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tendant vers 0 à l'infini est-elle la suite des coefficients de Fourier d'une fonction intégrable ?
3. Comment les propriétés de f (par exemple le fait qu'elle est bornée, continue, dérivable, etc) se reflète-t-il sur la suite $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$?

Les réponses aux questions 1. et 2. sont négatives comme nous le verrons. Pour la question 3. nous aurons des éléments de réponse mais nous verrons qu'en général il n'y a pas de caractérisation nécessaire et suffisante des propriétés de régularité de f par la taille de ses coefficients de Fourier. L'espace de fonctions de carré intégrable est un contre-exemple notable à cet état de fait.

Théorème 3.29. *Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite paire de nombres positif tendant vers 0 à l'infini. Supposons que*

$$(3.19) \quad \forall n > 0, \quad a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n \geq 0.$$

Alors il existe une fonction positive f intégrable sur \mathbb{T} telle que $\forall n \in \mathbb{Z}, \hat{f}(n) = a_n$.

Démonstration. Clairement $\sum_{n \geq 0} (a_n - a_{n+1}) = a_0$; d'autre part par (3.19), la suite $(a_n - a_{n+1})_{n \geq 0}$ est décroissante. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0$. Par conséquent $\sum_{n=1}^N n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) = a_0 - a_N - N(a_N - a_{N+1})$ converge vers a_0 quand $N \rightarrow +\infty$. On pose

$$(3.20) \quad f(t) = \sum_{n \geq 1} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)F_{n-1}(t).$$

Comme $\|F_n\|_1 = 1$ pour tout n , la série (3.20) converge dans L^1 ; étant à termes positifs, sa limite est positive. En utilisant (3.4), on calcule

$$\hat{f}(j) = \sum_{n \geq 1} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\hat{F}_{n-1}(j) = \sum_{n \geq |j|+1} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) = a_{|j|}.$$

Ceci achève la preuve du théorème 3.29. □

Théorème 3.30. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Supposons que $\hat{f}(n) = -\hat{f}(-n) \geq 0, \forall n \geq 0$. Alors $\sum_{n > 0} \frac{1}{n} \hat{f}(n) < +\infty$.*

Démonstration. On a $\hat{f}(0) = 0$. On pose $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$. Alors F est continue sur \mathbb{T} et ses coefficients de Fourier d'indice non nul sont donnés par $\hat{F}(n) = \frac{1}{in} \hat{f}(n)$ (théorème 3.3). Comme F est continue, le théorème de Fejér appliqué pour F en $t_0 = 0$ nous dit que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} 2 \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) \frac{\hat{f}(n)}{n} = i(F(0) - \hat{F}(0)) = -i\hat{F}(0).$$

Comme $\hat{f}(n) \geq 0$, ceci implique $\sum_{n > 0} \frac{1}{n} \hat{f}(n) < +\infty$. □

Corollaire 3.31. *Si $a_n > 0$ et $\sum a_n/n = +\infty$ alors $\sum a_n \sin nt$ n'est pas la série de Fourier d'une fonction intégrable. Il existe donc des séries trigonométriques dont les coefficients tendent vers 0 qui ne sont pas des séries de Fourier.*

Par le théorème 3.29, la série trigonométrique

$$\sum_{n \geq 2} \frac{\cos nt}{\log n} = \sum_{|n| \geq 2} \frac{e^{int}}{2 \log n}$$

est la série de Fourier d'une fonction intégrable alors que par le théorème 3.30, sa série trigonométrique conjuguée

$$\sum_{n \geq 2} \frac{\sin nt}{\log n} = -i \sum_{|n| \geq 2} \frac{\text{sign}(n)}{2 \log |n|} e^{int}$$

n'en est pas une.

On va maintenant développer quelques résultats simples sur la taille des coefficients de Fourier pour des fonctions ayant diverses propriétés de régularité.

Théorème 3.32. *Soit f absolument continue sur \mathbb{T} alors $\hat{f}(n) = o(n^{-1})$.*

Démonstration. Comme f est absolument continue, par le théorème 2.58, f est dérivable presque partout sur I , f' est Lebesgue intégrable et on a $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau)d\tau$. Donc, pour $n \neq 0$ $\hat{f}(n) = \frac{1}{in} \hat{f}'(n)$ par le Théorème 3.3. Comme, par le Lemme de Riemann-Lebesgue, $\hat{f}'(n) \rightarrow 0$ quand $|n| \rightarrow +\infty$, la preuve est achevée. \square

Si on suppose maintenant que f est k -fois dérivable et que $f^{(k-1)}$ est absolument continue (c'est-à-dire que $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{T})$) alors

$$(3.21) \quad \hat{f}(n) = o(n^{-k}) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Sous les mêmes hypothèses, comme par récurrence pour $0 \leq j \leq k$, on a $\hat{f}(n) = \frac{1}{(in)^j} \hat{f}^{(j)}(n)$, on sait que

$$(3.22) \quad |\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{|n|^j} \|f^{(j)}\|_1.$$

On a donc démontré

Théorème 3.33. *Si f est k -fois dérivable et que $f^{(k-1)}$ est absolument continue alors, pour $n \neq 0$,*

$$|\hat{f}(n)| \leq \min_{0 \leq j \leq k} \frac{1}{|n|^j} \|f^{(j)}\|_1$$

Si f est indéfiniment différentiable, alors

$$|\hat{f}(n)| \leq \inf_{0 \leq j} \frac{1}{|n|^j} \|f^{(j)}\|_1$$

Théorème 3.34. *Si f est de variations bornées (voir la section 2.3.3 et l'exercice 2.57) sur \mathbb{T} alors, pour $n \neq 0$,* $|\hat{f}(n)| \leq \frac{\text{Var}(f)}{\pi|n|}$.

Démonstration. Soit μ la mesure construite dans l'exercice 2.57 à partir de f . Notons que, comme f est périodique, $\int_{\mathbb{T}} d\mu(u) = 0$. En utilisant le théorème de Fubini, on calcule

$$\begin{aligned} |\hat{f}(n)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{-int} f(t) dt \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{0 \leq t \leq 2\pi \\ t \leq u \leq 2\pi}} e^{-int} d\mu(u) dt \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^u e^{-int} dt \right) d\mu(u) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2in\pi} \int_{\mathbb{T}} (1 - e^{-inu}) d\mu(u) \right| \leq \frac{|\mu|(\mathbb{T})}{|n|\pi} = \frac{\text{var}(f)}{|n|\pi}. \end{aligned}$$

\square

Définition 3.35. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. On définit le *module de continuité* de f , noté $\omega(f, \cdot)$ par

$$\text{pour } h \in \mathbb{R}^+, \quad \omega(f, h) = \sup_{|y| \leq h} \|f(\cdot + y) - f(\cdot)\|_{\infty} = \sup_{|y| \leq h} \sup_{\tau \in \mathbb{T}} |f(\tau + y) - f(\tau)|.$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. On définit le *module de continuité intégral* de f , noté $\Omega(f, \cdot)$ par

$$(3.23) \quad \text{pour } h \in \mathbb{R}^+, \quad \Omega(f, h) = \sup_{|y| \leq h} \|f(\cdot + y) - f(\cdot)\|_1 = \sup_{|y| \leq h} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(\tau + y) - f(\tau)| d\tau.$$

On vérifie facilement que si f est continue sur \mathbb{T} , $\Omega(f, h) \leq \omega(f, h)$ pour $h \geq 0$.

Théorème 3.36. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Pour $n \neq 0$, on a $|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2} \Omega \left(f, \frac{\pi}{|n|} \right)$.

Démonstration. Par changement de variable, on calcule

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{int} f(t) dt = \frac{1}{4\pi} \left(\int_{\mathbb{T}} e^{int} f(t) dt - \int_{\mathbb{T}} e^{in(t-\pi/|n|)} f(t) dt \right) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{int} \left(f(t) - f \left(t + \frac{\pi}{|n|} \right) \right) dt.$$

En prenant le module de part et d'autre et en le faisant passer sous le signe intégrale dans le membre de droite, on achève la preuve du résultat énoncé. \square

3.1.4 Séries de Fourier de fonctions de carré intégrable

Théorème 3.37. Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. Alors

1. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt$;
2. $f = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}$ où la convergence est entendue dans le sens de la norme de $L^2(\mathbb{T})$;
3. l'application $f \in L^2(\mathbb{T}) \mapsto (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ est un isomorphisme isométrique ;
4. pour $g \in L^2(\mathbb{T})$, on a $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}$.

Démonstration. On sait que $L^2(\mathbb{T})$ muni de la norme $\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt$ est un espace de Hilbert. Un calcul immédiat nous dit que la famille $(e^{in \cdot})_{n \in \mathbb{Z}}$ forme un système orthonormal dans cet espace. Du théorème 3.18, on tire qu'il est total i.e. l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par ce système est total. Le théorème suit alors de résultats classiques sur les espaces de Hilbert et leurs bases hilbertiennes. On pourra consulter le chapitre 4 du polycopié du cours d'Analyse Fonctionnelle de L3 3M210. \square

On en déduit immédiatement le

Corollaire 3.38. Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. Alors il existe \tilde{f} une unique fonction de $L^2(\mathbb{T})$ ayant pour série de Fourier la série conjuguée de celle de f (voir la définition 3.6). L'application $f \in L^2(\mathbb{T}) \mapsto \tilde{f} \in L^2(\mathbb{T})$ est continue de norme 1.

3.1.5 Série de Fourier sur $L^p(\mathbb{T})$

Théorème 3.39 (Th. de Hausdorff-Young). Soit $1 < p \leq 2$ et q l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si

$$f \in L^p(\mathbb{T}) \text{ alors } \left\| (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \right\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} \leq \|f\|_p.$$

Remarque 3.40. Ce théorème ne peut pas s'étendre à $p > 2$: dans ce cas, si $f \in L^p(\mathbb{T})$, comme $L^p(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ si $p \geq 2$, on obtient seulement que les coefficients de Fourier de f sont de carré sommable. Ceci est optimal car on peut montrer que si $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est positive de carré sommable alors il existe une fonction continue telle que $|\hat{f}(n)| \geq c_n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

3.1.6 Coefficients de Fourier “généralisés”

On va maintenant étendre la notion de coefficient de Fourier au delà de l'espace $L^1(\mathbb{T})$. Soit \mathcal{B} un espace de Banach homogène contenant les polynômes trigonométriques. Soit \mathcal{B}^* son dual i.e. l'espace des formes linéaires continues sur \mathcal{B} . La norme naturelle sur \mathcal{B}^* définie par $\|\mu\|_{\mathcal{B}^*} = \sup_{b \in \mathcal{B} \setminus \{0\}} \frac{|\mu(b)|}{|b|}$ le munit d'une structure d'espace de Banach (cours d'Analyse Fonctionnelle de M1). Posons maintenant $\langle \mu, b \rangle = \mu(b)$. Pour $\mu \in \mathcal{B}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, on définit le n -ième coefficient de Fourier de μ comme $\hat{\mu}(n) := \overline{\mu(e^{in})}$. On notera que $\mu \mapsto (\hat{\mu}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est anti-linéaire (alors que $b \in \mathcal{B} \mapsto (\hat{b}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est linéaire). Par définition, on a

$$(3.24) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad |\hat{\mu}(n)| \leq \|\mu\|_{\mathcal{B}^*} \|e^{in}\|_{\mathcal{B}}.$$

Cette définition est cohérente dans le cas où μ s'identifie naturellement avec une fonction intégrable. Par exemple, si $\mathcal{B} = L^p(\mathbb{T})$ ($1 < p < +\infty$). Alors, par le théorème 2.25, $\mathcal{B}^* = L^q(\mathbb{T})$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Une fonction g dans $L^q(\mathbb{T})$ est identifiée à la forme linéaire $f \in L^p(\mathbb{T}) \mapsto \int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{g(t)} dt$. Et l'on a bien que le n -ième coefficient de Fourier de la forme associée à g est le le n -ième coefficient de Fourier de la fonction g .

Théorème 3.41 (Théorème de Parseval). *Soient $f \in \mathcal{B}$ et $\mu \in \mathcal{B}^*$. Alors*

$$(3.25) \quad \langle \mu, f \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \hat{f}(n) \overline{\hat{\mu}(n)}.$$

Démonstration. Pour $P(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{P}(n) e^{int}$, on calcule par linéarité que $\langle \mu, P \rangle = \sum_{n=-N}^N \hat{P}(n) \overline{\hat{\mu}(n)}$.

Par le théorème 3.18, on sait que pour $f \in \mathcal{B}$, $f = \lim_{N \rightarrow +\infty} F_N * f$ dans la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$. Par continuité de μ , la remarque ci-dessus et le calcul explicite des coefficients de Fourier de $F_N * f$, on calcule

$$\langle \mu, f \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N \widehat{F_N * f}(n) \overline{\hat{\mu}(n)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \hat{f}(n) \overline{\hat{\mu}(n)}.$$

□

Exercice 3.42. Si la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{\mu}(n)}$ converge, alors $\langle \mu, f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{\mu}(n)}$.

On déduit du théorème 3.41

Corollaire 3.43. *Si $\forall n \in \mathbb{Z}, \hat{\mu}(n) = 0$ alors $\mu = 0$.*

Pour $f \in \mathcal{B}$ et $\mu \in \mathcal{B}^*$, on peut définir $f * \mu$ de la façon suivante $f * \mu(t) = \langle \mu, f_t \rangle$ (où $f_t(\tau) = f(\tau - t)$). Par la définition 3.14, on sait que $f * \mu$ est une fonction continue. On a alors

$$(3.26) \quad \begin{aligned} F_n * \mu(t) &= \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \overline{\hat{\mu}(-n)} e^{int}, \\ D_n * \mu(t) &= \sum_{n=-N}^N \overline{\hat{\mu}(-n)} e^{int}. \end{aligned}$$