Théorème 2.21 (Décompostion polaire d'une mesure complexe)**.** *Soit μ une mesure complexe sur $(X, \mathcal{S})$. Alors il existe h mesurable telle que $|h(x)| = 1$ pour tout $x \in X$ et $d\mu = h\, d|\mu|$.*

Ce résultat est le pendant pour les mesures complexes de la décomposition polaire des nombres complexes.

Démonstration. On a bien sûr $\mu \ll |\mu|$. Donc le théorème 2.15 garantit l'existence de $h \in L^1(|\mu|)$ telle que $d\mu = h\, d|\mu|$.
Pour $r > 0$, soit $A^r = \{x;\ |h(x)| < r\}$ et soit $(A^r_j)_j$ une partition de A^r. Alors

$$\sum_j |\mu(A^r_j)| = \sum_j \left| \int_{A^r_j} h d|\mu| \right| \leq \sum_j r|\mu|(A^r_j) = r|\mu|(A_r).$$

En maximisant sur les partitions, on obtient que $r|\mu|(A_r) \geq |\mu|(A_r)$. Donc si $r < 1$, $|\mu|(A_r) = 0$. Ainsi $|h| \geq 1$ $|\mu|$-presque partout.
D'autre part, si $|\mu|(E) > 0$, comme $d\mu = h\, d|\mu|$, on a

$$\left| \frac{1}{|\mu|(E)} \int_E h\, d|\mu| \right| = \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leq 1. \tag{2.9}$$

Ainsi $|h| \leq 1$ $|\mu|$-presque partout. En effet, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, $|\mu|(\{1/\varepsilon \geq |h(x)| > 1 + \varepsilon\}) > 0$. On écrit $h(x) = e^{i\theta(x)}|h(x)|$ avec θ mesurable à valeurs dans $[0, 2\pi[$. Ainsi, pour tout $n > 0$, il existe un entier $1 \leq k \leq n$ tel que $|\mu|(E_{n,\varepsilon}) > 0$ où on a posé $E_{n,\varepsilon} := \{1/\varepsilon \geq |h(x)| > 1 + \varepsilon$ et $n\theta(x) \in 2\pi[k-1, k[\}$; alors

$$\frac{1}{|\mu|(E_{n,\varepsilon})} \int_{E_{n,\varepsilon}} h\, d|\mu| = e^{2i\pi k/n} \frac{1}{|\mu|(E_{n,\varepsilon})} \int_{E_{n,\varepsilon}} |h|\, d|\mu| + \frac{1}{|\mu|(E_{n,\varepsilon})} \int_{E_{n,\varepsilon}} |h(x)| \left(e^{i\theta(x)} - e^{2i\pi k/n} \right) d|\mu|.$$

Ainsi, si n est assez grand, on obtient

$$\left| \frac{1}{|\mu|(E_{n,\varepsilon})} \int_{E_{n,\varepsilon}} h\, d|\mu| \right| \geq 1 + \varepsilon - \frac{1}{n\varepsilon} > 1.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, $|\mu|(\{1/\varepsilon \geq |h(x)| > 1 + \varepsilon\}) = 0$. Donc, comme $h \in L^1(|\mu|)$, on a $|h| \leq 1$ $|\mu|$-presque partout.
On voir que, $|\mu|$-presque partout, $|h| = 1$. On peut donc prendre $|h| = 1$ en tout point sans modifier la validité de $d\mu = h\, d|\mu|$. Ceci achève la preuve du théorème 2.21. $\square$

Théorème 2.22. *Soient λ une mesure positive sur $(X, \mathcal{S})$ et $g \in L^1(\lambda)$. Si on pose $d\mu = g\, d\lambda$ alors $d|\mu| = |g|\, d\lambda$.*

Démonstration. Par le théorème 2.21, on peut écrire $d\mu = h\, d|\mu|$ avec $|h| = 1$. Par hypothèse, $d\mu = g\, d\lambda$ et $|\lambda| = \lambda$ (comme λ est positive). Ainsi $d|\mu| = \overline{h}\, d\mu = \overline{h}\, g\, d\lambda$. Or λ et μ sont positives ; donc $\overline{h}g$ est positive λ-presque partout ; comme $|h| = 1$, λ-presque partout, on a $\overline{h}g = |g|$. $\square$

Théorème 2.23 (Décompostion de Hahn)**.** *Soit μ une mesure réelle sur $(X, \mathcal{S})$. Alors il existe deux ensembles A^+ et A^- mesurables tels que $A^+ \cup A^- = X$, $A^+ \cap A^- = \emptyset$ et tels que les variations positives et négatives de μ vérifient $d\mu^+ = \mathbf{1}_{A^+}\, d\mu$ et $d\mu^- = \mathbf{1}_{A^-}\, d\mu$.*

Ce théorème nous dit que l'on peut trouver deux ensembles disjoints tels que l'un porte toute la masse positive de μ et l'autre toute sa masse négative.

Démonstration. Par le théorème 2.21, on écrit $d\mu = h\, d|\mu|$ où $|h| = 1$. Comme μ est réelle, h l'est aussi. Donc h ne prend que les valeurs ± 1. Posons $A^{\pm} = \{x;\ h(x) = \pm 1\}$. Comme $\mu^+ = 1/2(|\mu| + \mu)$ et $[1/2(h+1)]_{|A^+} = 1$ et $[1/2(h+1)]_{|A^-} = 0$, pour $E \in \mathcal{S}$, on a

$$\mu^+(E) = \frac{1}{2}\int_E (1+h)d|\mu| = \int_{E\cap A^+} h d|\mu| = \mu(E \cap A^+).$$

Donc $d\mu^+ = \mathbf{1}_{A^+}\, d\mu$.
Comme $\mu(E) = \mu(E \cap A^+) + \mu(E \cap A^-)$ et comme $\mu = \mu^+ - \mu^-$, on a $d\mu^- = \mathbf{1}_{A^-}\, d\mu$. $\square$

Corollaire 2.24. *Si $\mu = \mu_1 - \mu_2$ où μ_1 et μ_2 sont des mesures positives, alors $\mu_1 \geq \mu^+$ et $\mu_2 \geq \mu^-$.*

On voit ainsi que μ^+ et μ^-, les variations positive et négative de μ, sont minimales parmi toutes les décompositions possibles de μ en différence de deux mesures positives.

Preuve du corollaire 2.24. Supposons que $\mu = \mu_1 - \mu_2$. En conservant les notations du théorème 2.23 et de sa preuve, comme $\mu \leq \mu_1$, on a

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap A^+) \leq \lambda_1(E \cap A^+) \leq \lambda_1(E).$$

Clairement on a $\mu^- = (-\mu)^+$; l'inégalité $\mu_2 \geq \mu^-$ suit. $\square$

Le dual de $L^p(\lambda)$

Soit $1 \leq p \leq \infty$ et λ une mesure positive sur $(X, \mathcal{S})$. Soit q l'exposant conjugué de p i.e. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors, toute fonction $g \in L^q(\lambda)$ fournit une forme linéaire continue (bornée) $\Phi_g :\ L^p(\lambda) \to \mathbb{C}$ définie par

$$\Phi_g(f) = \int_X fg\, d\lambda, \quad \forall f \in L^p(\lambda). \tag{2.10}$$

C'est un corollaire immédiat de l'inégalité de Hölder (proposition 1.46).
Quand $p = 2$, on est dans le cadre hilbertien et on sait que ce résultat a une réciproque : par le théorème de Riesz (cf [1, Chapitre 4.4]), toute forme linéaire continue sur $L^2(\lambda)$ peut être représentée sous la forme (2.10) où $g \in L^2(\lambda)$.
Nous allons maintenant voir que cela reste vrai quand $1 \leq p < +\infty$.

Théorème 2.25 (Le dual de L^p est isométriquement isomorphe à L^q)**.** *Soient $p \in [1, +\infty[$ et λ une mesure σ-finie positive sur X. Soit Φ une forme linéaire continue sur $L^p(\lambda)$. Alors il existe une unique fonctions g dans $L^q(\lambda)$ (où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$) telle que $\Phi = \Phi_g$ définie par (2.10). De plus, on a $\|\Phi\| = \|g\|_q$.*

Démonstration. 1 L'unicité est claire : si on a deux telles fonctions, disons, g et $\tilde{g}$, alors $\displaystyle\int_X f(g - \tilde{g})d\lambda = 0$ pour toute f dans $L^p(\lambda)$; soit E telle que $\lambda(E) < +\infty$ alors la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \mathbf{1}_E \dfrac{\overline{g(x) - \tilde{g}(x)}}{|g(x) - \tilde{g}(x)|} & \text{si } g(x) \neq \tilde{g}(x), \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

est dans $L^q(\lambda)$ et $\int_X f(g - \tilde{g})d\lambda = \int_E |g - \tilde{g}|d\lambda$. Ainsi $g - \tilde{g}$ s'annule sur tout ensemble de mesure finie. Par σ-finitude, elle est nulle.
Pour construire g, commençons par supposer que $\lambda(X) < +\infty$. Pour $E \subset X$ mesurable, on définit $\mu(E) =$

$\Phi(\mathbf{1}_E)$. Comme Φ est linéaire, μ est additive. Montrons qu'elle est σ-additive. Soit E mesurable partitionné en $E = \cup_{j\geq 1} E_j$. Posons $A_k = \cup_{1\leq j\leq k} E_j$. Comme $A_k \subset E$, on a $\|\mathbf{1}_E - \mathbf{1}_{A_k}\|_p = (\lambda(E \setminus A_k))^{1/p} \underset{k\to+\infty}{\to} 0$ par convergence monotone. Comme Φ est continue, on a $\mu(A_k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \mu(E_j) \underset{k\to+\infty}{\to} \mu(E)$. Ainsi μ est σ-additive. Clairement, si $\lambda(E) = 0$ alors $\mu(E) = 0$ (car $\mathbf{1}_E$ est nulle λ-presque partout). Ainsi $\mu \ll \lambda$ et le théorème 2.15 garantit l'existence de $g \in L^1(\lambda)$ telle que pour, tout $E \subset X$ mesurable, on a

$$\Phi(\mathbf{1}_E) = \int_E g\, d\lambda = \int_X \mathbf{1}_E\, g\, d\lambda.$$

Par linéarité, on a

$$\Phi(f) = \int_X fg\, d\lambda. \tag{2.11}$$

si f est simple et mesurable, puis, pour $f \in L^\infty(\lambda)$. En effet, comme toute fonction dans $L^\infty(\lambda)$ est limite uniforme d'une suite de fonctions simples par la remarque 1.42 et que la convergence uniforme implique celle dans $L^p(\lambda)$ comme $\lambda(X) < +\infty$, on obtient l'égalité comme résultat de la continuité de Φ.
On veut maintenant montrer que $g \in L^q(\lambda)$. On va distinguer deux cas selon que $p = 1$ ou $1 < p < +\infty$.
Cas 1 : $p = 1$. Alors, pour $\lambda(E) \in]0, +\infty[$, (2.11) implique, en posant $f(x) = \mathbf{1}_{E\cap\{x; |g(x)>0\}}(x)\overline{g(x)}/|g(x)|$

$$\frac{1}{\lambda(E)} \int_E |g|\, d\lambda = \frac{\phi(f)}{\lambda(E)} \leq \|\Phi\| \frac{\|f\|_1}{\lambda(E)} \leq \|\Phi\| \frac{\|\mathbf{1}_E\|_1}{\lambda(E)} = \|\Phi\|.$$

On a alors que $|g(x)| \leq \|\Phi\|$ presque partout i.e. que $\|g\|_\infty \leq \|\Phi\|$.
Cas 2 : $1 < p < +\infty$. La fonction $\alpha = \mathbf{1}_{\{x;\ g(x)=0\}} + \dfrac{\overline{g(x)}}{|g(x)|} \mathbf{1}_{\{x;\ g(x)\neq 0\}}$ est mesurable et satisfait $|\alpha| = 1$ et $\alpha g = |g|$. Pour $n \geq 1$, on définit $E_n = \{x;\ |g(x)| \leq n\}$ et $f_n = \mathbf{1}_{E_n} |g|^{q-1} \alpha$. Alors $|f_n|^p = |g|^q$ sur E_n, $f_n \in L^\infty(\lambda)$ et (2.11) nous dit que

$$\int_{E_n} |g|^q d\lambda = \int_X f_n\, g\, d\lambda = \Phi(f_n) \leq \|\Phi\| \left(\int_{E_n} |g|^q d\lambda \right)^{1/p}.$$

Ainsi

$$\int_X \mathbf{1}_{E_n} |g|^q d\lambda \leq \|\Phi\|^q.$$

On peut maintenant appliquer le théorème de convergence monotone pour obtenir $\|g\|_q \leq \|\Phi\|$.
On a donc obtenu que $g \in L^q(\lambda)$ et que sa norme satisfait l'égalité annoncée dans le théorème 2.25.
Ceci nous dit que les deux cotés de l'égalité (2.11) sont continues sur $L^p(\lambda)$ mais elles coïncident sur $L^\infty(\lambda)$ qui dense dans $L^p(\lambda)$ (car $\lambda(X) < +\infty$) ; elles coïncident donc sur $L^p(\lambda)$ ce qui achève la preuve du théorème 2.25 quand $\lambda(X) < +\infty$.
Quand $\lambda(X) = +\infty$ et λ σ-finie, on prend $w \in L^1(\lambda)$ comme dans le lemme 2.16. Alors $d\tilde{\lambda} = w\, d\lambda$ est une mesure positive finie sur $\mathcal{S}$. Comme w est strictement positive, l'application $f \mapsto w^{1/p} f$ est une isométrie linéaire de $L^p(\tilde{\lambda})$ à valeurs dans $L^p(\lambda)$. Ainsi $\Psi(\cdot) = \Phi(w^{1/p}\,\cdot)$ est linéaire et bornée sur $L^p(\tilde{\lambda})$ et satisfait $\|\Psi\|_{L^p(\tilde{\lambda})} = \|\Phi\|_{L^p(\lambda)}$. Donc il existe $h \in L^q(\tilde{\lambda})$ telle que $\Psi(f) = \displaystyle\int_X f\, h\, d\tilde{\lambda}$. Posons $g = w^{1/q} h$. Alors

$$\int_X |g|^q\, d\lambda = \int_X |h|^q\, d\tilde{\lambda} = \|\Psi\|^q_{L^p(\tilde{\lambda})} = \|\Phi\|^q_{L^p(\lambda)}.$$

D'autre part, pour $f \in L^p(\lambda)$, on calcule

$$\Phi(f) = \Psi(w^{-1/p} f) = \int_X w^{-1/p}\, f\, h d\tilde{\lambda} = \int_X f\, g\, d\lambda.$$

Ceci complète la preuve du théorème 2.25. $\square$

Remarque 2.26. La construction faite dans la preuve précédente est, dans le cas $p = q = 2$, celle qui a permis la preuve du théorème de Lebesgue-Radon-Nicodym. Et celui-ci est la clé de voûte de la preuve du cas général. La preuve dans le cas $p = 2$ repose elle sur le théorème de représentation de Riesz pour les espaces de Hilbert.

Le théorème de représentation de Riesz : le dual de $\mathcal{C}_0(X)$

Soit X un espace de Hausdorff localement compact. On va maintenant voir le pendant du théorème de représentation de Riesz des fonctionnelles positives (théorème 1.19) dans le cas complexe. Pour pallier le manque de positivité, il est crucial d'ajouter une hypothèse de continuité des formes que l'on veut représenter. On va donc représenter les formes linéaires bornée sur $\mathcal{C}_c(X)$ (muni de la norme uniforme). Comme $\mathcal{C}_0(X)$ est le complété de $\mathcal{C}_c(X)$ pour la norme uniforme, une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_c(X)$ se prolonge de façon unique en une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0(X)$. On travaillera donc sur cet espace.
On dit qu'une mesure borélienne complexe μ est *régulière* si sa variation totale $|\mu|$ l'est (au sens de la définition 1.31).
Clairement, si μ est une mesure de Borel complexe sur X, la forme

$$f \mapsto \int_X f\, d\mu \tag{2.12}$$

est bien définie et continue sur $\mathcal{C}_0(X)$. En effet, par le théorème 2.21, on peut écrire $d\mu = h\, d|\mu|$ où $|h| = 1$; ainsi

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| = \left|\int_X f\, h\, d|\mu|\right| \leq \|f\, h\|_\infty\, |\mu|(X) = |\mu|(X)\, \|f\|_\infty.$$

Voyons maintenant que la réciproque est vraie.

Théorème 2.27 (Le théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit X un espace de Hausdorff localement compact. Alors toute forme linéaire bornée sur $\mathcal{C}_0(X)$, disons, Φ peut être représentée d'une unique manière par une mesure de Borel complexe régulière, disons, μ, au sens où*

$$\Phi(f) = \int_X f d\mu \tag{2.13}$$

pour tout $f \in \mathcal{C}_0(X)$. De plus, on a alors $\|\Phi\| = |\mu|(X)$.

Démonstration. Commençons par démontrer l'unicité. Par linéarité de l'expression (2.13) en μ, il suffit de montrer que, si μ est une mesure de Borel complexe régulière telle que $\int_X f\, d\mu = 0$ pour tout $f \in \mathcal{C}_0(X)$ alors $\mu = 0$. Pour cela, par le théorème 2.21, on décompose $\mu = h|\mu|$ où $|h| = 1$. Pour $f \in \mathcal{C}_0(X)$, on a alors

$$|\mu|(X) = \int_X (\overline{h} - f) h d|\mu| \leq \int_X |\overline{h} - f| h d|\mu|. \tag{2.14}$$

Or $\overline{h} \in L^1(|\mu|)$ (car $|\mu|(X) < +\infty$) et $\mathcal{C}_0(X)$ est dense dans $L^1(|\mu|)$. On peut donc faire tendre f vers $\overline{h}$ dans (2.14) ce qui donne $|\mu|(X) = 0$. Ainsi $|\mu| = 0$ donc $\mu = 0$.
Soit Φ une forme linaire bornée sur $\mathcal{C}_0(X)$. On peut supposer que $\|\Phi\| = 1$. On démontre

Lemme 2.28. *Il existe* Λ*, une forme linéaire positive sur* $\mathcal{C}_c(X)$*, telle que*

$$|\Phi(f)| \le \Lambda(|f|) \le \|f\|_\infty, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(X). \tag{2.15}$$

Supposons ce résultat démontré. Alors, le théorème 1.19 définit une mesure de Borel positive, disons λ qui représente Λ au sens du point 1 de ce théorème. Par le théorème de convergence monotone, comme X localement compact, on sait que $\lambda(X) = \sup\{\Lambda f;\ 0 \le f \le 1,\ f \in \mathcal{C}_c(X)\}$. De (2.15), on tire alors que $\lambda(X) \le 1$ et le théorème 1.19 nous que λ est régulière.
De (2.15), on tire aussi que

$$|\Phi(f)| \le \Lambda(|f|) = \int_X |f|\,d\,\lambda, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(X). \tag{2.16}$$

Comme $\mathcal{C}_c(X)$ est dense dans $L^1(\lambda)$ par le théorème 1.68, on peut prolonger Φ en une forme linéaire bornée sur $L^1(\lambda)$ que l'on appellera aussi Φ dans la suite : en effet, pour $f \in L^1(\lambda)$, on prend $(f_n)_n$ une suite dans $\mathcal{C}_c(X)$ approchant f ; comme $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $L^1(\lambda)$, (2.16) nous dit que $(\Phi(f_n))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc, converge vers, disons, $\Phi(f)$; on voit facilement que $\Phi(f)$ ne dépend pas de la suite utilisée pour approcher f, que $f \mapsto \Phi(f)$ est linéaire et continue sur $L^1(\lambda)$ (grâce à (2.16)).
Comme Φ est continue sur $L^1(\lambda)$, le théorème 2.25 nous dit qu'il existe $g \in L^\infty(\lambda)$ telle que

$$\Phi(f) = \int_X f\,g\,d\lambda, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(X). \tag{2.17}$$

L'inégalité (2.16) nous dit alors que $\|g\|_\infty \le 1$.
Les deux cotés de (2.17) étant continus sur $\mathcal{C}_0(X)$, la densité de $\mathcal{C}_c(X)$ dans $\mathcal{C}_0(X)$ nous dit que (2.17) s'étend aux fonctions f de $\mathcal{C}_0(X)$ ce qui n'est autre que (2.13) si on pose $d\mu = g\,d\lambda$.
Comme $\|\Phi\| = 1$, par (2.17), on sait que

$$\int_X |g| d\lambda \ge \sup\{|\Phi(f)| :\ f \in \mathcal{C}_0(X),\ \|f\|_\infty \le 1\} = 1. \tag{2.18}$$

D'autre part, on sait déjà que $\lambda(X) \le 1$ et $\|g\|_\infty \le 1$. Ainsi (2.18) n'est possible que si $\lambda(X) = 1$ et $|g(x)| = 1$ pour λ-presque tout x. Par le théorème 2.21, on a alors $d|\mu| = |g[\,d\lambda = d\lambda$, donc aussi, $|\mu|(X) = \lambda(X) = 1$.
Pour achever la preuve du théorème 2.27, il ne nous reste donc qu'à démontrer le lemme 2.28.

Preuve du lemme 2.28. Notons $\mathcal{C}_c^+(X)$ l'ensemble des fonctions dans $\mathcal{C}_c(X)$ à valeurs positives. Pour $f \in \mathcal{C}_c^+(X)$, posons alors

$$\Lambda f = \sup\{|\Phi(h)|;\ h \in \mathcal{C}_c(X),\ |h| \le f\}. \tag{2.19}$$

On voit que Λ vérifie (2.15). De plus, clairement $\Lambda f \ge 0$ (ce qui entraîne que $\Lambda f \ge \Lambda g$ pour $f \ge g \ge 0$) et $\Lambda(cf) = c\Lambda f$ si c est un réel positif.
Montrons que Λ est additive i.e. $\Lambda(f+g) = \Lambda\,f + \Lambda\,g$. Soient f et g dans $\mathcal{C}_c^+(X)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $u \in \mathcal{C}_c(X)$ et $v \in \mathcal{C}_c(X)$ tels que $|u| \le f$, $|v| \le g$, $\Lambda f \le |\Phi(u)| + \varepsilon$ et $\Lambda g \le |\Phi(v)| + \varepsilon$. Soit α et β tels que $|\alpha| = |\beta| = 1$ et $\alpha\,\Phi(u) = |\Phi(u)|$ et $\beta\,\Phi(v) = |\Phi(v)|$. Alors

$$\Lambda\,f + \Lambda\,g \le |\Phi(u)| + |\Phi(v)| + 2\varepsilon = \phi(\alpha\,u + \beta\,v) + 2\varepsilon \le \Lambda(|u| + |v|) + 2\varepsilon \le \Lambda(f+g) + 2\varepsilon.$$

En laissant ε tendre vers 0, On obtient donc que Λ est sur-additive i.e. $\Lambda\,f + \Lambda\,g \le \Lambda(f+g)$.
Soit maintenant $h \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $|h| \le f + g$ et $V := \{x;\ f(x) + g(x) > 0\}$. Posons

$$f_1 = \frac{f\,h}{f+g}\mathbf{1}_V \quad \text{et} \quad g_1 = \frac{g\,h}{f+g}\mathbf{1}_V.$$

Clairement f_1 et g_1 sont continues sur X et à support compact. Comme $f_1+g_1=h$ et que $|f_1|\leq f$ et $|g_1|\leq g$, on a

$$|\Phi(h)|=|\Phi(f_1)+\Phi(g_1)|\leq|\Phi(f_1)|+|\Phi(g_1)|\leq\Lambda f+\Lambda g.$$

Par (2.19), on obtient que Λ est sous-additive i.e. $\Lambda(f+g)\leq\Lambda f+\Lambda g$. Ainsi, Λ est additive.
Pour prolonger Λ aux fonctions $f\in\mathcal{C}_c(X)$ à valeurs réelles, comme $f=\frac{1}{2}(|f|+f)-\frac{1}{2}(|f|-f)$ et que $|f|+f$ et $|f|-f$ sont positives et dans $\mathcal{C}_c(X)$, on pose

$$\Lambda f=\frac{1}{2}\Lambda(|f|+f)-\frac{1}{2}\Lambda(|f|-f)$$

En utilisant la propriété d'additivité de Λ pour les fonctions positives, on vérifie alors facilement que si on décompose $f=\tilde{f}_+-\tilde{f}_-$ où $f_\pm$ sont continues positives, alors, on a $\Lambda f=\Lambda\tilde{f}_+-\Lambda\tilde{f}_-$. Ceci entraîne que Λ est $\mathbb{R}$-linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions de $\mathcal{C}_c(X)$ à valeurs réelles.
Enfin, pour $f\in\mathcal{C}_c(X)$ à valeurs complexes, on pose

$$\Lambda f=\Lambda(\mathrm{Re}\,f)+i\Lambda(\mathrm{Im}\,f).$$

On vérifie alors simplement que Λ ainsi définie est $\mathbb{C}$-linéaire sur $\mathcal{C}_c(X)$ et vérifie (2.15) ce qui achève la preuve du lemme 2.28. □

La preuve du théorème 2.27 est donc maintenant complète. □

Exercice 2.29. Soit μ une mesure de Borel positive sur X un espace de Hausdorff localement compact. On considère $j:L^1(d\mu)\to(C_0(X))^*$ définit par $j(f)=fd\mu$, $f\in L^1(d\mu)$.

1. Montrer que j est isométrique.
2. Montrer que j est injective si et seulement si $\mathrm{supp}\,d\mu=X$.

2.3 Différentiation

2.3.1 Dérivée d'une mesure

Le prochain résultat sert à motiver les définitions qui lui font suite.

Théorème 2.30. *Soient λ_1 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et μ une mesure de Borel complexe sur $\mathbb{R}$. On définit F_μ, la fonction de répartition de μ : pour $x\in\mathbb{R}$, $F_\mu(x)=\mu(]-\infty,x[)$.*
Pour $x\in\mathbb{R}$ et $z\in\mathbb{C}$, les deux assertions suivantes sont équivalentes

1. *F_μ est dérivable en x et $F'_\mu(x)=z$*
2. *$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ tel que, pour I intervalle ouvert contenant x, si $0<\lambda_1(I)<\delta$ alors $\left|\dfrac{\mu(I)}{\lambda_1(I)}-z\right|<\varepsilon$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, nous supposons $x=0$ et $z=0$: pour voir cela, on choisit χ une fonction continue à support compact égale à 1 au voisinage de x et on considère la mesure complexe $d\mu-z\,\chi\,d\lambda_1$ que l'on translate de façon à déplacer le point x en 0.
Supposons 1. Si F_μ est dérivable en 0, elle est continue en ce point donc $\mu(\{0\})=0$. D'autre part, si $x<x'<0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{F_\mu(0)-F_\mu(x)}{x}-\frac{F_\mu(0)-F_\mu(x')}{x'}&=(F_\mu(0)-F_\mu(x'))\frac{x'-x}{xx'}+\frac{F_\mu(x')-F_\mu(x)}{x}\\&=(F_\mu(0)-F_\mu(x'))\frac{x'-x}{xx'}+\frac{\mu(\{x\})}{x}+\frac{\mu(]x,x'[)}{x}.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $-\delta < x < x' < 0$, on a

$$\left|\frac{F_\mu(0) - F_\mu(x)}{x}\right| + \left|\frac{F_\mu(0) - F_\mu(x')}{x'}\right| \le \varepsilon/2.$$

Pour tout $x \in]-\delta, 0[$, on peut choisir x' proche de x tel que $|x' - x| + |\mu(]x, x'[)| \le \varepsilon|x|/2$. Ainsi, tout $x \in]-\delta, 0[$, par (2.20), on obtient $\left|\frac{\mu(\{x\})}{x}\right| \le \varepsilon$. On a donc montré que $\frac{\mu(\{x\})}{x} \underset{x\to 0^-}{\to} 0$.
Donc, pour $I =]a, b[\ni 0$, on a

$$\frac{\mu(I)}{\lambda_1(I)} = \frac{\mu(]a,0[) + \mu(]0,b[)}{b-a} = \frac{b}{b-a}\frac{F_\mu(b) - F_\mu(0)}{b} + \frac{a}{b-a}\frac{F_\mu(0) - F_\mu(a)}{a} + \frac{\mu(\{a\})}{a}\frac{a}{b-a}.$$

Or $-1 < a(b-a)^{-1} < 0 < b(b-a)^{-1} < 1$ car $a < 0 < b$. Ainsi

$$\left|\frac{\mu(I)}{\lambda_1(I)}\right| \le \left|\frac{F_\mu(b) - F_\mu(0)}{b}\right| + \left|\frac{F_\mu(0) - F_\mu(a)}{a}\right| + \left|\frac{\mu(\{a\})}{a}\right|.$$

On obtient donc 2.
Réciproquement, supposons 2 vérifié. Alors clairement $\mu(\{0\}) = 0$ et F_μ est continue en 0. Pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{F_\mu(x) - F_\mu(0)}{x} = \begin{cases} \frac{\mu([0,x[)}{x} & \text{si } x > 0, \\ \frac{\mu([x,0[)}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Si 2 est vérifié alors on a également 2 où $I =]a, b[$ est remplacé par $]a, b]$, $[a, b[$ ou $[a, b]$; pour voir cela par exemple pour $[a, b]$, on calcule pour $[a, b] \subset]a', b'[$

$$\frac{\mu(]a',b'[)}{\lambda_1(]a',b'[)} - \frac{\mu([a,b])}{\lambda_1([a,b])} = \frac{\mu(]a',b'[)}{b'-a'} - \frac{\mu([a,b])}{b-a} = \frac{\mu(]a',a[\cup]b,b'[)}{b-a} + \frac{\mu(]a',b'[)}{b'-a'}\frac{b'-b+a-a'}{b-a} \tag{2.22}$$

Soit $I =]a, b[$ vérifiant 2 (pour $\varepsilon/3$ et δ). Alors on peut choisir $]a', b'[\supseteq [a, b]$ tel que $\lambda_1(]a', b'[) < \delta$, $|\mu(]a', a[\cup]b, b'[)| \le \varepsilon/3(b-a)$ et $(b' - b + a - a') \le (b-a)/3$. Par (2.22), on obtient

$$\left|\frac{\mu([a,b])}{\lambda_1([a,b])}\right| \le \left|\frac{\mu(]a',b'[)}{\lambda_1(]a',b'[)}\right| + \left|\frac{\mu(]a',a[\cup]b,b'[)}{b-a}\right| + \left|\frac{\mu(]a',b'[)}{b'-a'}\right|\left|\frac{b'-b+a-a'}{b-a}\right| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

De la même façon, on voit que si l'on prend $a = 0$ ou $b = 0$ (et $a \neq b$) dans 2, la conclusion reste vraie pour des intervalles I de la forme $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ ou $[a, b]$. Ceci nous dit que le quotient défini en (2.21) tend vers 0 quand x tend vers 0. Ainsi F_μ est dérivable en 0 et sa dérivée y est nulle.
Le théorème 2.30 est démontré. □

Le théorème 2.30 suggère de définir la dérivée de la mesure μ en x comme la limite de $\mu(I)/\lambda(I)$ quand l'intervalle I rétrécit vers le point x. En dimension plus grande, la généralisation naturelle est de comparer les mesures sur des voisinages symétriques d'un point.

Définition 2.31. Soit μ une mesure de Borel complexe sur $\mathbb{R}^d$. On rappelle que λ_d est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

1. La *dérivée symétrique* de μ en $x \in \mathbb{R}^d$ est définie, quand celle-ci existe, comme la limite

$$D\mu(x) := \lim_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\lambda_d(B(x,r))}. \tag{2.23}$$

2. La *fonction maximale* de μ en $x \in \mathbb{R}^d$ est définie comme $M\mu(x) := \sup_{r>0} \dfrac{|\mu|(B(x,r))}{\lambda_d(B(x,r))}$.
3. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la *fonction maximale* de f est la fonction maximale de la mesure $f\,d\lambda_d$; elle est notée Mf.

Remarquons que, par définition, $M\mu = M|\mu|$.

Lemme 2.32. *La fonction maximale $M\mu$ est semi-continue inférieurement, donc, mesurable.*

Démonstration. Quitte à la remplacer par $|\mu|$, on peut supposer que μ est positive. Soient $T > 0$ et $E = \{x;\ M\mu(x) > T\}$. Fixons $x \in E$. Alors, il existe $r > 0$ et $t > T$ tel que $\mu(B(x,r)) = t\lambda_d(B(x,r))$ et on peut trouver $\delta > 0$ tel que $(r+\delta)^d < r^d t/T$. Aussi, si $|x-y| < \delta$, on a $B(x,r) \subset B(y, r+\delta)$; par conséquent

$$\mu(B(y,r+\delta)) \geq t\lambda_d(B(x,r)) = t\left[\frac{r}{r+\delta}\right]^d \lambda_d(B(y,r+\delta)) > T\,\lambda_d(B(y,r+\delta)).$$

Donc $B(x,\delta) \subset E$. E est donc ouvert. □

On va commencer par estimer la mesure des ouverts $\{x; M\mu(x) > t\}$.

Théorème 2.33. *Soit μ une mesure de Borel complexe. Alors pour $t > 0$, on a*

$$\lambda_d(\{x; M\mu(x) > t\}) \leq 3^d t^{-1}\|\mu\| \quad \textit{où} \quad \|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R}^d). \tag{2.24}$$

Démonstration. On commence par montrer le

Lemme 2.34. *Soit $W = \bigcup_{1\leq i\leq N} B(x_i, r_i)$. Alors il existe $S \subset \{1,\dots,N\}$ tel que*

1. *les boules $(B(x_i,r_i))_{i\in S}$ sont deux à deux disjointes ;*
2. *$W \subset \bigcup_{i\in S} B(x_i, 3r_i)$;*
3. *$\lambda_d(W) \leq 3^d \sum_{i\in S} \lambda_d(B(x_i,r_i))$.*

Démonstration. On notera $B_i = B(x_i,r_i)$, $1 \leq i \leq N$, les boules composant W. On suppose que leurs rayons sont ordonnés de façon décroissante : $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_N$. Posons $i_1 = 1$. Écartons toutes les boules rencontrant B_{i_1}. Soit B_{i_2} la première qui en est disjointe. Écartons toutes les boules rencontrant B_{i_2} et soit i_3, l'indice de la première boule ne rencontrant ni B_{i_1} ni B_{i_2}. On poursuit ce processus jusqu'à épuisement de la famille de boules considérée (qui est finie). On appelle $S = \{i_1, i_2, \cdots\}$ les indices ainsi construits.
On a clairement 1. D'autre part, chaque boule écartée rencontrant l'une des B_{i_j} est contenue dans $B(x_{i_j}, 3r_{i_j})$. Ceci nous donne 2. Enfin 3 est une conséquence de 2 car $\lambda_d(B(x,3r)) = 3^d\lambda_d(B(x,r))$. □

Fixons μ et t. Soit K un compact de $\{x; M\mu(x) > t\}$. Pour chaque point x de K, il existe une boule B centrée en x telle que $|\mu|(B) > t\lambda_d(B)$. On peut de ce recouvrement de K par des boules ouvertes extraire un recouvrement fini, disons, $K \subset B_1 \cup \cdots \cup B_n$; pour S construit comme dans le lemme 2.34, on a alors

$$\lambda_d(K) \leq 3^d \sum_{i\in S} \lambda_d(B_i) \leq 3^d t^{-1} \sum_{i\in S} |\mu|(B_i) \leq 3^d t^{-1}\|\mu\|.$$

Dans la dernière étape, on a utilisé le fait que les $(B_i)_{1\leq i\leq n}$ sont deux à deux disjointes. On obtient alors (2.24) en prenant le supremum sur les compacts K par la régularité intérieure de la mesure de Lebesgue.
Ceci achève la preuve du théorème 2.33. □

Définition 2.35. Soit f Lebesgue mesurable sur $\mathbb{R}^d$. On dit que f est *faiblement intégrable* ou appartient L^1 *faible* si la fonction $x \mapsto x\,\lambda_d(\{y \in \mathbb{R}^d;\ |f(y)| > x\})$ est bornée sur $]0, +\infty[$.
L'ensemble des fonctions mesurables faiblement intégrables sur $\mathbb{R}^d$ est noté $L^1_w(\mathbb{R}^d)$.

L'inégalité (de Markov)

$$\lambda_d(\{y \in \mathbb{R}^d;\ |f(y)| > x\}) \leq x^{-1}\|f\|_1 \tag{2.25}$$

garantit qu'une fonction intégrable est faiblement intégrable.
Le théorème 2.33 dit lui que l'opérateur maximal i.e. l'application $f \mapsto Mf$ va de $L^1(\mathbb{R}^d)$ dans $L^1_w(\mathbb{R}^d)$: pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et tout $t > 0$, on a

$$\lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d;\ Mf(x) > t\}) \leq 3^d \lambda^{-1}\|f\|_1.$$

2.3.2 Points de Lebesgue

Définition 2.36. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On dit que $x \in \mathbb{R}^d$ est *un point de Lebesgue* de f si

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\lambda_d(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| d\lambda_d(y) = 0. \tag{2.26}$$

Clairement, un point de continuité de f est un point de Lebesgue de f. Mais il n'est pas clair à priori qu'une fonction intégrable ait un point de Lebesgue. Néanmoins on démontre

Théorème 2.37. *Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, presque tout point de $\mathbb{R}^d$ est point de Lebesgue de f.*

Démonstration. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$, on pose

$$(T_r f)(x) = \frac{1}{\lambda_d(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| d\lambda_d(y) \quad \text{et} \quad (Tf)(x) = \limsup_{r\searrow 0} (T_r f)(x). \tag{2.27}$$

On veut donc démontrer que $Tf = 0$ λ_d-presque partout.
Remarquons d'abord que si $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ alors Tg est nulle.
Soit $n \geq 1$. Il existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ telle que si $h = f - g$ alors $\|h\|_1 \leq 1/n$. On calcule

$$(T_r h)(x) \leq \frac{1}{\lambda_d(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |h(y)|\, d\lambda_d(y) + |h(x)|$$

donc en prenant le supremum sur $r > 0$, on obtient $Th \leq Mh + |h|$. Comme $T_r f \leq T_r g + T_r h$, on en déduit $Tf \leq Mh + |h|$. Ainsi pour $y > 0$, on a

$$\{x \in \mathbb{R}^d;\ Tf(x) > 2y\} \subset \{x \in \mathbb{R}^d;\ Mh(x) > y\} \cup \{x \in \mathbb{R}^d;\ |h(x)| > y\} \tag{2.28}$$

Notons $E(y, n)$ la réunion dans le membre de droite de (2.28). Comme $\|h\|_1 < 1/n$, le théorème 2.33 et l'inégalité (2.25) assurent que

$$\lambda_d(E(y,n)) \leq (3^d + 1)\frac{1}{y\,n}. \tag{2.29}$$

Le membre de gauche de (2.28) étant indépendant de n, on a $\{x \in \mathbb{R}^d;\ Tf(x) > 2y\} \subset \bigcap_{n\geq 1} E(y,n)$. Or par (2.29), cette intersection est de mesure de Lebesgue nulle. La mesure de Lebesgue étant complète, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^d;\ Tf(x) > 2y\}$ est mesurable de mesure nulle. Ainsi $\bigcup_{n\geq 1}\{x \in \mathbb{R}^d;\ Tf(x) > 1/n\}$ est de mesure nulle ; donc Tf est nulle presque partout. Le théorème 2.37 est démontré. □