3.1.6 Coefficients de Fourier “généralisés”

On va maintenant étendre la notion de coefficient de Fourier au delà de l'espace $L^1(\mathbb{T})$. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach homogène contenant les polynômes trigonométriques. Soit $\mathcal{B}^*$ son dual i.e. l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{B}$. La norme naturelle sur $\mathcal{B}^*$ définie par $\|\mu\|_{\mathcal{B}^*} = \sup_{b\in\mathcal{B}\setminus\{0\}} \dfrac{|\mu(b)|}{|b|}$ le munit d'une structure d'espace de Banach (cours d'Analyse Fonctionnelle de M1). Posons maintenant $\langle \mu, b\rangle = \overline{\mu(b)}$.
Pour $\mu \in \mathcal{B}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, on définit le n-ième coefficient de Fourier de μ comme $\hat{\mu}(n) := \overline{\mu(e^{in\cdot})}$. On notera que $\mu \mapsto (\hat{\mu}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est anti-linéaire (alors que $b \in \mathcal{B} \mapsto (\hat{b}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est linéaire).
Par définition, on a

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |\hat{\mu}(n)| \le \|\mu\|_{\mathcal{B}^*}\|e^{in\cdot}\|_{\mathcal{B}}. \tag{3.24}$$

Cette définition est cohérente dans le cas où μ s'identifie naturellement avec une fonction intégrable. Par exemple, si $\mathcal{B} = L^p(\mathbb{T})$ $(1 < p < +\infty)$. Alors, par le théorème 2.25, $\mathcal{B}^* = L^q(\mathbb{T})$ où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Une fonction g dans $L^q(\mathbb{T})$ est identifié à la forme linéaire $f \in L^p(\mathbb{T}) \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)}dt$. Et l'on a bien que le n-ième coefficient de Fourier de la forme associée à g est le le n-ième coefficient de Fourier de la fonction g.

Théorème 3.41 (Théorème de Parseval)**.** *Soient $f \in \mathcal{B}$ et $\mu \in \mathcal{B}^*$. Alors*

$$\langle \mu, f\rangle = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \hat{f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)}. \tag{3.25}$$

Démonstration. Pour $P(t) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \hat{P}(n)e^{int}$, on calcule par linéarité que $\langle \mu, P\rangle = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \hat{P}(n)\overline{\hat{\mu}(n)}$.
Par le théorème 3.18, on sait que pour $f \in \mathcal{B}$, $f = \lim_{N\to+\infty} F_N * f$ dans la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$. Par continuité de μ, la remarque ci-dessus et le calcul explicite des coefficients de Fourier de $F_N * f$, on calcule

$$\langle \mu, f\rangle = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{F_N * f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \hat{f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)}.$$

□

Exercice 3.42. Si la série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)}$ converge, alors $\langle \mu, f\rangle = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)}$.

On déduit du théorème 3.41

Corollaire 3.43. *Si $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{\mu}(n) = 0$ alors $\mu = 0$.*

Pour $f \in \mathcal{B}$ et $\mu \in \mathcal{B}^*$, on peut définir $f * \mu$ de la façon suivante $f * \mu(t) = \langle \mu, f_t\rangle$ (où $f_t(\tau) = f(\tau - t)$). Par la définition 3.14, on sait que $f * \mu$ est une fonction continue. On a alors

$$\begin{aligned} F_n * \mu(t) &= \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \overline{\hat{\mu}(-n)}e^{int}, \\ D_n * \mu(t) &= \sum_{n=-N}^{N} \overline{\hat{\mu}(-n)}e^{int}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

L'application $\mathcal{F}_N : \ f \in \mathcal{B} \mapsto F_N * f$ est linéaire bornée de $\mathcal{B}$ dans lui-même ; de même, $\mathcal{F}_N^* : \ \mu \in \mathcal{B}^* \mapsto F_N * \mu$ est linéaire bornée de $\mathcal{B}^*$ dans lui-même. Par le théorème 3.41, $\mathcal{F}_N^*$ est l'adjoint de $\mathcal{F}_N$ i.e. l'unique endomorphisme de $\mathcal{B}^*$ tel que, pour $f \in \mathcal{B}$ et $\mu \in \mathcal{B}^*$, $\langle \mu, \mathcal{F}_N(f) \rangle = \langle \mathcal{F}_n^*(\mu), f \rangle$. Les applications $\mathcal{F}_N$ et $\mathcal{F}_N^*$ ont la même norme (l'une dans $\mathcal{B}$, l'autre dans $\mathcal{B}^*$) qui vaut 1 par la proposition 3.16.
De même, $\mathcal{D}_N^* : \ \mu \in \mathcal{B}^* \mapsto D_N * \mu \in \mathcal{B}^*$ est l'adjoint de . $\mathcal{D}_N : \ f \in \mathcal{B} \mapsto D_N * f \in \mathcal{B}$.

Théorème 3.44. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach homogène contenant les polynômes trigonométriques. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes.*
Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. *il existe $\mu \in \mathcal{B}^*$ telle que $\|\mu\|_{\mathcal{B}^*} \leq C$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{\mu}(n) = a_n$;*
2. *pour tout polynôme trigonométrique P, on a*

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{P}(n) \overline{a_n} \right| \leq C \|P\|_{\mathcal{B}}.$$

Démonstration. L'implication $1 \Rightarrow 2$ est une conséquence immédiate du théorème 3.41, la formule de Parseval.
Supposons 2. Alors l'application $P \mapsto \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{P}(n) \overline{a_n}$ définie sur les polynômes trigonométriques est une forme linéaire continue pour la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{B}}$. Par le corollaire 3.19, elle s'étend à tout l'espace $\mathcal{B}$ en une forme linéaire continue bornée par C ; appelons la $\mu \in \mathcal{B}^*$. Par sa définition sur les polynômes trigonométriques, on a $\hat{\mu}(n) = \overline{\langle \mu, e^{in\cdot} \rangle} = a_n$ □

Corollaire 3.45. *Une série trigonométrique $S \sim \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ est la série de Fourier de μ dans $\mathcal{B}^*$ tel que $\|\mu\|_{\mathcal{B}^*} \leq C$ si et seulement si $\displaystyle\left\| \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) a_n e^{in\cdot} \right\|_{\mathcal{B}^*} \leq C$ pour tout N.*

Remarque 3.46. Les polynômes trigonométriques définissent de façon naturelle des formes linéaires continues sur $\mathcal{B}$. Dans le corollaire précédent on a identifié les polynômes trigonométriques aux formes qu'ils définissent.

Preuve du corollaire 3.45. Soit $S \sim \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ et supposons qu'il existe μ dans $\mathcal{B}^*$ tel que $\|\mu\|_{\mathcal{B}^*} \leq C$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{\mu}(n) = a_n$. Alors $\mathcal{F}_N^*(\mu) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) a_n e^{in\cdot}$. Donc par la discussion suivant le corollaire 3.43, on a $\|\mathcal{F}_N^*(\mu)\|_{\mathcal{B}^*} \leq \|\mu\|_{\mathcal{B}^*} \leq C$.
La réciproque suit du théorème 3.44 et du calcul

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{P}(n) \overline{a_n} = \lim_{N \to +\infty} \left\langle \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) a_n e^{in\cdot}, P \right\rangle$$

où P est un polynôme trigonométrique. □

On va s'intéresser au cas des mesures de Borel sur $\mathbb{T}$. On sait que pour $\mathcal{B} = \mathcal{C}(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions continues, le dual $\mathcal{B}^*$ est l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ des mesures de Borel (complexes finies) sur $\mathbb{T}$ (voir le théorème 2.27) ; on prendra l'identification $\langle \mu, f \rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{T}} \overline{f} \, d\mu$ (qui est une variante de celle prise dans le théorème 2.27).

Les coefficients de Fourier d'une mesure sont appelés coefficients de Fourier-Stieltjes. L'application $f \in L^1(\mathbb{T}) \mapsto (2\pi)^{-1} f(t)dt$ est un injection linéaire isométrique de $L^1(\mathbb{T})$ dans $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ (voir l'exercice 2.29). Elle n'est pas surjective : par exemple, la masse de Dirac δ_0 i.e. la mesure définie par $\langle \delta_0, f\rangle = f(0)$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{T})$. En effet, pour $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions continues bornées par 1 telle que $\mathrm{supp} f_n \subseteq [-1/n, 1/n]$ et $\langle \delta_0, f_n\rangle = f_n(0) = 1$, pour tout $g \in L^1(\mathbb{T})$, on a $\langle g, f_n\rangle \to 0$ (par convergence dominée).
On calcule $\hat{\delta_0}(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On voit que la suite des coefficients de Fourier-Stieltjes de δ_0 ne tend pas vers 0.

Théorème 3.47. *Une série trigonométrique* $S \sim \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ *est la série de Fourier-Stieltjes d'une mesure positive si et seulement si* $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) a_n e^{int} \geq 0$ *pour tout* $N \in \mathbb{N}$ *et* $t \in \mathbb{T}$.

Démonstration. Si $a_n = \hat{\mu}(n)$ pour tout n (où μ est une mesure positive), alors, pour f continue positive

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{F_N * \mu(t)}dt = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \hat{f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)} = \overline{\int_{\mathbb{T}} \overline{F_N * f}\, d\mu} = \langle \mu, F_N * f\rangle \geq 0$$

car $F_N * f \geq 0$.
Comme f est arbitraire continue positive, ceci implique que la fonction continue $F_N * \mu$ est positive.
Réciproquement, si $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) a_n e^{int} \geq 0$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{T}$, on a

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) a_n e^{in\cdot} \right\|_{\mathcal{M}(\mathbb{T})} &= \sup_{\substack{f\in\mathcal{C}(\mathbb{T})\\ \|f\|_\infty=1}} \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) a_n e^{int}\right) f(t)dt \right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) a_n e^{int}\right) dt = a_0.
\end{aligned}$$

Donc par le corollaire 3.45, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite des coefficients de Fourier-Stieltjes d'une mesure borélienne μ. Pour f continue positive, par le théorème 3.41, on a

$$\int_{\mathbb{T}} f d\mu = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \hat{f}(n)\overline{\hat{\mu}(n)} = \lim_{N\to+\infty} \int_{\mathbb{T}} f(t) \left(\sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) a_n e^{int}\right) dt \geq 0.$$

Donc μ est positive. $\square$

Définition 3.48. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite dans $\mathbb{C}$. On dit que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est positive si pour toute suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ nulle exceptée pour un nombre fini d'indices, on a

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} a_{m-n} z_m \overline{z_n} \geq 0. \tag{3.27}$$

Théorème 3.49 (Théorème de Herglotz)**.** *Une suite complexe* $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est positive si et seulement si il existe une mesure borélienne positive* μ *sur* $\mathbb{T}$ *telle que* $\forall n \in \mathbb{Z}$, $a_n = \hat{\mu}(n)$.

Démonstration. Supposons que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $a_n = \hat{\mu}(n)$ pour μ une mesure borélienne positive sur $\mathbb{T}$. Alors

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} a_{m-n} z_m \overline{z_n} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \int_{\mathbb{T}} e^{-i(m-n)t} z_m \overline{z_n} d\mu = \int_T \left| \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-imt} z_m \right|^2 d\mu \geq 0. \tag{3.28}$$

D'autre part, si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est définie positive, pour $N \geq 1$ et $t \in \mathbb{T}$, on pose

$$z_n = \begin{cases} e^{int} & \text{si } |n| \leq N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} a_{m-n} z_m \overline{z_n} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j C_{N,j} e^{ijt}$ où $C_{N,j} = \max(0, 2N+1-|j|)$ i.e. le nombre de façon de décomposer $j = m - n$ avec $|n| \leq N$ et $|m| \leq N$. Donc,

$$\sum_{n=-2N}^{2N} \left(1 - \frac{|n|}{2N+1}\right) a_n e^{int} = \frac{1}{2N+1} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} a_{m-n} z_m \overline{z_n} \geq 0.$$

On obtient l'existence de μ en appliquant le théorème 3.47 et son unicité par le corollaire 3.43. □

3.1.7 Le théorème spectral pour les opérateurs unitaires et auto-adjoints bornés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable sur $\mathbb{C}$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $A : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ un opérateur borné (i.e. un endomorphisme continu) ; on notera $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'espace de Banach des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$ muni de sa norme induite par celle de $\mathcal{H}$). On rappelle que $\mathrm{Ker} A = \{v \in \mathcal{H}; Av = 0\}$ et $\mathrm{Im} A = \{Av; v \in \mathcal{H}\}$. On définit l'adjoint de A, noté A^*, comme l'unique endomorphisme vérifiant $\langle Au, v \rangle = \langle u, A^* v \rangle$ pour tout $(u, v) \in \mathcal{H}^2$. L'existence et l'unicité sont garanties par le théorème de représentation de Riesz.
On vérifie facilement

Lemme 3.50. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. On a*
- $(A^*)^* = A$ *;*
- $\|A\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} = \|A^*\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}}$ *;*
- *Ker* $A^* = (\mathrm{Im}\, A)^\perp$ *et Ker* $A = (\mathrm{Im}\, A^*)^\perp$.

Démonstration. Le premier point est évident par la définition de l'adjoint. Le deuxième est une conséquence de cette définition et de la formule $\|A\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} = \sup\limits_{|u|=|v|=1} |\langle Au, v \rangle|$.

Enfin

$$u \perp \mathrm{Im}\, A \Longleftrightarrow \forall v \in \mathcal{H},\ \langle Av, u \rangle = 0 \Longleftrightarrow \forall v \in \mathcal{H},\ \langle v, A^* u \rangle = 0 \Longleftrightarrow A^* u = 0.$$

Ainsi Ker $A^* = (\mathrm{Im}\, A)^\perp$. Donc, Ker A =Ker $(A^*)^* = (\mathrm{Im}\, A^*)^\perp$. □

dans la suite, pour simplifier les notations, on identifiera l'opérateur identité sur $\mathcal{H}$ avec 1 i.e. pour $z \in \mathbb{C}$, on écrire simplement z à la place de $z\,\mathrm{Id}$.

Définition 3.51. On dit que $z \in \mathbb{C}$ est dans *l'ensemble résolvant* de A, noté $\rho(A)$, si $A - z$ est inversible d'inverse borné sur $\mathcal{H}$. Le *spectre* de A, noté $\rho(A)$, est le complémentaire de l'ensemble résolvant de A i.e. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Lemme 3.52. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.*
Si $z_0 \in \rho(A)$, alors $D(z_0, r_0) := \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < r_0\} \subset \rho(A)$ où $r_0 = \|(A - z_0)^{-1}\|^{-1}$.
L'ensemble $\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{C} \setminus D(0, \|A\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}})$ et l'application $z \in \rho(A) \mapsto (A - z)^{-1}$ est développable en série entière sur $\rho(A)$.

Démonstration. Soit $z_0 \in \rho(A)$. Alors

$$A - z = (A - z_0)\left(1 - (z - z_0)(A - z_0)^{-1}\right).$$

Donc si $|z - z_0| \|(A - z_0)^{-1}\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} < 1$, un inverse de $A - z$ est immédiatement donné par le série de Neuman

$$(A - z)^{-1} = \sum_{n\geq 0} (z - z_0)^n (A - z_0)^{-n-1} \tag{3.29}$$

qui converge normalement (car $\|A^n\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} \leq \|A\|^n_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}}$). Ainsi $D(z_0, r_0) := \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < r_0\} \subset \rho(A)$ où $r_0 = \|(A - z_0)^{-1}\|^{-1}$ et (3.29) nous le développement en série entière annoncé au voisinage de z_0.
Pour $|z| > \|A\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}}$, on utilise le développement de Neuman (au voisinage de l'infini)

$$(A - z)^{-1} = \sum_{n\geq 0} z^{-1-n} A^n$$

qui converge normalement. Donc $\{|z| > \|A\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}}\} \subset \rho(A)$. □

Le lemme 3.52 implique immédiatement que $\sigma(A)$ est fermé dans $\overline{D(0, \|A\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}})}$, donc, compact.

Définition 3.53. On dit que A est *auto-adjoint* si $A^* = A$. On dit que A est *unitaire* si $AA^* = A^*A = 1$.

Les opérateurs auto-adjoints et unitaires sont intimement liés.

Lemme 3.54. *Soit A auto-adjoint sur $\mathcal{H}$. Alors $A - i = (A + i)^*$ est inversible et $U := (A + i)((A + i)^*)^{-1} = (A + i)(A - i)^{-1}$ est unitaire et $1 \in \rho(U)$. U est la transformée de Cayley de A.*
Soit U unitaire sur $\mathcal{H}$ tel que $U - 1$ est inversible d'inverse borné (i.e. $1 \in \rho(U)$). Alors $A := i(U + 1)(U - 1)^{-1}$ est borné et auto-adjoint.

On vérifie que les deux transformations introduites dans le lemme précédent sont l'inverse l'une de l'autre. Le point i ne joue pas de rôle particulier dans la transformation de Cayley : on peut le remplacer par un complexe quelconque hors de la droite réelle. La transformation inverse dépend bien sûr de ce point.

Preuve du lemme 3.54. Soit A auto-adjoint sur $\mathcal{H}$. Montrons que $A - i$ est inversible. Il est injectif car, pour $u \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}\|(A - i)u\|^2 &= \|Au\|^2 + \|u\|^2 - \langle Au, iu\rangle - \langle iu, Au\rangle = \|Au\|^2 + \|u\|^2 - i\langle Au, u\rangle + i\langle Au, u\rangle \\ &= \|Au\|^2 + \|u\|^2.\end{aligned} \tag{3.30}$$

On montre de même que $\mathrm{Ker}(A + i) = \{0\}$.
Il est surjectif. Remarquons qu'il suffit de montrer que $\mathrm{Im}A - i$ est fermée. En effet si c'est le cas alors par le dernier point du lemme 3.50, on sait que $\mathrm{Im}\,(A - i) = (\mathrm{Ker}(A + i))^\perp = \mathcal{H}$.
Soit $v \in \overline{\mathrm{Im}\,(A - i)}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathcal{H}$ tel que $(A - i)u_n \underset{n\to+\infty}{\to} v \in \mathcal{H}$. Alors par (3.30), on a $\|u_n - u_m\|^2 \leq \|(A - i)(u_n - u_m)\|^2$. Donc $(u_n)_n$ est de Cauchy et donc converge vers $u \in \mathcal{H}$. Comme A est borné, on obtient que $(A - i)u = v$. Ainsi $v \in \mathrm{Im}\,(A - i)$. Ainsi $\mathrm{Im}\,(A - i) = \mathcal{H}$.
Vérifions que $U := (A + i)(A - i)^{-1}$ qui est borné comme composé d'opérateurs bornés est unitaire. Comme A est auto-adjoint, $(A \pm i)^* = A \mp i$. D'autre part, $A - i$ et $A + i$ commutent, donc $(A - i)^{-1}$ et $A + i$ aussi. Ainsi

$$UU^* = (A + i)(A - i)^{-1}(A + i)^{-1}(A - i) = (A - i)^{-1}(A + i)(A + i)^{-1}(A - i) = 1.$$

Enfin on calcule $U - 1 = (A + i)(A - i)^{-1} - 1 = 2i(A - i)^{-1}$ ce qui prouve que $U - 1$ est inversible.
Pour la seconde assertion, en utilisant le fait que U est unitaire, on calcule

$$A^* = -i(U^* + 1)(U^* - 1)^{-1} = -i(1 + U)U^*(U^*)^{-1}(1 - U)^{-1} = i(U + 1)(U - 1)^{-1} = A.$$

□

Lemme 3.55. *Soit A auto-adjoint. Alors $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ et, si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a*

$$\|(A - z)^{-1}\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} \leq \frac{1}{|Im\, z|} = \frac{1}{dist(z, \mathbb{R})}. \tag{3.31}$$

Si U est unitaire alors $\sigma(U) \subset \{|z| = 1\}$ et, pour $|z| \neq 1$, on a

$$\|(U - z)^{-1}\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} \leq \frac{1}{||z| - 1|} = \frac{1}{dist(z, \{|z| = 1\})}. \tag{3.32}$$

Démonstration. La démonstration du premier point suit celle de l'inversiblité de $A - i$ dans la preuve du lemme 3.54 et (3.30) devient

$$\|(A - z)u\|^2 = \|Au\|^2 + |\mathrm{Im}\, z|^2\|u\|^2 \geq |\mathrm{Im}\, z|^2\|u\|^2. \tag{3.33}$$

Ainsi $\|u\| \geq |\mathrm{Im}\, z|\|(A - z)^{-1}u\|$.
Soit U unitaire ; donc $\|U\| = 1$. Pour $|z| > 1$, $U - z = z(z^{-1}U - 1)$ est donc inversible par la série de Neuman normalement convergente $(U - z)^{-1} = -\sum_{n\geq 0} z^{-1-n}U^n$. Donc, pour $|z| > 1$,

$$\|(U - z)^{-1}\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} \leq \sum_{n\geq 0} |z|^{-1-n} = \frac{|z|^{-1}}{1 - |z|^{-1}} = \frac{1}{|z| - 1}$$

De même, pour $|z| < 1$, $U - z = U(1 - zU^*)$ est inversible par la série de Neuman normalement convergente $(U - z)^{-1} = -\sum_{n\geq 0} z^n(U^*)^{n+1}$. Donc, pour $|z| < 1$,

$$\|(U - z)^{-1}\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} \leq \sum_{n\geq 0} |z|^{-n} = \frac{1}{1 - |z|}$$

□

Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}$ un sous espace vectoriel.

Définition 3.56. On dit que $\mathcal{E}$ est *invariant* ou *stable* par A linéaire borné si $A\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$.

Lemme 3.57. *Si $\mathcal{E}$ fermé et invariant par U unitaire (resp. A auto-adjoint), alors $U_{|\mathcal{E}} : \ \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est unitaire (resp. $A_{|\mathcal{E}} : \ \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est auto-adjoint) ; de plus $\mathcal{E}^\perp$ est également invariant par U (resp. A) ; ici $\mathcal{E}$ est muni de la structure hilbertienne induite par celle de $\mathcal{H} \supset \mathcal{E}$.*
De plus dans ce cas U (resp. A) se décompose sur la somme directe orthogonale $\mathcal{E} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{E}^\perp$ en $\begin{pmatrix} U_{|\mathcal{E}} & 0 \\ 0 & U_{|\mathcal{E}^\perp} \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} A_{|\mathcal{E}} & 0 \\ 0 & A_{|\mathcal{E}^\perp} \end{pmatrix}$) où $\mathcal{E}^\perp$ est l'orthogonal de $\mathcal{E}$. On a alors que $\sigma(U) = \sigma(U_{|\mathcal{E}}) \cup \sigma(U_{|\mathcal{E}^\perp})$ (resp. $\sigma(A) = \sigma(A_{|\mathcal{E}}) \cup \sigma(A_{|\mathcal{E}^\perp})$).

Démonstration. Si $U\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$, on peut considérer $U_{|\mathcal{E}} : \ \mathcal{E} \to \mathcal{E}$. On a bien sûr, pour $u \in \mathcal{E}$, $\|Uu\|^2 = \|U_{|\mathcal{E}}u\|^2 = \|u\|^2$; donc par l'identité du parallélogramme, pour $(u, v) \in \mathcal{E}^2$

$$\langle (U_{|\mathcal{E}})^*U_{|\mathcal{E}}u, v\rangle = \langle U_{|\mathcal{E}}u, U_{|\mathcal{E}}v\rangle = \langle Uu, Uv\rangle = \langle u, v\rangle.$$

Ainsi $(U_{|\mathcal{E}})^*U_{|\mathcal{E}} = 1$; de même $U_{|\mathcal{E}}(U_{|\mathcal{E}})^* = 1$. De plus on voit que $(U_{|\mathcal{E}})^* = (U^*)_{|\mathcal{E}}$.
De plus, $\mathcal{E}^\perp$ est stable par U ; en effet, si $v \in \mathcal{E}^\perp$, $\forall u \in \mathcal{E}$, $\langle Uv, u\rangle = \langle v, U^*u\rangle = 0$ car $U^*u \in \mathcal{E}$.