Le théorème 2.37 va nous donner accès à beaucoup d'information sur la dérivation de mesures.

Théorème 2.38. *Soit μ une mesure de Borel complexe sur $\mathbb{R}^d$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit f sa dérivée de Radon-Nikodym par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors $D\mu = f$ Lebesgue presque partout ; pour tout borélien E de $\mathbb{R}^d$, on a*

$$\mu(E) = \int_E (D\mu) d\lambda_d. \tag{2.30}$$

Ceci nous dit que la dérivée de Radon-Nicodym d'une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue peut aussi être obtenue par la limite (2.23).

Démonstration. Le théorème 2.19 nous dit que (2.30) est vraie avec $D\mu$ remplacée par $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. En tout point x qui de Lebesgue pour f, on a

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_d(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) d\lambda_d(y) = \lim_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\lambda_d(B(x,r))}.$$

Ainsi, presque partout, $(D\mu)(x)$ existe et vaut $f(x)$. On a donc (2.30). □

Définition 2.39. On dit qu'une suite de boréliens de $\mathbb{R}^d$, disons $(E_j)_{j\geq 0}$, *converge gentiment* vers le point $x \in \mathbb{R}^d$ s'il existe $\alpha > 0$ et une suite de rayons $(r_j)_{j\geq 0}$ réels positifs tendant vers 0 tels que, pour tout $j \geq 0$, $E_j \subset B(x, r_j)$ et $\lambda_d(E_j) \geq \alpha r_j^d$.

Remarque 2.40. Pour qu'une suite converge gentiment vers un point x il n'est pas nécessaire que x soit dans l'un des éléments de la suite, pas même dans l'adhérence de l'un des éléments.

Théorème 2.41. *À tout $x \in \mathbb{R}^d$, associons une suite de boréliens, disons $(E_j(x))_{j\geq 0}$ qui converge gentiment vers le point x. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors, en tout point x qui est de Lebesgue pour f (donc, en particulier, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$), on a*

$$f(x) = \lim_{j\to+\infty} \frac{1}{\lambda_d(E_j(x))} \int_{E_j(x)} f d\lambda_d. \tag{2.31}$$

Démonstration. Soit x un point de Lebesgue de f. Soient $\alpha(x)$ et $B(x, r_i)$ le nombre positif et la boule associés à la suite $(E_i(x))_i$ par la définition 2.39. Comme $E_i(x) \subset B(x, r_i)$, on a

$$0 \leq \frac{\alpha(x)}{\lambda_d(E_i(x))} \int_{E_i(x))} |f(y) - f(x)| d\lambda_d(y) \leq \frac{1}{\lambda_d(B(x, r_i))} \int_{B(x,r_i)} |f(y) - f(x)| d\lambda_d(y).$$

Comme $r_i \to 0$ et que x est un point de Lebesgue de f, le membre de droite de cette inégalité tend vers 0. Le membre de gauche tend aussi vers 0. On a donc démontré (2.31). □

Corollaire 2.42. *Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f\, d\lambda_1$. Alors F est dérivable en tout point de Lebesgue de f et, en ces points, $F'(x) = f(x)$.*

Démonstration. Soit x un point de Lebesgue de f et $(\varepsilon_i)_{i\leq 0}$ une suite strictement positive tendant vers 0. Si on pose $E_i(x) = [x, x + \varepsilon_i]$ (resp. $E_i(x) = [x - \varepsilon_i, x]$), le théorème 2.41 nous dit que la dérivée à droite (resp. gauche) de F en x existe et vaut $f(x)$. On a donc démontré le corollaire. □

Définition 2.43. Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue mesurable. On appelle *densité métrique* de E en $x \in \mathbb{R}^d$ la limite $\lim_{r\to 0} \frac{\lambda_d(E \cap B(x,r))}{\lambda_d(B(x,r))}$ lorsqu'elle existe.

En appliquant le théorème 2.38 à la fonction indicatrice de E, on obtient la

Proposition 2.44. *La densité métrique de E vaut 1 en presque tout point de E et 0 en presque tout point de son complémentaire.*

Remarque 2.45. En considérant $E = \mathbb{Q}$, on voit qu'on ne peut en général pas obtenir l'égalité donnée par la proposition 2.44 en tout point.

Pour l'instant on a étudié les mesures absolument continues par rapport à celle de Lebesgue. Tournons nous vers celles singulières.

Théorème 2.46. *À tout $x \in \mathbb{R}^d$, associons une suite de boréliens, disons $(E_j(x))_{j\geq 0}$ qui converge gentiment vers le point x.*
Soit μ une mesure de Borel complexe telle que $\mu \perp \lambda_d$. Alors, pour Lebesgue presque tout x, on a

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{\mu(E_j(x))}{\lambda_d(E_j(x))} = 0. \tag{2.32}$$

Démonstration. En décomposant μ en ses partie réelle et imaginaire puis en utilisant la décomposition de Jordan de celles-ci (voir le commentaire suivant la définition 2.10), on voit qu'on peut supposer que μ est positive. Dans ce cas, en suivant le preuve du théorème 2.41 et en en conservant les notations, on a

$$\frac{\alpha(x)\,\mu(E_i(x))}{\lambda_d(E_i(x))} \leq \frac{\mu(E_i(x))}{\lambda_d(B(x,r_i))} \leq \frac{\mu(B(x,r_i))}{\lambda_d(B(x,r_i))}.$$

Ainsi, (2.32) sera une conséquence de

$$D\mu(x) = 0 \quad \lambda_d\text{-presque partout} \tag{2.33}$$

que nous allons maintenant démontrer.
Définissons la dérivée supérieur $D^+\mu$ comme

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad D^+\mu(x) = \lim_{n\to+\infty}\left[\sup_{0<r<1/n} \frac{\mu(B(x,r))}{\lambda_d(B(x,r))}\right].$$

C'est une fonction borélienne comme la quantité dans le crochet est semi-continue inférieurement (voir la démonstration du lemme 2.32).
Soit $t > 0$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\mu \perp \lambda_d$, μ est concentrée sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Comme μ est régulière (par le théorème 2.6), il existe K compact tel que $\lambda_d(K) = 0$ et $\mu(K) > \|\mu\| - \varepsilon$.
Soit $\mu_1(E) := \mu(K \cap E)$ pour E borélien. Posons $\mu_2 = \mu - \mu_1$. Alors $\|\mu_2\| \leq \varepsilon$ et pour $x \notin K$, on a $D^+\mu(x) = D^+\mu_2(x) \leq (M\mu_2)(x)$. Ainsi $\{x \in \mathbb{R}^d;\ D^+\mu(x) > t\} \subset K \cup \{x \in \mathbb{R}^d;\ (M\mu_2)(x) > t\}$ et le théorème 2.33 montre que $\lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d;\ D^+\mu(x) > t\}) \leq 3^d t^{-1}\|\mu_2\| \leq 3^d t^{-1}\varepsilon$, ceci pour tout $t > 0$ et $\varepsilon > 0$.
On en déduit que $D^+\mu = 0$, λ_d-presque partout. □

En combinant ce résultat avec le théorème 2.38, on obtient le

Corollaire 2.47. *À tout $x \in \mathbb{R}^d$, associons une suite de boréliens, disons $(E_j(x))_{j\geq 0}$ qui converge gentiment vers le point x. Soit μ une mesure de Borel complexe.*
Si la décomposition de Lebesgue de μ s'écrit $d\mu = f\,d\lambda_d + d\mu_s$ alors, pour Lebesgue presque tout x, on a

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{\mu(E_j(x))}{\lambda_d(E_j(x))} = f(x).$$

En particulier $\mu \perp \lambda_d$ si et seulement si $(D\mu)(x) = 0$ pour Lebesgue presque tout x.

Sur les ensembles qui ne sont pas μ négligeables, $D\mu$ se comporte tout-à-fait différemment comme le montre le

Théorème 2.48. *Si μ une mesure de Borel positive telle que $\mu \perp \lambda_d$ alors $(D\mu)(x) = +\infty$ pour μ-presque tout x.*

Démonstration. Il existe un borélien $S \subset \mathbb{R}^d$ tel que $\lambda_d(S) = 0$ et $\mu(\mathbb{R}^d \setminus S) = 0$. Pour $j \geq 1$, soit $V_j \supset S$ un ouvert tel que $\lambda_d(V_j) < 1/j$.
Pour $n \geq 1$, soit E_n l'ensemble des $x \in S$ pour lesquels il existe une suite de rayons $(r_i)_{i\geq 1} = (r_i(x))_{i\geq 1}$ strictement positifs tendant vers 0 tels que

$$\mu(B(x,r_i)) < n\,\lambda_d(B(x,r_i)). \tag{2.34}$$

Alors, on a $(D\mu)(x) = +\infty$ pour tout $x \in S \setminus \bigcup_{n\geq 1} E_n$. Il suffirait donc de démontrer que $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) = 0$.
Fixons pour l'instant n et j. Tout point E_n est le centre d'une boule ouverte $B_x \subset V_j$ satisfaisant (2.34). Soit β_x la boule de centre x de rayon un tiers celui de B_x. La réunion de ces boules $(\beta_x)_x$ est un ouvert noté $W_{j,n}$ qui contient E_n et qui se trouve dans V_j. On a

Lemme 2.49.

$$\mu(W_{j,n}) < 3^d n/j.$$

Si on pose $\Omega_n = \cap_j W_{j,n}$ alors $E_n \subset \Omega_n$, Ω_n est un G_δ, $\mu(\Omega_n) = 0$ et $(D\mu)(x) = +\infty$ en tout point de $S \setminus \bigcup_{n\geq 1} \Omega_n$ qui est total pour μ. Ceci achève la preuve du théorème 2.48. □

Preuve du lemme 2.49. En effet, soit $K \subset W_{j,n}$ compact. On peut le recouvrir par un nombre finie de β_x. Le lemme 2.34 assure qu'il existe $F \subset E_n$ fini tel que

1. les éléments de $\{\beta_x;\ x \in F\}$ sont deux à deux disjoints,
2. $K \subset \bigcup_{x\in F} B_x$.

Ainsi

$$\mu(K) \leq \sum_{x\in F} \mu(B_x) \leq n \sum_{x\in F} \lambda_d(B_x) = 3^d n \sum_{x\in F} \lambda_d(\beta_x) \leq 3^d\, n\, \lambda_d(V_j) < 3^d n j^{-1}.$$

Ceci prouve le lemme 2.49. □

2.3.3 Primitives et dérivées

On sait que, si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue alors, pour tout nombre complexe $F(a)$, la fonction définie par

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt \tag{2.35}$$

sur $[a,b]$ est continûment dérivable et $F'(x) = f(x)$. F est une primitive de f. Ceci peut aussi s'exprimer par le fait que si F est une fonction continûment dérivable sur $[a,b]$ alors elle est une primitive de sa dérivée. On veut comprendre comment ceci s'étend au cadre de l'intégrale de Lebesgue ; voici quelques questions naturelles que l'on peut se poser :

— pour que F soit une primitive suffit-il de supposer que f est intégrable ?
— si F est continue et dérivable presque partout sur $[a,b]$, a-t-on (2.35) avec $f = F'$.

Remarque 2.50. Deux exemples :

1. Soit $f(x) = x^2 \sin(x^{-2})$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$. Elle est dérivable en tout point mais $\displaystyle\int_0^1 |f'(t)|dt = +\infty$.
2. Supposons F continue sur $[a, b]$, F dérivable presque partout sur $[a, b]$ et F' intégrable. Cela implique-t-il que (2.35) pour $f = F'$?
La réponse est non ! En effet, soit $(\delta_n)_{n\geq 0}$ strictement décroissante à termes positifs. Posons $C_0 = [0, 1]$. Pour $n \geq 0$, si C_n est la réunion de 2^n segments de longueur $2^{-n}\delta_n$, construisons C_{n+1} à partir de C_n en ôtant de chacun de ces segments en leur centre un segment de façon que la partie restante soit la réunion de deux segments de longueur $2^{-n-1}\delta_{n+1}$ (ceci est possible car $\delta_n > \delta_{n+1}$). Alors C_{n+1} est la réunion de 2^{n+1} segments de longueur $2^{-n-1}\delta_{n+1}$.
Alors $C_0 \supset C_1 \supset \cdots \supset C_n \supset \cdots$, $|C_n| = \delta_n$ et si on pose $C = \displaystyle\bigcap_{n\geq 1} C_n$ alors C est compact et $|C| = \lim_{n\to 0} \delta_n$. C est un *ensemble de Cantor*.
On définit alors $f_n :\ x \in [0, 1] \mapsto \int_0^x g_n(t)dt$ où $g_n := \dfrac{1}{\delta_n}\mathbf{1}_{C_n}$. On voit alors que f_n est croissante et constante sur le complémentaire de C_n, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$. D'autre part, si I est l'un des 2^n segments composant C_n, on a $\displaystyle\int_I \mathbf{1}_{C_n}(t)dt = \int_I \mathbf{1}_{C_{n+1}}(t)dt$. Ainsi pour $x \notin C_n$, on a $f_n(x) = f_{n+1}(x)$ et, pour $x \in I$ l'un des segments composant C_n, $|f_n(x)-f_{n+1}(x)| \leq \displaystyle\int_I |g_n-g_{n+1}|(t)dt \leq 2^{-n+1}$. Par le théorème de Dini la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction continue f telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f'(x) = 0$ si $x \notin C$. Ainsi f' s'annule presque partout si $\lim_{n\to 0} \delta_n = 0$.

Définition 2.51. Soient $I := [a, b]$ et $f : I \to \mathbb{C}$. On dit que f est *absolument continue* si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tel que

$$\sum_{j=1}^{n} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| \leq \varepsilon \tag{2.36}$$

pour tout n et toute famille de segments dans I, disons, $]\alpha_1, \beta_1[, \ldots,]\alpha_n, \beta_n[$, deux à deux disjoints vérifiant $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(\beta_j - \alpha_j) \leq \delta$.

Une fonction absolument continue est en particulier continue, la réciproque n'étant pas vraie comme le montre le second exemple de la remarque 2.50. On constate que l'ensemble des fonctions absolument continues sur $[a, b]$ (muni de l'addition et du produit de fonctions ainsi que du produit par un scalaire) forme un sous-algèbre et un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$.
Démontrons d'abord le résultat simple suivant.

Proposition 2.52. *Soit $f \in L^1([a, b])$. Soit $F(a) \in \mathbb{C}$. Si sur $]a, b]$, on définit F par (2.35) alors F est absolument continue sur $[a, b]$.*

Démonstration. Considérons la mesure $d\mu = f\, d\lambda_1$. Comme $\mu \ll \lambda_1$, le théorème 2.19 nous dit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour E mesurable, si $\lambda_d(E) \leq \delta$ alors $|\mu|(E) \leq \varepsilon$. En particulier, en prenant E comme une réunion disjointe dénombrable de segments, on voit que F est absolument continue. □

On va démontrer une réciproque à la proposition 2.52.

Théorème 2.53. *Soient $I := [a, b]$ et $F : I \to \mathbb{R}$ continue croissante. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *F est absolument continue.*

2. L'image par F d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle de I est de mesure de Lebesgue nulle.

3. F est dérivable presque partout sur I, $f := F'$ est Lebesgue intégrable et on a (2.35).

Remarque 2.54. L'hypothèse de continuité est nécessaire pour montrer obtenir les propriétés 1 ou 3 à partir de 2 comme le montre l'exemple suivant : considérer la fonction $F : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = x$ si $x \in [0,1]$ et $F(x) = x + 1$ si $x \in]1,2]$.
On peut noter que la fonction f construite dans le second exemple de la remarque 2.50 envoie l'ensemble de Cantor qui est compact de mesure de Lebesgue nulle sur l'intervalle $[0,1]$. Elle n'est donc pas absolument continue.

Démonstration. La proposition 2.52 dit que 3⇒1. Il suffit donc de montrer 1⇒2⇒3.
On appelle $\mathcal{S}$ la σ-algèbre des sous-ensembles Lebesgue mesurables de $\mathbb{R}$.
Supposons que F est AC sur $I = [a,b]$ et soit $E \subset I$, $E \in \mathcal{S}$ tel que $\lambda_1(E) = 0$. On veut montrer que $F(E) \in \mathcal{S}$ et $\lambda_1(F(E)) = 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\{a,b\} \cap E = \emptyset$.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ associé à F et ε par la définition 2.51. Il existe V ouvert tel que $\lambda_s(V) < \delta$ et $E \subset V \subset I$. Alors $V = \bigcup_{i\geq 1}]\alpha_i, \beta_i[$. Ainsi $\sum_{i\geq 1}(\beta_i - \alpha_i) < \delta$ et donc $\sum_{i\geq 1}(F(\beta_i) - F(\alpha_i)) < \varepsilon$. Comme $E \subset V$, on a $F(E) \subset \bigcup_{i\geq 1}[F(\alpha_i), F(\beta_i)]$. Donc, $F(E)$ est contenu dans un borélien de mesure arbitrairement petite. Il est donc contenu dans un ensemble de mesure nulle. La mesure de Lebesgue étant complète, il est Lebesgue mesurable et de mesure de Lebesgue nulle. Ceci prouve 1⇒2.
Supposons 2 vraie. Soit $G(x) = x + F(x)$ pour $a \leq x \leq b$. Comme elle est continue et strictement croissante, G est bijective bicontinue de $[a,b]$ dans $[G(a), G(b)]$. F étant continue et croissante, elle est surjective de $[a,b]$ dans $[F(a), F(b)]$.

Lemme 2.55. *Comme F satisfait la propriété 2, G la satisfait aussi.*

Démonstration. Montrons cela par la contraposée. Soit E tel que $\lambda_1(E) = 0$ et $\lambda_1(G(E)) > 0$. Il existe donc K compact de $[G(a), G(b)]$ tel que $K \subset G(E)$ et $\lambda_1(K) =: \delta > 0$. Comme ${}^cK$ est ouvert, on a ${}^cK = \bigcup_i]G(\alpha_i), G(\beta_i)[$ où la réunion est dénombrable et disjointe. On calcule donc

$$\lambda_1({}^cK) = G(b) - G(a) - \delta = \sum_i G(\beta_i) - G(\alpha_i). \tag{2.37}$$

On a donc $G({}^cE) =^c G(E) \subset \bigcup_i]G(\alpha_i), G(\beta_i)[$; ainsi ${}^cE \subset \bigcup_i]\alpha_i, \beta_i[$. D'où, comme $\lambda_1(E) = 0$, on voit que $\sum_i \beta_i - \alpha_i = b - a$. Par (2.37) et la définition de G, on a

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) - \delta = \sum_i F(\beta_i) - F(\alpha_i) &\geq \sum_i \lambda_1([F(\alpha_i), F(\beta_i)])) \geq \lambda_1\left(\bigcup_i F([\alpha_i, \beta_i])\right) \\ &\geq \lambda_1\left(F\left(\bigcup_i]\alpha_i, \beta_i[\right)\right) \geq \lambda_1(F({}^cE)). \end{aligned} \tag{2.38}$$

Or comme F est surjective, on a ${}^cF(E) \subset F({}^cE) \subset [F(a), F(b)]$ et comme F satisfait le point 2, on a $\lambda_1({}^cF(E)) = F(b) - F(a) = \lambda_1(F({}^cE))$. Au vu de (2.38), on obtient $F(b) - F(a) - \delta \geq F(b) - F(a)$ ce qui contredit $\delta > 0$. □

Soient $E \subset I$, E mesurable. Comme G est bijective bicontinue de $[a,b]$ dans $[G(a),G(b)]$, on sait que G^{-1} est continue donc mesurable ; ainsi $G(E) = (G^{-1})^{-1}(E)$ est mesurable.
Soit $E \subset [a,b]$, E mesurable. On définit la fonction d'ensemble μ par $\mu(E) := \lambda_1(G(E))$ pour $E \subset I$ mesurable. Comme G est injective, les images par G d'ensembles disjoints sont disjointes. Donc, comme λ_1 est σ-additive, μ l'est aussi. Ainsi μ est une mesure positive bornée ; comme G satisfait 2, elle est absolument continue par rapport à λ_1. Donc, par le théorème de Radon-Nikodym, $d\mu = g\,d\lambda_1$ avec $g \in L^1(I)$ (pour la mesure de Lebesgue).
Pour $E = [a,x]$, on a $G(E) = [G(a),G(x)]$. Ainsi

$$G(x) - G(a) = \lambda_1(G(E)) = \mu(G(E)) = \int_a^x g(t)dt.$$

Comme $G(x) = x + F(x)$, on obtient immédiatement que $F(x) - F(a) = \displaystyle\int_a^x (g(t)-1)dt$ où $g - 1 \in L^1(I)$. Ainsi, par le corollaire 2.42, F est dérivable Lebesgue presque partout et $F'(t) = g - 1$. Ceci prouve 2⇒3 et achève la preuve du théorème 2.53. □

Théorème 2.56. *Soient $I := [a,b]$ et $f : I \to \mathbb{C}$ absolument continue. Pour $x \in I$, on définit*

$$F(x) = \sup_{\substack{N\in\mathbb{N}^* \\ a=t_0<t_1<\cdots<t_N=x}} \sum_{j=1}^N |f(t_j) - f(t_{j-1})| \tag{2.39}$$

Alors les fonctions F, $F+f$ et $F-f$ sont absolument continues sur I.
Si f est à valeurs réelles alors les fonctions F, $F+f$ et $F-f$ sont de plus croissantes.

La fonction F définie par (2.39) est appelée *fonction de variation totale* de f. Pour $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction arbitraire, si $F(b) < +\infty$, on dit que f est *à variation bornée* sur $[a,b]$ et $F(b)$ est alors appelée *la variation totale* de f.

Preuve du théorème 2.56. Vérifions d'abord que F est croissante. Pour $x \le y$ et $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = x$, on a

$$\sum_{j=1}^N |f(t_j) - f(t_{j-1})| \le \sum_{j=1}^N |f(t_j) - f(t_{j-1})| + |f(y) - f(x)| \le F(y). \tag{2.40}$$

En prenant le sup sur les subdivisions, on obtient $F(x) \le F(y)$. Pour montrer que $F(x)$ est finie pour tout x, il suffit de le montrer pour $x = b$. Considérons une partition de $[a,x]$ comme celles intervenant dans (2.39). Par l'inégalité triangulaire, on voit que la somme dans le membre de droite de (2.39) augmente si on raffine la partition i.e. si on y ajoute des points $(t_j)_j$. Choisissons $\delta > 0$ associé à f et $\varepsilon = 1$ par la définition 2.51 et que $\delta < b - a$. On peut ajouter les points $(a + k\delta)_{1\le k\le k_0}$ (où $b - \delta \le a + k_0\delta < b$) à la partition initiale de façon que de façon que l'ensemble des intervalles $\{]t_i,t_{i+1}[; 0 \le i \le N-1\}$ se partitionne en $\{]t_i,t_{i+1}[; 0 \le i \le N-1\} = \displaystyle\bigcup_{1\le j\le m} \{]t_i,t_{i+1}[; i \in I_j\}$ où, pour $1 \le j \le m$, on a $\displaystyle\sum_{i\in I_j} (t_{i+1} - t_i) \le \delta$, Clairement, le nombre total des classes, $k_0 + 1$, est majoré par $(b-a)\delta^{-1} + 1$. On obtient alors que $\displaystyle\sum_{j=1}^N |f(t_j) - f(t_{j-1})| \le (b-a)\delta^{-1} + 1$.
Ainsi $F(b) \le (b-a)\delta^{-1} + 1$.
Par (2.40), en prenant le supremum sur subdivisions on obtient $F(y) \ge |f(y) - f(x)| + F(x)$. Ainsi, si f est à valeurs réelles, on obtient $F(y) \ge -f(y) + F(x) + f(x)$ et $F(y) \ge f(y) + F(x) - f(x)$. Les fonctions $F + f$ et $F - f$ sont donc croissantes.

Il suffit maintenant de montrer que F est absolument continue sur I, les fonctions absolument continues sur I constituant un espace vectoriel.
Soit $]\alpha, \beta[\subset I$. Alors

$$F(\beta) - F(\alpha) = \sup_{\substack{N\in\mathbb{N}^* \\ \alpha=t_0<t_1<\cdots<t_N=\beta}} \sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})|. \tag{2.41}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ associé à f et ε par la définition 2.51. Choisissons des intervalles deux à deux disjoints $((\alpha_j, \beta_j))_{j\geq 1}$ tels que $\sum_{j\geq 1}(\beta_j - \alpha_j) < \delta$. Alors , en utilisant pour chacun des $((\alpha_j, \beta_j))_{j\geq 1}$, la formule (2.41) et notre choix de δ dans la définition 2.51, on obtient $\sum_{j\geq 1}(F(\beta_j) - F(\alpha_j)) < \varepsilon$.
Ainsi F est absolument continue et la preuve du théorème 2.56 complète □

Exercice 2.57. Soit BV l'espace des fonctions sur $[a, b]$ à variation bornée.

1. Montrer que toute fonction à valeurs réelles, monotone sur $[a, b]$ est à variation bornée.
2. Montrer que si $f \in BV$ est à valeurs réelles, alors il existe f_+ et f_- monotones bornées sur $[a, b]$ telles que $f = f_+ - f_-$.
   Indication : on pourra s'inspirer de la preuve du théorème 2.56.
3. Montrer que si $f \in BV$ alors f admet une limite à droite et à gauche en tout point. Au point x, on les notera $f(x \pm 0)$.
4. Montrer que si f est de plus continue à droite, alors dans la décomposition précédente, on peut choisir f_+ et f_- continues à droite.
5. Montrer que si $f \in BV$ est continue à droite en tout point de $[a, b[$, il existe une mesure de Borel sur $[a, b]$, disons, μ_f telle que

   $$f(x) - f(a) = \mu_f([a, x]) \quad \text{pour} \quad x \in [a, b].$$

   μ_f est la mesure de Stieltjes-Lebesgue associée à f.
   Indication : prenons $[a, b] = [0, 1]$; on pourra s'inspirer de la construction de la mesure de Lebesgue et considérer la suite de formes linéaires $(M_n)_{n\geq 1}$ définies par

   $$M_n(\phi) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \big(f((j + 1)2^{-n}) - f(j2^{-n})\big)\, \phi(j2^{-n}), \quad \phi \in \mathcal{C}([0, 1]).$$

   On vérifiera que ces formes linéaires sont continues, que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ converge vers M, une forme linéaire continue que l'on peut par le théorème 2.27 représenter par une mesure complexe μ. On en déduira les propriétés requises sur μ.
6. Vérifier que $|\mu_f|([a, b]) =$var(f).
7. Montrer que F définie en (2.39) est une fonction de répartition (celle continue à gauche) de $|\mu_f|$, la variation totale de μ_f (voir définition 2.4).
8. Montrer que $\mu_f \ll \lambda_1$ si et seulement si f est absolument continue sur $[a, b]$.
9. Montrer que toute $f \in BV$ est dérivable Lebesgue presque partout et que $f' \in L^1([a, b])$.

On peut maintenant démontrer le

Théorème 2.58. *Soit $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ absolument continue. Alors F est dérivable presque partout sur $[a, b]$, $f := F'$ est Lebesgue intégrable et on a (2.35).*

Démonstration. Clairement, par linéarité, il suffit de démontrer cela pour F à valeurs réelles ce que l'on supposera dorénavant. Soit alors $\mathcal{F}$ la variation totale de F (voir le théorème 2.56). Posons $F_+ = 1/2(\mathcal{F}+F)$ et $F_- = 1/2(\mathcal{F}-F)$. On peut alors appliquer le théorème 2.53 à F_+ et F_- qui satisfont le point 1 de ce résultat. Elles en satisfont donc aussi le point 3 ; donc $F = F_+ - F_-$ satisfait aussi le point 3 du théorème 2.53. Ceci prouve le théorème 2.58 □

La prochain résultat démontre les mêmes conclusions sous un jeu d'hypothèses différent avec une méthode de preuve différente.

Théorème 2.59. *Soient $I := [a,b]$ et $F : I \to \mathbb{C}$ est dérivable en tout point de I et telle que $f := F'$ est Lebesgue intégrable alors on a (2.35).*

Notez que dans ce résultat on demande que F soit dérivable *en tout point* ; par contre, on ne suppose rien sur l'absolue continuité de F qui est, par la proposition 2.52, un corollaire du résultat.

Démonstration. Il suffit de démontrer que (2.35) est vraie pour $x = b$; on supposera sans perte de généralité de f est à valeurs réelles. Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Vitali-Carathéodory (théorème 1.44), il existe g semi-continue inférieurement sur $[a,b]$ telle que $g \geq f = F'$ et

$$\int_a^b g(t)dt < \int_a^b f(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.42}$$

On a alors $g + \varepsilon/2(b-a) > f$ et $\displaystyle\int_a^b \left(g(t) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) dt < \int_a^b f(t)dt + \varepsilon.$
On peut donc supposer que $g > f$ sur $[a,b]$ et qu'elle vérifie (2.42).
Pour $\eta > 0$ et $x \in [a,b]$, on pose

$$F_\eta(x) = \int_a^x g(t)dt - F(x) + F(a) + \eta(x-a). \tag{2.43}$$

Comme $F' = f$, comme g est semi-continue inférieurement et que $g > f$, à chaque $x \in [a,b]$ correspond δ_x tel que

$$\forall t \in]x, x+\delta_x[, \quad g(t) > f(x) \quad \text{et} \quad \frac{F(t)-F(x)}{t-x} < f(x) + \eta.$$

Donc pour $t \in]x, x+\delta_x[$, on a

$$F_\eta(t) - F_\eta(x) = \int_x^t g(u)du - F(x) + F(t) + \eta(x-t) > (t-x)f(x) - (t-x)(f(x)+\eta) + \eta(t-x) = 0. \tag{2.44}$$

Comme $F_\eta(a) = 0$ et que F_η est continue, l'ensemble des points $\{x \in [a,b];\ F_\eta(x) = 0\}$ admet un plus grand élément, disons, x_+. Si $x_+ < b$, le calcul (2.44) entraîne que $F_\eta(t) > 0$ pour $t \in]x_+, b]$. On voit donc que $F_\eta(b) \geq 0$. Ceci étant vrai pour tout $\eta > 0$, (2.42) et (2.43) impliquent

$$F(b) - F(a) \leq \int_a^b g(t)dt < \int_a^b f(t)dt + \varepsilon.$$

En laissant $\varepsilon \to 0^+$, on obtient

$$F(b) - F(a) \leq \int_a^b f(t)dt.$$

En changeant f et $-f$, on obtient que F et f satisfont (2.35) en $x = b$.
La preuve du théorème 2.59 est complète. □

Chapitre 3

Analyse harmonique

L'analyse harmonique est l'analyse des « harmoniques » c'est-à-dire de la décomposition d'un signal en superposition de signaux élémentaires.

3.1 Séries de Fourier

Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; c'est un groupe commutatif pour l'addition car il en ainsi pour $\mathbb{R}$ et que $2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ pour l'addition. On peut identifier $\mathbb{T}$ avec $[0, 2\pi]$ et les fonctions sur $\mathbb{T}$ avec les fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. Cette identification définit la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$ en utilisant $\int_{\mathbb{T}} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(x)dx$ où on a noté par la même lettre f la fonction sur $\mathbb{T}$ et son prolongement 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ (supposé localement intégrable). L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue se traduit alors par

$$\int_{\mathbb{T}} f(t - t_0)dt = \int_{\mathbb{T}} f(t)dt \tag{3.1}$$

pour tout $t_0 \in \mathbb{T}$ et f intégrable sur $\mathbb{T}$.

3.1.1 Coefficients de Fourier

Soit $L^1(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes Lebesgue intégrables sur $\mathbb{T}$. On le munit de

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|dt$$

qui est une norme sur $L^1(\mathbb{T})$. On sait que $(L^1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach.
Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on définit le n-ième coefficient de Fourier de f par

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}dt. \tag{3.2}$$

On a

Proposition 3.1. *Soient f et g dans $L^1(\mathbb{T})$. Alors, pour $n \in \mathbb{Z}$, on a*

- $\widehat{f+g}(n) = \hat{f}(n) + \hat{g}(n)$;
- *si* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\widehat{\alpha f}(n) = \alpha \hat{f}(n)$;
- *si* $\overline{f}$ *est la conjuguée complexe de* f, $\hat{\overline{f}}(n) = \overline{\hat{f}(-n)}$;
- *pour* $\tau \in \mathbb{T}$, *si on définit* $f_\tau(t) = f(t - \tau)$ *alors* $\hat{f}_\tau(n) = \hat{f}(n)\, e^{-in\tau}$;
- $|\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1$.

Corollaire 3.2. *Soit* $(f_j)_{j\geq 0}$*,* $f_j \in L^1(\mathbb{T})$ *telle que* $\|f_j - f_0\|_1 \underset{j\to+\infty}{\to} 0$ *alors* $\hat{f}_j(n) \underset{j\to+\infty}{\to} \hat{f}_0(n)$ *uniformément en* n*.*

Théorème 3.3. *Soit* $f \in L^1(\mathbb{T})$ *telle que* $\hat{f}(0) = 0$*. Définissons* $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau$*.*

Alors F *est absolument continue,* 2π*-périodique et* $\hat{F}(n) = \dfrac{1}{in}\hat{f}(n)$ *pour* $n \neq 0$*.*

Démonstration. L'absolue continuité suit de la proposition 2.52. On calcule

$$F(t+2\pi) - F(t) = \int_t^{t+2\pi} f(\tau)d\tau = 2\pi\hat{f}(0) = 0.$$

Enfin, en utilisant le théorème de Fubini, si $n \neq 0$, on calcule

$$\begin{aligned}\hat{F}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(\tau)\mathbf{1}_{[0,t]}(\tau)d\tau\right)e^{-int}dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\left(\int_0^{2\pi}\mathbf{1}_{[\tau,2\pi]}(t)e^{-int}dt\right)d\tau = \frac{1}{2i\pi\, n}\int_0^{2\pi} f(\tau)\left(e^{-in\tau}-1\right)d\tau = \frac{1}{in}\hat{f}(n).\end{aligned}$$

□

Convolution sur $L^1(T)$

On va utiliser la structure de groupe de $\mathbb{T}$.

Théorème 3.4. *Si* f *et* g *intégrables sur* $\mathbb{T}$ *alors pour presque tout* $t \in \mathbb{T}$*, la fonction* $\tau \mapsto f(t-\tau)g(\tau)$ *est intégrable sur* $\mathbb{T}$ *et si on pose* $(f * g)(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ *alors* $f * g \in L^1(\mathbb{T})$*.*

On a alors $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\,\|g\|_1$ *et pour tout* n*,* $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\,\hat{g}(n)$*.*

Démonstration. La fonction $(t,\tau) \in \mathbb{T}^2 \mapsto f(t-\tau)g(\tau)$ est intégrable sur $\mathbb{T}^2$ car mesurable et, par le théorème de Fubini et (3.1),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}}\left(\int_{\mathbb{T}}|f(t-\tau)g(\tau)|d\tau\right)dt &= \int_{\mathbb{T}^2}|f(t-\tau)g(\tau)|dt\,d\tau\\ &= \int_{\mathbb{T}}\left(\int_{\mathbb{T}}|f(t-\tau)|dt\right)|g(\tau)|d\tau = 2\pi\int_{\mathbb{T}}\|f\|_1|g(\tau)|d\tau = (2\pi)^2\|f\|_1\,\|g\|_1.\end{aligned}$$

Ceci démontre la première assertion et l'estimation sur $\|f * g\|_1$ en constatant que

$$\|f * g\|_1 = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}}\left|\int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right|dt \leq \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}}\left(\int_{\mathbb{T}}|f(t-\tau)g(\tau)|d\tau\right)dt.$$

L'égalité sur les coefficients de Fourier est obtenue comme suit en utilisant le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}}\left(\int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right)e^{-int}dt\\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}}\left(\int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)e^{-in(t-\tau)}dt\right)g(\tau)e^{-in\tau}d\tau = \hat{f}(n)\,\hat{g}(n).\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.5. $L^1(\mathbb{T})$ *muni de l'addition et de la convolution est une algèbre commutative (i.e. la loi* $*$ *est interne, commutative, associative et distributive).*

La preuve est laissée en exercice.