Si A est auto-adjoint et $\mathcal{E}$ sous-espace stable par $\mathcal{A}$,, le fait que $A_{|\mathcal{E}}$ est clair par la définition. De plus, $\mathcal{E}^\perp$ est aussi stable par A : en effet, si $v \in \mathcal{E}^\perp$, $\forall u \in \mathcal{E}$, $\langle Av, u\rangle = \langle v, Au\rangle = 0$ car $Au \in \mathcal{E}$. Ceci donne donc la décomposition annoncée.
Enfin, l'assertion sur les spectres découle du calcul

$$\begin{pmatrix} z - U_{|\mathcal{E}} & 0 \\ 0 & z - U_{|\mathcal{E}^\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (z - U_{|\mathcal{E}})^{-1} & 0 \\ 0 & (z - U_{|\mathcal{E}^\perp})^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{|\mathcal{E}} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{|\mathcal{E}^\perp} \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}.$$

□

Définition 3.58. Soit U unitaire sur $\mathcal{H}$ et $u \in \mathcal{H}$. *L'espace cyclique pour* U *engendré par* u est la clôture de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(U^n u)_{n\in\mathbb{Z}}$.
On dira qu'un espace $\mathcal{E}$ est *cyclique pour* U s'il est l'espace cyclique pour U engendré par un certain vecteur u. Dans ce cas on dira que le vecteur u est *cyclique pour* U *et* $\mathcal{E}$.

Lemme 3.59. *Soit* U *unitaire. Alors il existe* $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ *et* $(\mathcal{E}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ *une famille au plus dénombrable de sous-espaces de* $\mathcal{H}$ *cycliques pour* U *deux à deux orthogonaux tels que* $\mathcal{H}$ *soit la somme directe de ces sous-espaces i.e.* $\mathcal{H} = \overset{\perp}{\bigoplus}_{n\in\mathcal{N}} \mathcal{E}_n$.

Démonstration. Si $\mathcal{H} = \{0\}$, il n'y a rien à faire. Sinon soit $(e_m)_{m\in\mathcal{M}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ (où $\mathcal{M}$ est un intervalle d'entiers non nuls contenant 1).
On pose $f_1 = e_1$ et $m_1 = 1$. Considérons $\mathcal{E}_1$ l'espace cyclique pour U engendré par f_1. Si $\mathcal{E}_1 = \mathcal{H}$, on a fini. Sinon on peut trouver $m_2 \in \mathcal{M}$ tel que pour $m < m_2$, $e_m \in \mathcal{E}_1$ et $f_2 := \Pi_{\mathcal{E}_1^\perp} e_{m_2} \neq 0$ (où $\Pi_{\mathcal{E}_1^\perp}$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{E}_1^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{E}_1$). Considérons $\mathcal{E}_2$ l'espace cyclique pour U engendré par f_2. Alors $\mathcal{E}_1 \perp \mathcal{E}_2$. En effet, comme U est unitaire, pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $\langle U^n f_1, U^m f_2\rangle = \langle U^{n-m} f_1, f_2\rangle = 0$. Ainsi l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(U^n f_1)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthogonal à celui engendré par les vecteurs $(U^n f_2)_{n\in\mathbb{Z}}$. Et on conclut pour les clôtures par bicontinuité du produit scalaire. D'autre part, on sait que $\{e_m; 1 \leq m \leq m_2\} \subset \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$. En effet, par hypothèse sur m_2, on sait que $\{e_m; 1 \leq m \leq m_2 - 1\} \subset \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$. Et $e_{m_2} = \Pi_{\mathcal{E}_1} e_{m_2} + \Pi_{\mathcal{E}_1^\perp} e_{m_2} \in \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$.
Par récurrence, on construit ainsi une suite strictement croissante $(m_n)_{n\in\mathcal{N}}$ dans $\mathcal{M}$ et $(\mathcal{E}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ une famille (au plus dénombrable) de sous-espaces de $\mathcal{H}$ fermés deux à deux orthogonaux tous cycliques pour U tels que, pour tout n, $\{e_m; 1 \leq m \leq m_n\} \subset \mathcal{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_n$.
On obtient ainsi que $\{e_m; m \in \mathcal{M}\} \subset \overset{\perp}{\bigoplus}_{n\in\mathcal{N}} \mathcal{E}_n$. Or $\overset{\perp}{\bigoplus}_{n\in\mathcal{N}} \mathcal{E}_n$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ car tous les $(\mathcal{E}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ le sont. Donc, $\overset{\perp}{\bigoplus}_{n\in\mathcal{N}} \mathcal{E}_n$ contient la clôture de l'espace vectoriel engendré par $\{e_m; m \in \mathcal{M}\}$ qui est $\mathcal{H}$ car $(e_m)_{m\in\mathcal{M}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}$.
Ceci achève la preuve du lemme. □

Théorème 3.60 (Théorème spectral pour les opérateurs unitaires)**.** *Soit* U *un opérateur unitaire sur* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert séparable.*
Alors il existe $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ *et une mesure de probabilité borélienne sur* $\mathbb{T} \times \mathcal{N}$*, disons,* μ*, appelée mesure spectrale et* $\mathcal{U} : \mathcal{H} \mapsto L^2(\mu)$ *un opérateur unitaire tel que* $\mathcal{U} U \mathcal{U}^*$ *soit l'opérateur de multiplication par* $e^{it} : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ *i.e. pour* $f \in L^2(\mu)$, $[\mathcal{U} U \mathcal{U}^* f](t, n) = e^{it} f(t, n)$ *pour* $(t, n) \in \mathbb{T} \times \mathcal{N}$*. De plus* $\sigma(U) = \left\{e^{it};\ \exists n \in \mathcal{N},\ (t, n) \in supp\, \mu\right\}$.

Ceci correspond à la diagonalisation des matrices unitaires lorsque $\mathcal{H}$ est de dimension finie.

Démonstration. Le théorème spectral pour les opérateurs unitaires est une conséquence directe des lemmes 3.57 et 3.59 et du théorème suivant.

Théorème 3.61 (Théorème spectral pour les opérateurs unitaires dans le cas cyclique)**.** *Soit U un opérateur unitaire sur $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable que l'on supposera cyclique pour U.*
Alors il existe une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{T}$, disons, μ, appelée mesure spectrale et $\mathcal{U}:\ \mathcal{H} \mapsto L^2(\mu)$ un opérateur unitaire tel que $\mathcal{U}U\mathcal{U}^*$ soit l'opérateur de multiplication par $e^{it}:\ L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ i.e. pour $f \in L^2(\mu)$, $[\mathcal{U}U\mathcal{U}^* f](t) = e^{it} f(t)$. De plus $\sigma(U) = \left\{e^{it};\ t \in supp\, \mu\right\}$.

En effet, par les lemmes 3.57 et 3.59, U se décompose en la somme directe $\oplus_{n\in\mathcal{N}} U_{|\mathcal{E}_n}$ correspondant à la décomposition en somme directe $\mathcal{H} = \overset{\perp}{\bigoplus}_{n\in\mathcal{N}} \mathcal{E}_n$. On peut alors pour chaque n dans $\mathcal{N}$ considérer la mesure spectrale μ_n (sur $\mathbb{T}$) et l'opérateur unitaire $\mathcal{U}_n:\ \mathcal{E}_n \mapsto L^2(\mu_n)$ obtenus par le théorème 3.61 et définir la mesure μ sur $\mathbb{T}\times\mathcal{N}$ de la façon suivante : si A est un borélien de $\mathbb{T}\times\mathcal{N}$,

$$\mu(A) = c_{\mathcal{N}} \sum_{n\in\mathcal{N}} \int_{\mathbb{T}} \mathbf{1}_A(t,n)(n+1)^{-2} d\mu_n(t)$$

où $(c_{\mathcal{N}})^{-1} := \displaystyle\sum_{n\in\mathcal{N}} (n+1)^{-2}$. Alors μ est une mesure de probabilité et $L^2(\mu)$ est l'espace des fonctions $f:\ \mathbb{T}\times\mathcal{N} \to \mathbb{C}$ mesurables telles que $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \sum_{n\in\mathcal{N}} |f(t,n)|^2 (1+n)^{-2} d\mu_n(t)$. On peut alors considérer l'opérateur $\mathcal{U}:\ \mathcal{H} \mapsto L^2(\mu)$ définie par

$$\text{pour } e = \sum_{n\in\mathcal{N}} e_n \text{ où } e_n \in \mathcal{E}_n,\ \mathcal{U}(e)(t,n) = \frac{1}{\sqrt{c_{\mathcal{N}}}}(n+1)\left[\mathcal{U}_n(e_n)\right](t).$$

On calcule

$$\|\mathcal{U}(e)\|^2_{L^2(\mu)} = \int_{\mathbb{T}} \sum_{n\in\mathcal{N}} |\mathcal{U}(e)((t,n)|^2 (1+n)^{-2} d\mu_n(t) = \int_{\mathbb{T}} \sum_{n\in\mathcal{N}} \left|\mathcal{U}_n(e_n)\right|^2(t) d\mu_n(t) = \sum_{n\in\mathcal{N}} \|e_n\|^2_{\mathcal{H}} = \|e\|^2_{\mathcal{H}}.$$

De plus, par le théorème 3.61, en utilisant les mêmes notations, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(Ue)(t,n) &= \mathcal{U}\left(\sum_{n\in\mathcal{N}} U_{|\mathcal{E}_n} e_n\right)(t,n) = \sum_{n\in\mathcal{N}} \mathcal{U}_n\left(U_{|\mathcal{E}_n} e_n\right)(t) = \sum_{n\in\mathcal{N}} e^{it}\mathcal{U}_n\left(e_n\right)(t) = e^{it}\sum_{n\in\mathcal{N}} \mathcal{U}_n\left(e_n\right)(t)\\ &= e^{it}\mathcal{U}(e)(t,n).\end{aligned}$$

Ainsi, pour $f \in L^2(\mu)$, $[\mathcal{U}U\mathcal{U}^* f](t,n) = e^{it} f(t,n)$ pour $(t,n) \in \mathbb{T}\times\mathcal{N}$.
Pour démontrer la dernière assertion du théorème 3.60, il suffit de constater que $\sigma(U) = \overline{\bigcup_{n\in\mathcal{N}} \sigma(U_{|\mathcal{E}_n})}$ (par le lemme 3.57 et le fait que spectre et support est sont fermés) et d'utiliser la définition de μ en terme des $(\mu_n)_{n\in\mathcal{N}}$ et la dernière assertion du théorème 3.61.
Ceci achève la preuve du théorème 3.60. □

Preuve du théorème 3.61. Soit U unitaire sur $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable que l'on supposera cyclique pour U et soit f un vecteur cyclique tel que $\|f\|_{\mathcal{H}} = 1$.
Pour $n \in \mathbb{Z}$, posons $a_n := \langle U^{-n} f, f\rangle$. Alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est définie positive (cf définition 3.48. En effet, pour toute suite à support compact $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, comme U est unitaire, on calcule

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} a_{m-n} z_m \overline{z_n} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \langle U^m f, U^n f\rangle z_m \overline{z_n} = \left\|\sum_{m\in\mathbb{Z}} \overline{z_m} U^m f\right\|^2 \geq 0. \tag{3.34}$$

Par le théorème 3.49, il existe alors une mesure positive borélienne sur $\mathbb{T}$, disons, μ telle que $\hat{\mu}(n) = a_n$. On a $\mu(\mathbb{T}) = \hat{\mu}(0) = a_0 = \|f\|^2 = 1$. Donc μ est une mesure de probabilité.
Par le calcul (3.34), pour toute suite à support compact $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on calcule

$$\left\| \sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m U^m f \right\|^2 = \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m e^{imt} \right|^2 d\mu(t). \tag{3.35}$$

Donc, si on pose $\mathcal{U}(U^n f) := e^{int}$, on peut étendre $\mathcal{U}$ à l'espace vectoriel engendré par la famille $(U^n f)_{n\in\mathbb{Z}}$ en une application linéaire à valeurs dans $L^2(\mu)$. Par (3.35), on voit donc que $\mathcal{U}$ définit une isométrie de l'espace vectoriel engendré par la famille $(U^n f)_{n\in\mathbb{Z}}$ à valeurs dans $L^2(\mu)$. Comme par hypothèse, l'espace vectoriel engendré par la famille $(U^n f)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathcal{H}$, elle s'étend en une isométrie à $\mathcal{H}$ tout entier. Elle est clairement injective. Elle est aussi surjective. En effet, l'image de $\mathcal{U}$ contient le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques qui est dense dans $L^2(\mu)$ par application des théorèmes 1.68 et 3.18 ; de plus, l'image est fermée : si $(\mathcal{U}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v, alors $(\mathcal{U}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et, comme $\|\mathcal{U}u_n - \mathcal{U}u_m\|_{L^2(\mu)} = \|u_n - u_m\|_{\mathcal{H}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi ; elle converge donc, disons, vers u et par continuité, $v = \mathcal{U}u$.
Ainsi $\mathcal{U}$ est unitaire.
D'autre part, pour toute suite à support compact $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on calcule

$$\mathcal{U}\left[U\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m U^m f\right)\right] = \mathcal{U}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m U^{m+1} f\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m e^{i(m+1)t} = e^{it}\mathcal{U}\left[\sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m U^m f\right].$$

Par densité et continuité, cette relation s'étend à tout $\mathcal{H}$; on vient donc de montrer que $\mathcal{U}U\mathcal{U}^*$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $t \mapsto e^{it}$ sur $L^2(\mu)$.
Montrons que $\sigma(U) = \left\{e^{it};\ t \in \operatorname{supp}\mu\right\}$. Clairement, si $z \notin \left\{e^{it};\ t \in \operatorname{supp}\mu\right\}$, alors l'application $t \mapsto |e^{it} - z|$ est minorée par $c > 0$ sur $\operatorname{supp}\mu$. Ainsi, dans $L^2(\mu)$, l'opérateur $f \mapsto (e^{i\cdot} - z)f$ est inversible d'inverse l'opérateur borné $f \mapsto (e^{i\cdot} - z)^{-1}f$. En conjuguant par l'opérateur unitaire $\mathcal{U}$, on obtient que dans $\mathcal{H}$, l'opérateur $f \mapsto (U - z)f$ est inversible d'inverse l'opérateur borné $f \mapsto (U - z)^{-1}f$. Ainsi $z \notin \sigma(U)$.
Réciproquement, si $z \in \left\{e^{it};\ t \in \operatorname{supp}\mu\right\}$, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mu(T_\varepsilon) > 0$ où $T_\varepsilon = \left\{t;\ e^{it} \in D(z,\varepsilon) \cap \{|z'| = 1\}\right\}$.
Donc, si on pose $u_\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{\mu(T_\varepsilon)}}\mathcal{U}^*(\mathbf{1}_{T_\varepsilon})$, on calcule

$$\|u_\varepsilon\|^2_{\mathcal{H}} = \int_{T_\varepsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu(T_\varepsilon)}}\right)^2 d\mu(t) = \frac{\mu(T_\varepsilon)}{\mu(T_\varepsilon)} = 1 \quad \text{et} \quad \|(U - z)u_\varepsilon\|^2_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu(T_\varepsilon)} \int_{T_\varepsilon} \left|e^{it} - z\right|^2 d\mu(t) \leq \varepsilon^2.$$

Ainsi, si $z \notin \sigma(U)$ alors $(U - z)^{-1}$ existerait et serait borné, disons, par $C > 0$ et ainsi

$$1 = \|u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}} = \|(U - z)^{-1}(U - z)u_\varepsilon\|_{\mathcal{H}} \leq C\varepsilon$$

ceci pour tout $\varepsilon > 0$ ce qui est absurde. Donc $z \in \sigma(U)$.
Ceci conclut la preuve du théorème 3.61. □

Comme corollaire du théorème 3.60, on obtient

Théorème 3.62 (Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints bornés)**.** *Soit A un opérateur auto-adjoint borné sur $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable.*
Alors il existe $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ et une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R} \times \mathcal{N}$, disons, μ, appelée mesure spectrale et $\mathcal{U} :\ \mathcal{H} \mapsto L^2(\mu)$ un opérateur unitaire tel que $\mathcal{U}A\mathcal{U}^*$ soit l'opérateur de multiplication par $t :\ L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ i.e. pour $f \in L^2(\mu)$, $[\mathcal{U}U\mathcal{U}^* f](t,n) = tf(t,n)$ pour $(t,n) \in \mathbb{R} \times \mathcal{N}$. De plus $\sigma(A) = \{t;\ \exists n \in \mathcal{N},\ (t,n) \in \operatorname{supp}\mu\}$.

Démonstration. Suivant le lemme 3.54, on construit l'opérateur unitaire $U := (A+i)(A-i)^{-1}$ et par le théorème 3.60, $\tilde{\mu}$ la mesure spectrale sur $\mathbb{T}\times\mathcal{N}$ associée à U ; appelons $\tilde{\mathcal{U}}$ l'application unitaire associée de $\mathcal{H}$ dans $L^2(\mu)$ qui conjugue U en la multiplication par e^{it} (donnée par le théorème 3.60). Comme $1 \in \rho(U)$, on sait qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que le support de $\tilde{\mu}$ ne rencontre pas l'ensemble $\{(e^{it}, n);\ n \in \mathcal{N},\ t \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$. Comme $A := i(U+1)(U-1)^{-1}$, pour $f \in L^2(\tilde{\mu})$, on calcule

$$\tilde{\mathcal{U}}\, A\tilde{\mathcal{U}}^* f(t,n) = i\frac{e^{it}+1}{e^{it}-1} f(t,n) = \mathrm{cotan}(t/2) f(t,n). \tag{3.36}$$

Posons $\varphi :\ \mathbb{T}\times\mathcal{N} \to \mathbb{R}\times\mathcal{N}$ l'application définit par $\varphi(t,n) = (\mathrm{cotan}(t/2), n)$. Soit $\mu = \varphi_*(\tilde{\mu})$ la mesure image de $\tilde{\mu}$ par φ. On définit $\mathcal{V} : L^2(\mu) \to L^2(\tilde{\mu})$ par $\mathcal{V}(f)(t,n) = f\circ\varphi(t,n)$. Alors

$$\|\mathcal{V}(f)\|^2_{L^2(\tilde{\mu})} = \sum_{n\in\mathcal{N}} \int_{\mathbb{T}} |f\circ\varphi|^2(t,n) d\tilde{\mu}(t,n) = \sum_{n\in\mathcal{N}} \int_{\mathbb{R}} |f|^2(t,n) d\mu(t,n) = \|f\|^2_{L^2(\mu)}.$$

Comme le support de $\tilde{\mu}$ ne rencontre pas l'ensemble $\{(e^{it}, n);\ n \in \mathcal{N},\ t \in [-\varepsilon,\varepsilon]\}$, on voit que φ est bijective bicontinue de $\mathrm{supp}\,\tilde{\mu}$ dans $\mathrm{supp}\,\mu$. Ainsi $\mathcal{V}$ est unitaire de $L^2(\mu)$ dans $L^2(\tilde{\mu})$. Si maintenant on pose $\mathcal{U} = \mathcal{V}^{-1}\tilde{\mathcal{U}}$, on obtient que $\mathcal{U}$ est unitaire de $\mathcal{H}$ dans $L^2(\mu)$ et la relation (3.36) devient, pour $f \in L^2(\mu)$,

$$\mathcal{U}\, A\mathcal{U}^* f(t,n) = t f(t,n).$$

Le calcul de $\sigma(A)$ étant immédiat par le théorème 3.60 et l'inverse de la transformée de Cayley, ceci achève la preuve du théorème 3.62. □

Le théorème 3.62 correspond à la diagonalisation des matrices hermitiennes lorsque $\mathcal{H}$ est de dimension finie.

3.2 Convergence des séries de Fourier

La convergence des séries de Fourier est un problème qui se révèle épineux, surtout, celui de la convergence ponctuelle. Souvent les convergences dans certaines normes fonctionnelles sont plus simples à traiter. La question de la convergence est reliée à celle de l'existence et des propriétés de la fonction conjuguée (voir la section 3.1.1).

3.2.1 Convergence en norme dans les espaces de Banach homogènes

Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$ contenant les polynômes trigonométriques. Pour $f \in \mathcal{B}$, on rappelle que

$$S_n(f) = (D_n * f)(t) = \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j) e^{ijt}. \tag{3.37}$$

Définition 3.63. On dit que $\mathcal{B}$ a la *propriété de convergence en norme* si, pour $f \in \mathcal{B}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n(f) - f\|_{\mathcal{B}} = 0. \tag{3.38}$$

On a déjà vu que $L^2(\mathbb{T})$ a la propriété de la convergence en norme. On veut maintenant caractériser les espaces de Banach homogènes l'ayant.
L'application $S_n :\ f \mapsto S_n(f)$ est bien définie et laisse $\mathcal{B}$ invariant. Comme son image est de dimension finie $2n+1$, elle est bornée et on note $\|S_n\|^{\mathcal{B}}$ sa norme.

Théorème 3.64. *Un espace de Banach homogène $\mathcal{B}$ a la propriété de convergence en norme si et seulement si la suite $(\|S_n\|^{\mathcal{B}})_{n\geq 1}$ est bornée c'est-à-dire si et seulement s'il existe $K > 0$ telle que*

$$\forall\ n \geq 1,\ \forall\ f \in \mathcal{B}, \quad \|S_n(f)\|_{\mathcal{B}} \leq K\|f\|_{\mathcal{B}}. \tag{3.39}$$

Démonstration. D'une part, si $(S_n(f))_{n\geq 1}$ tend vers f pour tout f dans $\mathcal{B}$, alors par le théorème de Banach-Steinhaus (cf Th. 3.3.2, polycopié de JY. Chemin 4M005), on sait que (3.39) est vraie.
Réciproquement, supposons (3.39). Pour $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{B}$, soit P un polynôme trigonométrique tel que $\|f - P\|_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon/(K+1)$ (leur existence est garantie par le théorème 3.18 appliqué au noyau de Fejér). Pour n supérieur au degré de P, on a bien sur $S_n(P) = P$. Donc

$$\|S_n(f) - f\|_{\mathcal{B}} \leq \|S_n(f) - S_n(P)\|_{\mathcal{B}} + \|P - f\|_{\mathcal{B}} \leq K\varepsilon/(K+1) + \varepsilon/(K+1) = \varepsilon.$$

Ceci achève la preuve du théorème 3.64. □

Comme $S_n(f) = D_n * f$, on a $\|S_n(f)\|_{\mathcal{B}} \leq \|D_n\|_1\|f\|_{\mathcal{B}}$ par la proposition 3.16. Ainsi

$$\|S_n\|^{\mathcal{B}} \leq \|D_n\|_1. \tag{3.40}$$

Les nombres $L_n := \|D_n\|_1$ sont appelées *constantes de Lebesgue.*

Exercice 3.65. Montrer que $L_n = \dfrac{4}{\pi^2}\log n + O(1)$.

Quand $\mathcal{B} = L^1(\mathbb{T})$, (3.40) est une égalité. En effet, on a vu que $\|F_m\|_1 = 1$ (cf lemme 3.9 et définition 3.7). Donc, $\|S_n\|^{L^1} \geq \|S_n(F_m)\|_1 = \|D_n * F_m\|_1 = \|F_m * D_n\|_1 = \left\|D_n - \dfrac{1}{m+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(D_n - D_k)\right\|_1$ si $m \geq n$. Donc, par (3.40), $\|S_n\|^{L^1} = \|D_n\|_1$.
Ainsi $L^1(\mathbb{T})$ n'a pas la propriété de convergence en norme.

Exercice 3.66. Montrer que $\|S_n\|^{\mathcal{C}(\mathbb{T})} = \|D_n\|_1$.
Indication : pour cela, on pourra étudier $S_n(\psi_n)$ où ψ_n est une fonction continue bornée en module par 1 qui prend comme valeur en t le signe de $D_n(t)$ sauf en des voisinages assez petits des points où celui-ci change.

3.2.2 Relation avec l'existence d'une fonction conjuguée

On va maintenant relier la propriété de convergence en norme à l'existence d'une fonction conjuguée.
Dans la définition 3.6, on a appelé série trigonométrique conjuguée de la série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}$, la série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} -i\mathrm{sgn}(n)a_n e^{int}$.
Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et que la série conjuguée de $\sum \hat{f}(n)e^{int}$ est la série de Fourier d'une fonction g, on dit que g est la conjuguée de f ; on la note $\tilde{f}$. Ceci ne définit a priori pas la fonction conjuguée pour toute fonction intégrable ; on verra une généralisation au chapitre suivant.

Définition 3.67. Un espace de fonction $\mathcal{B} \subset L^1(\mathbb{T})$ est stable par conjugaison si, pour $f \in \mathcal{B}$, $\tilde{f}$ est définie et appartient à $\mathcal{B}$.

Lemme 3.68. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach homogène stable par conjugaison. Alors $f \mapsto \tilde{f}$ est une application linéaire continue sur $\mathcal{B}$.*

Démonstration. La linéarité vient clairement de la définition de la série conjuguée. Le fait que $f \mapsto \tilde{f}$ est bornée suit du

Théorème 3.69 (Théorème du graphe fermé)**.** *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ une application linéaire. T est bornée si et seulement si $Gr(T) := \{(f, Tf);\ f \in \mathcal{B}\}$, le graphe de T, est fermé dans $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$.*

Il suffit de montrer que $\{(f, \tilde{f});\ f \in \mathcal{B}\}$ est fermé. Soit (f, g) dans l'adhérence de $\mathrm{Gr}(T)$. Il existe donc $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n \in \mathcal{B}$ tel que $f_n \to f$ et $\tilde{f}_n \to g$. Alors par continuité, pour tout entier m, $\hat{f}_n(m) \underset{n\to+\infty}{\to} \hat{f}(m)$. D'autre part,

$$\hat{g}(m) = \lim_{n\to+\infty} \hat{\tilde{f}}_n(m) = \lim_{n\to+\infty} -i\,\mathrm{sgn}(m)\hat{f}_n(m) = -i\,\mathrm{sgn}(m) \lim_{n\to+\infty} \hat{f}_n(m) = -i\,\mathrm{sgn}(m)\hat{f}(m) = \hat{\tilde{f}}(m).$$

Ainsi par le théorème 3.10, $g = \tilde{f}$ c'est-à-dire que $(f, g) \in \mathrm{Gr}(T)$. □

Preuve du Théorème du graphe fermé. Supposons T borné. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ est telle que $(u_n, Tu_n) \underset{n\to+\infty}{\to} (u, v)$ dans $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Alors

$$\|Tu - v\| \leq \lim_{n\to+\infty} (\|Tu - Tu_n\| + \|v - Tu_n\|) = 0$$

Donc $(u, v) \in \mathrm{Gr}(T)$. Ainsi le graphe de T est fermé.
Réciproquement, supposons que le graphe de T est fermé. Alors $\mathrm{Gr}(T)$ est un espace de Banach muni de la norme de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$, disons, $\|(x, y)\|_1 = \|x\|_{\mathcal{B}} + \|y\|_{\mathcal{B}}$. D'autre part, on peut munir $\mathrm{Gr}(T)$ de la norme $\|(x, Tx)\|_2 = \|x\|_{\mathcal{B}}$ pour laquelle il est également complet : $((x_n, Tx_n))_n$ converge vers (x, Tx) pour $\|\cdot\|_2$ si et seulement si $(x_n)_n$ vers x dans B. Alors la projection sur la première coordonnées $(x, Tx) \mapsto (x, Tx)$ est continue bijective de $(\mathrm{Gr}(T), \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathrm{Gr}(T), \|\cdot\|_2)$ comme $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$. Son inverse est donc continue par le théorème de l'application ouverte (cf polycopié JY. Chemin 4M005). Ainsi il existe $C > 1$ telle que $\|\cdot\|_1 \leq C\|\cdot\|_2$ soit encore $\|Tx\|_{\mathcal{B}} \leq (C-1)\|x\|_{\mathcal{B}}$. Donc T est borné et la preuve du théorème 3.69 complète. □

Théorème 3.70. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach homogène tel que pour $f \in \mathcal{B}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $e^{int}f \in \mathcal{B}$ et*

$$\|e^{int}f\|_{\mathcal{B}} = \|f\|_{\mathcal{B}}. \tag{3.41}$$

Alors $\mathcal{B}$ est stable par conjugaison si et seulement s'il admet la convergence en norme.

Démonstration. Considérons l'application

$$f \mapsto f^{\flat} = \frac{1}{2}\hat{f}(0) + \frac{1}{2}(f + i\tilde{f}) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{int}. \tag{3.42}$$

Si $\mathcal{B}$ est stable par conjugaison, alors cette application est linéaire bornée de $\mathcal{B}$ dans lui-même.
Réciproquement, si cette application est bien définie (i.e. pour tout $f \in \mathcal{B}$, la série trigonométrique du membre de droite de (3.42) est la série de Fourier d'un élément de $\mathcal{B}$), alors $\mathcal{B}$ est stable par conjugaison. Supposons qu'il existe $K > 0$ tel que $\sup_{n\geq 0} \|S_n\|^{\mathcal{B}} = K < +\infty$. On définit alors

$$S_n^{\flat}(f) = \sum_{j=0}^{2n} \hat{f}(j)e^{ijt} = e^{int}S_n(e^{-int}f). \tag{3.43}$$

Par (3.41), on a $\sup_{n\geq 0} \|S_n^\flat\|^{\mathcal{B}} = K$.

Pour $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{B}$, soit P un polynôme trigonométrique tel que $\|f - P\|_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon/2K$. Alors

$$\|S_n^\flat(f) - S_n^\flat(P)\|_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon/2.$$

Notons que si n et m sont supérieurs au degré de P alors $S_n^\flat(P) = S_m^\flat(P)$. Ainsi

$$\|S_n^\flat(f) - S_m^\flat(f)\|_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon.$$

Donc $(S_n^\flat(f))_n$ est de Cauchy et converge dans $\mathcal{B}$ vers $f^\flat \in \mathcal{B}$. On voit que $f^\flat \sim \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n)e^{int}$.

Réciproquement, si l'application $f \mapsto f^\flat$ est bien définie et donc bornée par, disons, K_1 (par le raisonnement menant au lemme 3.68), on voit que

$$S_n^\flat(f) = f^\flat - e^{i(2n+1)\cdot}\left(e^{-i(2n+1)\cdot} f\right)^\flat$$

et, donc, que $\|S_n^\flat\|^{\mathcal{B}} \leq 2K_1$. Or par (3.41) et (3.43), on a $\|S_n^\flat\|^{\mathcal{B}} = \|S_n\|^{\mathcal{B}}$ ce qui achève la preuve du théorème 3.70. $\square$

Dans le chapitre suivant, nous étudierons la conjugaison plus en détails et prouverons que, pour $1 < p < +\infty$, l'espace $L^p(\mathbb{T})$ est stable par conjugaison et, donc, le

Théorème 3.71. *Pour $1 < p < +\infty$, l'espace $L^p(\mathbb{T})$ a la propriété de convergence en norme.*

3.2.3 Convergence et divergence en un point

Théorème 3.72. *Il existe une fonction continue dont la série de Fourier diverge en au moins un point.*

Première preuve. Les formes $f \mapsto [S_n(f)](0)$ sont continues sur $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Par le théorème de Banach-Steinhaus (cf Th. 3.3.2 poly JY. Chemin 4M005), si $([S_n(f)](0))_n$ est bornée pour toute f, ces formes sont uniformément bornées. Notons que $S_n(f)(t_0) = S_n(f_{t_0})(0)$ où $f_{t_0}(\cdot) = f(t_0 + \cdot)$. Donc, si $([S_n(f)](0))_n$ était uniformément bornée sur $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ alors $(\|S_n\|^{\mathcal{C}(\mathbb{T})})_n$ serait bornée. Ceci ne se peut par les résultat des exercices 3.65 et 3.66. Il existe donc f telle que $([S_n(f)](0))_n$ n'est pas bornée c'est-à-dire que la série de Fourier de $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ diverge au point 0. $\square$

Seconde preuve du théorème 3.72. On va maintenant donner une preuve plus constructive. Dans l'exercice 3.66, on construit une suite de fonctions, disons, $(\psi_n)_n$ continues sur $\mathbb{T}$ telles que, pour n assez grand,

$$\|\psi_n\|_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad |S_n(\psi_n, 0)| \geq \frac{1}{2}L_n \geq \frac{1}{10}\log n \tag{3.44}$$

Posons $\varphi_n = F_{n^2} * \psi_n$; ce sont des polynômes trigonométriques de degré au plus n^2 vérifiant

$$\|\varphi_n\|_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad |S_n(\varphi_n, 0) - S_n(\psi_n, 0)| \leq \frac{6}{5}. \tag{3.45}$$

En effet, $S_n(\varphi_n) - S_n(\psi_n) = (F_{n^2} * D_n - D_n) * \varphi_n$ et

$$\|F_{n^2}*D_n - D_n\|_\infty = \left\|\frac{1}{n^2+1}\sum_{j=0}^{n-1}(D_j - D_n)\right\|_\infty \leq \frac{1}{n^2+1}\sum_{j=0}^{n-1}\|D_j - D_n\|_\infty \leq \frac{2}{n^2+1}\sum_{j=0}^{n-1}(n-j) = \frac{n(n+1)}{n^2+1} \leq \frac{6}{5}.$$

Ainsi, pour n assez grand,

$$|S_n(\varphi_n, 0)| \geq \frac{1}{10}\log n - \frac{6}{5}. \tag{3.46}$$

Pour $\lambda_n := 2^{3^n}$, on pose

$$f(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t). \tag{3.47}$$

Par (3.45), cette somme converge normalement dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ et définit donc une fonction continue. Montrons que sa série de Fourier diverge en 0. En remarquant que $\varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi_{\lambda_n}}(m)e^{i\lambda_n mt}$, on voit que la croissance rapide de $(\lambda_n)_n$ garantit que, si $m < n$ alors $S_{\lambda_n^2}(\varphi_{\lambda_m}(\lambda_m\cdot)) = \varphi_{\lambda_m}(\lambda_m\cdot)$ et si $m > n$ alors $S_{\lambda_n^2}(\varphi_{\lambda_m}(\lambda_m\cdot)) = \widehat{\varphi_{\lambda_m}}(0)$. On calcule donc

$$\begin{aligned}|S_{\lambda_n^2}(f,0)| &= \left|S_{\lambda_n^2}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2}\varphi_{\lambda_m}(\lambda_m\cdot), 0\right) + \sum_{m\geq n+1}\frac{1}{m^2}\widehat{\varphi_{\lambda_m}}(0)\right| \\ &= \left|\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m^2}\varphi_{\lambda_m}(0) + \frac{1}{n^2}S_{\lambda_n}(\varphi_{\lambda_n}, 0) + \sum_{m\geq n+1}\frac{1}{m^2}\widehat{\varphi_{\lambda_m}}(0)\right| \geq \frac{1}{10n^2}\log\lambda_n - \frac{\pi^2}{6} - \frac{6}{5}.\end{aligned} \tag{3.48}$$

qui tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$ par construction de $(\lambda_n)_n$.
Ceci achève la seconde preuve du théorème 3.72. □

On va maintenant donner quelques critères de convergence ponctuelle.

Théorème 3.73. *Soit f intégrable sur $\mathbb{T}$ telle que*

$$\hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty. \tag{3.49}$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{T}$, $S_n(f)(t)$ et $F_n * f(t)$ ont le même type de convergence, et quand elles existent, leurs limites sont égales. De plus, si $F_n * f(t)$ converge uniformément sur un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ alors il en est de même pour $S_n(f)(t)$.

Démonstration. Comme $F_n * f(t)$ est une moyenne de Cesaro de $(S_m(f)(t))_{0\leq m\leq n}$, il est clair que la convergence de $(S_n(f)(t))_n$ implique celle de $(F_n * f(t))_n$. Pour la réciproque, on choisit $\lambda > 1$ et, en utilisant (3.4), on calcule

$$S_n(f)(t) = \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}F_{[\lambda n]} * f(t) - \frac{n+1}{[\lambda n]-n}F_n * f(t) - \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}\sum_{n\leq|m|\leq\lambda n}\left(1 - \frac{|m|}{[\lambda n]+1}\right)\hat{f}(m)e^{imt} \tag{3.50}$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière de $\cdot$.
La propriété (3.49) implique que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda > 1$ tel que $\limsup_{n\to+\infty} \sum_{n\leq|m|\leq\lambda n} |\hat{f}(m)| < \varepsilon$. Pour ce choix de λ, on a

$$\sup_{t\in\mathbb{T}}\left|\frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}\sum_{n\leq|m|\leq\lambda n}\left(1-\frac{|m|}{[\lambda n]+1}\right)\hat{f}(m)e^{imt}\right| = \sup_{t\in\mathbb{T}}\left|\sum_{n\leq|m|\leq\lambda n}\frac{[\lambda n]-|m|}{[\lambda n]-n}\hat{f}(m)e^{imt}\right| \leq \varepsilon. \tag{3.51}$$