Démonstration. Il suffit de démontrer l'égalité pour f à valeurs réelles (par linéarité des deux membres de l'égalité). En fait, en échangeant f avec $-f$, on voit qu'il suffit de démontrer, pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$ à valeurs réelles, l'inégalité

$$\Lambda f \leq \int_X f d\mu. \tag{1.15}$$

Soit K le support de $f \in \mathcal{C}_c(X)$ à valeurs réelles. Soit $[a,b]$ un intervalle contenant l'image de f (qui est compacte car $f \in \mathcal{C}_c(X)$). Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $(y_i)_{0\leq i\leq n}$ tels que $\max\limits_{1\leq i\leq n}(y_i - y_{i-1}) \leq \varepsilon$ et

$$y_0 < a < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = b. \tag{1.16}$$

Pour $1 \leq i \leq n$, posons

$$E_i = \{x;\ y_{i-1} < f(x) \leq y_i\} \cap K. \tag{1.17}$$

Étant continue, f est Borel mesurable ; les ensembles $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ sont donc des boréliens disjoints dont la réunion vaut K. Pour $1 \leq i \leq n$, on peut trouver $V_i \supset E_i$ ouverts tels que $f_{|V_i} \leq y_i + \varepsilon$ et

$$\mu(V_i) \leq \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}. \tag{1.18}$$

Par le théorème 1.18, on construit, pour $1 \leq i \leq n$, $h_i \prec V_i$ telles que $h_1 + \cdots + h_n = 1$ sur K. Ainsi $f = h_1 f + \cdots + h_n f$ et le lemme 1.22 nous dit que

$$\mu(K) \leq \Lambda\left(\sum_{i=1}^n h_i\right) = \sum_{i=1}^n \Lambda h_i.$$

Comme $h_i f \leq (y_i + \varepsilon)h_i$ et $y_i - \varepsilon \leq f$ sur E_i, on calcule

$$\begin{aligned}
\Lambda f &= \sum_{i=1}^n \Lambda(h_i f) \leq \sum_{i=1}^n (y_i+\varepsilon)\Lambda h_i = \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon)\Lambda h_i - |a| \sum_{i=1}^n \Lambda h_i \\
&\leq \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon)(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}) - |a| \sum_{i=1}^n \Lambda h_i = \sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon)\mu(E_i) + 2\varepsilon\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) \\
&\leq \int_X f\, d\mu + \varepsilon(2\mu(K) + |a| + b + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, la preuve de (1.15) est complète. □

Ceci achève la preuve du théorème 1.19. □

1.3 Mesures de Borel positives

Définition 1.31.

1. Une mesure μ définie sur la σ-algèbre des boréliens $\mathcal{B}$ d'un espace de Hausdorff localement compact, disons, X est appelée une *mesure borélienne* sur X.
2. On dit qu'elle est intérieurement régulière si $\forall E \in \mathcal{B}$, $\mu(E) = \sup\{\mu(K);\ K \subset E,\ K \text{ compact}\}$.
3. On dit qu'elle est extérieurement régulière si $\forall E \in \mathcal{B}$, $\mu(E) = \inf\{\mu(V);\ E \subset V,\ V \text{ ouvert}\}$.
4. On dit qu'elle est régulière si elle est intérieurement régulière et extérieurement régulière

La mesure construite dans le Théorème 1.19 n'est pas forcément régulière dans le sens défini ci-dessus : elle est extérieurement régulière mais la régularité intérieure n'est vraie que sur des ensembles spéciaux. Cela ne peut être amélioré sans hypothèse supplémentaire (voir [6, Chapitre 2, exercice 17]). On va maintenant voir qu'avec un léger renforcement des hypothèses, ce problème disparaît.

Définition 1.32.

1. Un sous-ensemble E d'un espace topologique est dit σ-compact s'il est la réunion dénombrable de compacts.
2. Un sous-ensemble E d'un espace topologique est appelé F_σ s'il est réunion dénombrable de fermés.
3. Un sous-ensemble E d'un espace topologique est appelé G_δ s'il est intersection dénombrable d'ouverts.
4. Un sous-ensemble E d'un espace mesuré (X, μ) est dit σ-fini s'il est la réunion dénombrable d'ensembles de mesure finie.

Exercice 1.33. Montrer qu'un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) de dimension finie muni d'une norme est σ-compact.

Théorème 1.34. *Supposons que X est un espace de Hausdorff localement compact, σ-compact. Supposons que $\mathcal{S}$ et μ sont respectivement une σ-algèbre sur X et une mesure positive sur cette σ-algèbre satisfaisant aux propriétés (2)-(5) du Théorème 1.19.*
Alors $\mathcal{S}$ et μ vérifient

1. *pour tout $E \in \mathcal{S}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F, fermé de X, et V, ouvert de X, tels que $F \subset E \subset V$ et $\mu(V \setminus F) < \varepsilon$;*
2. *la mesure μ est une mesure de Borel régulière ;*
3. *si $E \in \mathcal{S}$, il existe des ensembles A et B tels que A est un F_σ, B un G_δ, $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$.*

Démonstration. On sait que $X = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup \cdots$ où $(K_i)_{i \geq 1}$ sont des compacts. Si $E \in \mathcal{S}$ et $\varepsilon > 0$ alors, pour $n \geq 1$, $\mu(K_n \cap E) < +\infty$ et il existe V_n ouvert tel que $V_n \supset K_n \cap E$ et

$$\mu(V_n \setminus (K_n \cap E)) \leq 2^{-n-1}\varepsilon.$$

Si $V = \bigcup_{n \geq 1} V_n$ alors $V \setminus E \subset \bigcup_{n \geq 1} (V_n \setminus (K_n \cap E))$ ainsi

$$\mu(V \setminus E) < \varepsilon/2. \tag{1.19}$$

De même pour E^c, on peut trouver un ouvert $W \supset E^c$ tel que $\mu(W \setminus E^c) < \varepsilon/2$. On pose alors $F = W^c$. On a $F \subset E$ et $E \setminus F = W \setminus E^c$. Ceci démontre le point 1.
Tout fermé de X est lui aussi σ-compact (car l'intersection d'un fermé et d'un compact est compact dans un espace de Hausdorff). Ainsi le point 1 implique la régularité intérieure de μ (la régularité extérieure ayant été supposée vraie) ; on a donc démontré le point 2.
Pour $j \geq 1$, on peut choisir $\varepsilon = 1/j$ dans (1.19) ; on obtient ainsi, pour $j \leq 1$, F_j fermé et V_j ouvert tels que $F_j \subset E \subset V_j$ et $\mu(V_j \setminus F_j) < 1/j$. Posons $A = \cup_j F_j$ et $B = \cap_j V_j$. Alors A est un F_σ, B un G_δ et $\mu(B \setminus A) = 0$ car $\mu(B \setminus A) \leq \mu(V_j \setminus F_j) < 1/j$ ceci pour tout $j \geq 1$. Ceci démontre le point 3 et achève la preuve du théorème 1.34. ☐

On va utiliser ce résultat pour obtenir le

Théorème 1.35. *Soit un espace de Hausdorff localement compact dans lequel tout ouvert est σ-compact. Sur cet espace, toute mesure borélienne positive vérifiant que tout compact est de mesure finie est régulière.*

Exercice 1.36. Soit X un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) de dimension finie muni d'une norme. Montrer que tout ouvert de X est σ-compact.

Démonstration. Pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$, on peut définir $\Lambda f := \int_X f(x)d\mu(x)$. Comme $\mu(K)$ est finie pour K compact, l'intégrale est bien convergente et on a $|\Lambda f| \leq \mu(\operatorname{supp} f)\,\|f\|_\infty$. Par linéarité de l'intégrale, Λ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_c(X)$; comme μ est positive, Λ est positive. Par le théorème 1.19, on peut lui associer une mesure borélienne λ qui vérifie alors

$$\int_X f d\lambda = \Lambda f = \int_X f d\mu. \tag{1.20}$$

Pour démontrer le théorème 1.35, il suffit de montrer que λ et μ coïncident.
Soit V un ouvert de X. Alors par hypothèse, il existe $(K_j)_{j\geq 1}$ des compacts de X tels que $V = \cup K_j$. Par le lemme d'Urysohn (le théorème 1.17), pour $j \geq 1$, on peut trouver $f_j \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $K_j \prec f_j \prec V$. Soit $g_n = \max(f_1, \cdots, f_n)$. On a $g_n \in \mathcal{C}_c(X)$ et $g_n(x) \nearrow \mathbf{1}_V(x)$ en tout point $x \in X$. Ainsi (1.20) et le théorème de convergence monotone impliquent

$$\lambda(V) = \lim_{n\to+\infty} \int_X g_n d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_X g_n d\mu = \mu(V). \tag{1.21}$$

Soit E un borélien de X et $\varepsilon > 0$. En appliquant le théorème 1.34 à λ, on construit F fermé et V ouvert tels que $F \subset E \subset V$ et $\lambda(V \setminus F) < \varepsilon$. Ainsi $\lambda(V) \leq \lambda(F) + \varepsilon \leq \lambda(E) + \varepsilon$.
Or $V \setminus F$ est ouvert ; donc, par (1.21), on a $\mu(V \setminus F) < \varepsilon$ c'est-à-dire $\mu(V) \leq \mu(E) + \varepsilon$. Par conséquent,

$$\lambda(E) \leq \lambda(V) = \mu(V) \leq \mu(E) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \mu(E) \leq \mu(V) = \lambda(V) \leq \lambda(E) + \varepsilon$$

ainsi $|\lambda(E) - \mu(E)| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $\lambda(E) = \mu(E)$. Ceci prouve le théorème 1.35. □

1.3.1 La mesure de Lebesgue

Nous allons maintenant construire la mesure de Lebesgue qui est un cas particulier des mesures positives construites dans le chapitre précédent.

Définition 1.37.
1. On appelle *boîte* un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ de la forme $[a_1, b_1[\times[a_2, b_2[\times\cdots\times[a_d, b_d[$ (où $a_i \leq b_i$ pour $1 \leq i \leq d$).
2. Le point $(a_1, \cdots, a_d)$ est appelé le *coin* de la boîte.
3. Le *volume* de la boîte $B := [a_1, b_1[\times[a_2, b_2[\times\cdots\times[a_d, b_d[$ est le réel positif ou nul $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdot(b_d - a_d)$; il est noté $\mathrm{Vol}(B)$.
4. Pour $\delta > 0$ et $(a_1, \cdots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, la *$\delta$-boîte de coin* $(a_1, \cdots, a_d)$ est la boîte $\underset{1\leq i\leq d}{\times}[a_i, a_i + \delta[$.

On construit la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ par le

Théorème 1.38. *Il existe une unique mesure complète λ_d définie sur une σ-algèbre $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$\lambda_d(B) = Vol(B)$ pour toute boîte B ;*
2. *la σ-algèbre $\mathcal{S}$ contient tous les boréliens ; plus précisément, $E \in \mathcal{S}$ si et seulement s'il existe des ensembles A et B tels que A est un F_σ, B un G_δ, $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$; de plus, λ_d est régulière ;*
3. *λ_d est invariante par translation i.e. si $E \in \mathcal{S}$ et $x \in \mathbb{R}^d$, alors $x + E \in \mathcal{S}$ et $\lambda_d(x + E) = \lambda_d(E)$.*

De plus, λ_d vérifie

4. *si μ est une mesure borélienne positive sur $\mathbb{R}^d$, finie sur tout compact qui, de plus, est invariante par translation, alors il existe $c \geq 0$ telle que $\mu = c \cdot \lambda_d$;*

5. *pour* $T: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *une application linéaire et* $E \in \mathcal{S}$*, on a* $T(E) \in \mathcal{S}$ *et* $\lambda(T(E)) = |det(T)|\,\lambda(E)$ *(où* $det(T)$ *désigne le déterminant de l'application linéaire* T*).*

Démonstration. Commençons par construire un analogue multidimensionnel des sommes de Riemann. Pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{P}_n = 2^{-n}\mathbb{Z}^d$ i.e. $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des points dont les coordonnées sont toutes des multiples entiers relatifs de 2^{-n}. Soit Ω_n la famille des 2^{-n}-boîtes dont les coins se trouvent en un point de $\mathcal{P}_n$. On vérifie facilement les trois propriétés suivantes de Ω_n :

1. pour n fixé, chaque point de $\mathbb{R}^d$ appartient à exactement une boîte de Ω_n ;
2. si $B \in \Omega_n$ et $B' \in \Omega_r$ et $r < n$ alors soit $B \subset B'$ soit $B \cap B' = \emptyset$;
3. si $B \in \Omega_r$ alors $\mathrm{vol}(B) = 2^{-rd}$ et si de plus $n > r$, B contient exactement $2^{(n-r)d}$ points de $\mathcal{P}_n$.

De plus les familles $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ vérifient

Lemme 1.39. *Tout ouvert non vide de* $\mathbb{R}^d$ *est une union disjointe dénombrable de boîtes dans* $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots$.

Démonstration. Soit V un ouvert. Clairement V est la réunion des boîtes contenues dans V et appartenant à l'un des Ω_n. De ces boîtes, on peut séparer celles appartenant à Ω_1 de celles appartenant à $\Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \cdots$; par la propriété 2, on peut choisir ces dernières boîtes de façon qu'elle ne rencontrent aucune des boîtes dans Ω_1. Puis, on considère les boîtes appartenant à Ω_2 que l'on sépare de celles appartenant à $\Omega_3 \cup \Omega_4 \cup \cdots$; on peut encore appliquer la propriété 2 à ces dernières boîtes. En continuant cette procédure on obtient la décomposition souhaitée pour l'ouvert V. □

Pour $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, on définit

$$\Lambda_n f = 2^{-nd} \sum_{x \in \mathcal{P}_n} f(x). \tag{1.22}$$

où $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des coins des cubes dans Ω_n. Comme f est à support compact, la somme dans (1.22) ne contient qu'un nombre fini de termes. Λ_n est linéaire et positive.
Montrons que $\Lambda_n f$ converge vers, disons, Λf qui sera donc linéaire et positive. On peut sans perte de généralité supposer que f est à valeurs réelles. Pour $x \in \mathcal{P}_n$, soit B_x^n l'unique boîte de Ω_n dont le coin est x. On définit

$$\Lambda_n^+ f = 2^{-nd} \sum_{x \in \mathcal{P}_n} \sup_{y \in B_x^n} f(y) \quad \text{et} \quad \Lambda_n^- f = 2^{-nd} \sum_{x \in \mathcal{P}_n} \inf_{y \in B_x^n} f(y).$$

Comme f est à support compact, ces sommes sont finies. Clairement, par la propriété 2 des boîtes de Ω_n, on a

$$\Lambda_n^- f \leq \Lambda_{n+1}^- f \quad \text{et} \quad \Lambda_{n+1}^+ f \leq \Lambda_n^+ f \quad \text{et} \quad \Lambda_n^- f \leq \Lambda_n f \leq \Lambda_n^+ f$$

Comme f est uniformément continue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que, si $n \geq N$

$$\forall C \in \Omega_n, \quad 0 \leq \sup_C f - \inf_C f \leq \varepsilon$$

Si f est à support dans $[-k, k[^d$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$), on estime donc, pour $n \geq N$,

$$\Lambda_n^+ f - \Lambda_n^- f = 2^{-nd} \sum_{\substack{C \in \Omega_n \\ C \cap [-k,k[^d \neq \emptyset}} (\sup_C f - \inf_C f) \leq 2^{-nd}(2k)^d 2^{nd}\varepsilon = (2k)^d\varepsilon.$$

Les suites $(\Lambda_n^- f)_n$ et $(\Lambda_n^+ f)_n$ sont donc adjacentes. Ainsi la suite $(\Lambda_n f)_n$ converge vers une limite que l'on note Λf. Celle-ci est bien sûr linéaire et positive.

Remarque 1.40. La somme $\Lambda_n f$ est une somme de Riemann pour f. Nous venons donc juste de construire l'intégrale de Riemann d'une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}^d$.

Le théorème 1.19 nous donne alors une σ-algèbre $\mathcal{S}$ et sur $\mathcal{S}$, une mesure λ_d représentant Λ. Vérifions qu'elle a les propriétés annoncées dans le théorème 1.38. Cette mesure est complète et le théorème 1.35 nous donne le point 2 du théorème 1.38.
Montrons 1. Soit $B = \underset{1\le i\le d}{\times}[a_i, b_i[$ une boîte et E_n la réunion des boîtes de Ω_n dont l'adhérence est contenue dans l'intérieur de B. Soit f_n telle que $\overline{E_n} \prec f_n \prec \overset{\circ}{B}$. On pose $g_n = max(f_1, \cdots, f_n)$. On a alors que $g_n \nearrow \mathbf{1}_{\overset{\circ}{B}}$ ponctuellement quand $n \to +\infty$. Par la construction de Λ, pour n tel que $\min\limits_{1\le i\le d}(b_i - a_i) > 2^{1-n}$, on a

$$\prod_{j=1}^{d}(b_i - a_i - 2^{-n+1}) \le \Lambda f_n \le \Lambda g_n \le \mathrm{vol}(B)$$

Ainsi $\liminf\limits_{n\to+\infty} \Lambda f_n \ge$vol$(B)$ et, par convergence croissante, $\Lambda g_n = \displaystyle\int_X g_n d\lambda_d \nearrow \lambda_d(\overset{\circ}{B})$ par convergence croissante. Ainsi $\lambda_d(\overset{\circ}{B})$ =vol(B). Donc $\lambda_d(B) \ge \lambda_d(\overset{\circ}{B})$ =vol(B). De plus, pour $\varepsilon > 0$

$$\lambda_d(B) \le \lambda_d(\overset{\circ}{B} +]-\varepsilon, \varepsilon[^d) = \lambda_d\left(\overline{\overset{\circ}{B + [-\varepsilon, \varepsilon[^d}}\right) = \mathrm{vol}\left(B + [-\varepsilon, \varepsilon[^d\right) = \mathrm{vol}(B) + O(\varepsilon). \tag{1.23}$$

En laissant $\varepsilon \to 0^+$, on obtient le point 1.
Pour prouver 3, 4 et 5, on observe que, si λ est une mesure de Borel positive sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\lambda(E) = \lambda_d(E)$ pour toute boîte E alors cette égalité reste vraie pour tout E ouvert de $\mathbb{R}^d$ (par le lemme 1.39) et, donc, pour tout E borélien comme λ et λ_d sont régulières (par le théorème 1.35).
Pour montrer 3, on fixe $x \in \mathbb{R}^d$ et on définit $\lambda_x(E) := \lambda_d(E + x)$ pour E borélien. Clairement, λ_x est une mesure borélienne positive. Par le point 1, $\lambda_x(E) = \lambda_d(E)$ pour toute boîte, donc, pour tout borélien E, on a $\lambda_d(E) = \lambda_d(E + x)$ (d'abord par le Lemme 1.39 pour les ouverts puis par régularité extérieure). Enfin, par le point 2, cette égalité reste vraie sur $\mathcal{S}$.
Supposons que λ vérifie les hypothèses de 4. Pour $n \ge 1$, $[0, 1[^d$ se partitionne de la façon suivante $[0, 1[^d = \bigcup\limits_{x\in\mathcal{P}_n\cap[0,1[^d} x + [0, 2^{-n}[^d$ où la réunion est disjointe. On en déduit que

$$2^{nd}\lambda([0, 2^{-n}[^d) = \lambda([0, 1[^d) = c\,\lambda_d([0, 1[^d) = c2^{nd}\lambda_d([0, 2^{-n}[^d)$$

où $c := \lambda([0, 1[^d)$. Donc, par invariance par translation, pour tout $Q \in \Omega_n$, $\lambda(Q) = c\,\lambda_d(Q)$. Le lemme 1.39 et la σ-additivité impliquent alors que pour tout ouvert E de $\mathbb{R}^d$, on a $\lambda(E) = c\,\lambda_d(E)$. Ceci prouve 4.
Démontrons 5. Commençons par le démontrer pour $T = U$ où U est une isométrie i.e. $U\,{}^tU = {}^t\,U\,U = 1$. L'application $E \mapsto \lambda_d(U(E))$ définit une mesure borélienne qui satisfait à toutes les conditions du point 4. Il existe donc une constante $c(U)$ telle que $\lambda_d(U(E)) = c(U)\lambda_d(E)$. Pour $E = B_2(0, 1)$ la boule euclidienne centrée en 0 de rayon 1, on a bien sûr $U(E) = E$. Ainsi $c(U) = 1$.
Soit maintenant T linéaire sur $\mathbb{R}^d$. Si T n'est pas bijective, alors l'image de T est contenue dans un hyperplan de $\mathbb{R}^d$. Il existe donc une isométrie U telle que $E := U(\mathrm{Im}\,T) \subset \{x = x(_1, \cdots, x_d);\ x_1 = 0\}$. On a donc pour tout $\varepsilon > 0$,

$$E \subset \bigcup_{n\ge1} P_{n,\varepsilon} \quad \text{où} \quad P_{n,\varepsilon} = [-\varepsilon 2^{-d(n+1)}, \varepsilon 2^{-d(n+1)}[\times[-2^n, 2^n[^{d-1}$$

Ainsi $\operatorname{Im} T \subset A_\varepsilon = \bigcup_{n\geq 1} {}^tU(P_{n,\varepsilon})$. Clairement $A_\varepsilon \subset A_{\varepsilon'}$ si $\varepsilon \leq \varepsilon'$. De plus, par ce qui vient d'être montré pour les isométries, on a

$$\lambda_d(A_\varepsilon) \leq \sum_{n\geq 1} \lambda_d(P_{n,\varepsilon}) \leq \varepsilon \sum_{n\geq 1} 2^{-d(n+1)+d+n(d-1)} = \varepsilon.$$

Donc $\operatorname{Im} T$ est contenue dans $\bigcap_{n\geq 1} A_{1/n}$ qui est de mesure nulle. Comme λ_d est complète, $\operatorname{Im} T$ est mesurable et $\lambda_d(\operatorname{Im} T) = 0$. On obtient donc 5 quand $\det(T) = 0$.
Supposons maintenant que $\det(T) \neq 0$. Par le raisonnement fait pour une isométrie, on sait que $\lambda_d(T(E)) = c(T)\lambda_d(E)$ pour tout borélien. On en déduit que si T et T' inversible alors $c(T\,T') = c(T)c(T')$. D'autre part, T peut se décomposer en un produit de matrices $T = T_1\,T_2 \cdots T_m$ où chacune des matrices T_i est de l'une des trois types suivants (ici $\{e_1, e_2, \cdots, e_d\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^d$) :

1. $\{Te_1, Te_2, \cdots, Te_d\}$ est une permutation de $\{e_1, e_2, \cdots, e_d\}$; dans ce cas, si $C = [0,1[^d$, on voit que $T(C) = C$ et donc $c(T) = 1$; clairement, on a $\det T = 1$; donc $c(T) = |\det T|$;
2. $Te_1 = \alpha e_1$ pour $\alpha \neq 0$ et $Te_j = e_j$ si $2 \leq j \leq d$; dans ce cas, on voit que $T(C) = [0,\alpha[\times[0,1[^{d-1}$ si $\alpha > 0$ et $T(C) =]\alpha, 0] \times [0,1[^{d-1}$ si $\alpha < 0$; ainsi $c(T) = |\alpha|$; clairement, on a $\det T = \alpha$; donc $c(T) = |\det T|$;
3. $Te_1 = e_1 + e_2$ pour $\alpha \neq 0$ et $Te_j = e_j$ si $2 \leq j \leq d$; dans ce cas, on voit que $T(C) = \{(x_1, x_2);\ x_1 \leq x_2 \leq x_1 + 1,\ x_1 \in [0,1[\} \times [0,1[^{d-2}\}$ donc $T = T_1 \cup T_2$ où $T_1 = T \cap \{x_2 < 1\}$ et $T_2 = T \cap \{x_2 \geq 1\}$; on a $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ et si on pose $S_2 = T_2 - e_2$, on a $T_1 \cap S_2 = \emptyset$ et $T_1 \cup S_2 = C$; donc $\lambda_d(T(C)) = \lambda_d(C)$ c'est-à-dire $c(T) = 1$; clairement, on a $\det T = 1$; donc $c(T) = |\det T|$.

Comme $T = T_1\,T_2 \cdots T_m$, on calcule

$$c(T) = c(T_1)\,c(T_2) \cdots c(T_m) = |\det T_1|\,|\det T_2| \cdot |\det T_m| = |\det T|.$$

Ceci achève la preuve du théorème 1.38. $\square$

1.3.2 Continuité et mesurabilité

Si la topologie et la σ-algèbre auxquelles réfèrent les deux termes du titre de la section ne sont pas reliées, il n'y a bien sûr pas lieu d'espérer une relation entre ces notions.
Sur un espace de Hausdorff localement compact, il en va tout autrement si la mesure μ et $\mathcal{S}$, la σ-algèbre associée vérifient les propriétés (2)-(5) du théorème 1.19. Nous nous placerons désormais, et pour toute cette section, dans ce cadre.

Théorème 1.41. *(Théorème de Lusin) Soient $f : X \to \mathbb{C}$ mesurable et $A \in \mathcal{S}$ tels que $\mu(A) < +\infty$ et $f(x) = 0$ si $x \notin A$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $g \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que*

$$\mu(\{x \in X;\ f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon. \tag{1.24}$$

On peut de plus choisir g de façon que

$$\sup_{x\in X} |g(x)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)|. \tag{1.25}$$

Démonstration. Soit $f \geq 0$ mesurable positive. On construit une suite croissante de fonctions mesurables simples (i.e. de la forme $\sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}$ où $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $E_i \in \mathcal{S}$), disons, $(s_n)_{n\geq 1}$ telle que $s_n \to f$ simplement sur X. Pour cela, pour $n \geq 1$, on définit

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 2^{-n}k_n \text{ où } k_n \text{ est l'unique entier tel que } 2^{-n}k_n \leq t < 2^{-n}(k_n+1) \text{ quand } t \in [0, n[, \\ 0 \text{ quand } t \geq n. \end{cases}$$

On vérifie que chaque fonction $\varphi_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est borélienne, que

$$0 \le \inf_{t\in[0,n]} (t - \varphi_n(t)) \le \sup_{t\in[0,n]} (t - \varphi_n(t)) \le 2^{-n} \tag{1.26}$$

et si $n \ge m$, on a $\varphi_m \le \varphi_n$. On pose alors $s_n = \varphi_n \circ f$; la suite $(s_n)_{n\ge1}$ satisfait aux conditions requises.

Remarque 1.42. Notons que (1.26) montre que si f est bornée alors la convergence de $(s_n)_n$ vers f est uniforme.

Pour démontrer le théorème, commençons par supposer que $0 \le f \le 1$. On pose alors $t_1 = s_1$ et $t_n = s_n - s_{n-1}$ si $n \ge 2$. Par construction des $(s_n)_n$, $2^n t_n$ est l'indicatrice d'un ensemble T_n et

$$f(x) = \sum_{n\ge1} t_n(x), \quad \forall x \in X. \tag{1.27}$$

Supposons de plus que A est compact. Soit $\varepsilon > 0$ et V un ouvert relativement compact contenant A. Par le théorème 1.17, on peut trouver des compacts $(K_n)_{n\ge1}$ et des ouverts $(V_n)_{n\ge1}$ tels que, pour $n \ge 1$, $K_n \subset T_n \subset V_n \subset V$ et $\mu((V_n \setminus K_n) < 2^{-n}\varepsilon$. Par le lemme d'Urysohn, pour $n \ge 1$, on construit une fonction g_n telle que $K_n \prec g_n \prec V_n$. Posons

$$g(x) = \sum_{n\ge1} 2^{-n} g_n(x), \quad \forall x \in X. \tag{1.28}$$

La série converge uniformément sur X et définit donc une fonction continue dont le support est compact (car contenu dans $\overline{V}$). Comme $2^{-n}g_n(x) = t_n(x)$ pour $x \notin (V_n \setminus K_n)$, par (1.27) et (1.28) on sait que f et g coïncide sauf au plus sur $\bigcup_{n\ge1}(V_n \setminus K_n)$. Or on a $\mu(\bigcup_{n\ge1}(V_n \setminus K_n)) \le \sum_{n\ge1} \mu(V_n \setminus K_n) \le \varepsilon$. On a ainsi démontré le théorème 1.41 si f est à valeurs dans $[0,1]$ et A compact.
Supposons maintenant que A est compact et que f est bornée. On se ramène au cas où f est à valeurs réelles en passant aux parties réelle et imaginaire de f. Pour f à valeurs réelles, bornée à support compact, soit M son supremum supposé non nul. Prenons $A \prec g$. Alors on applique le résultat déjà démontré à $\tilde{f} := (f + M\,g)/2M$ pour obtenir celui annoncé pour f.
Si f est bornée mais que A vérifie seulement $\mu(A) < +\infty$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \subset A$ compact tel que $\mu(A \setminus K) \le \varepsilon/2$. Puis, on applique le résultat déjà obtenu pour f et K. Ceci démontre donc le premier énoncé du théorème 1.41 quand f est bornée.
Pour obtenir le second énoncé dans ce cas, il suffit de modifier g de la façon suivante. Pour $z \in \mathbb{C}$, posons $\varphi(z) = z$ si $|z| \le R := \sup_{x\in X} |f(x)|$ et $\varphi(z) = R\,z\,|z|^{-1}$ si $|z| \ge R$. Alors φ est une application continue de $\mathbb{C}$ dans le disque centré en 0 de rayon R. Si g satisfait (1.24) alors $g_1 = \varphi \circ g$ satisfait (1.24) et (1.25).
Enfin, si f n'est pas bornée, on a $\cap_{n\ge1}\{x;\ |f(x)| > n\} = \emptyset$. Donc, comme $\mu(\{x \in A;\ |f(x)| > 0\}) \le \mu(A) < +\infty$, on a $\mu(\{x \in A;\ |f(x)| > n\}) \searrow 0^+$ quand $n \to +\infty$ par convergence croissante. On peut alors appliquer le résultat déjà démontré à $f \cdot \mathbf{1}_{\{x;\ |f(x)|\le n\}}$ (qui est bornée) pour n suffisamment grand pour que $\mu(\{x;\ |f(x)| > n\}) < \varepsilon/2$ et conclure.
Ceci achève la preuve du théorème 1.41. $\square$

Corollaire 1.43. *Sous les hypothèse du théorème 1.41, si* $\sup_{x\in X} |f(x)| \le 1$ *alors il existe une suite* $(g_n)_{n\ge1}$ *dans* $\mathcal{C}_c(X)$ *tels que, pour* $n \ge 1$, $\sup_{x\in X} |g_n(x)| \le 1$ *et, pour* μ*-presque tout* x, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$.