Ainsi, si $(F_n * f(t))_n$ converge vers a, (3.50) donne

$$|S_n(f)(t) - a| \leq \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}|F_{[\lambda n]} * f(t) - a| + \frac{n+1}{[\lambda n]-n}|F_n * f(t) - a| + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

si on choisit n assez grand.
Ceci prouve le premier point du théorème 3.73. L'uniformité suit de l'uniformité en t dans la borne (3.51). □

Corollaire 3.74. *Si f est de variations bornées (voir section 2.3.3), alors, en tout point t, $S_n(f)(t)$ converge vers $\frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0))$ et vers $f(t)$ aux points de continuité. La convergence est uniforme sur les intervalles compacts sur lesquels f est continue.*

Démonstration. Le théorème 3.34 nous dit que les coefficients de Fourier de f à variation bornée vérifient (3.49). Le théorème de Fejér, i.e. le théorème 3.22, nous permet alors de conclure en utilisant l'exercice 2.57. □

Lemme 3.75. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $t \mapsto f(t)/t$ est aussi intégrable sur $\mathbb{T}$. Alors $S_n(f)(0) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.*

Démonstration. Par (3.37), en utilisant la formule d'addition du sinus, on calcule

$$S_n(f)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(t)}{\sin(t/2)}\sin((n+1/2)t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(t)\cos(t/2)}{\sin(t/2)}\sin(nt)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\cos(nt)dt. \tag{3.52}$$

Comme, par hypothèse, $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \frac{f(t)\cos(t/2)}{\sin(t/2)}$ sont intégrables sur $\mathbb{T}$, le résultat du lemme suit directement du lemme de Riemann-Lebesgue. □

Théorème 3.76 (Principe de localisation)**.** *Soit $f \in L^1(T)$ qui s'annule dans un intervalle ouvert I. Alors $S_n(f)(t)$ converge vers 0 pour $t \in I$ et, cette convergence est uniforme sur les compacts de I.*

Démonstration. La convergence vers 0 est un conséquence immédiate du lemme 3.75. Pour $\tau \in \mathbb{T}$, on a

$$S_n(f)(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{f(t+\tau)\cos(t/2)}{\sin(t/2)}\sin(nt)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t+\tau)\cos(nt))dt.$$

Les applications $t \in \mathbb{T} \mapsto f(\cdot+\tau) \in L^1(\mathbb{T})$ et $t \in I \mapsto \dfrac{f(\cdot+\tau)\cos(\cdot/2)}{\sin(\cdot/2)} \in L^1(\mathbb{T})$ sont continues par l'hypothèse faite sur f et I (et par le corollaire 1.70). Si $K \subset I$ est compact, alors les images de K par ces applications sont des compacts de $L^1(\mathbb{T})$ auxquels on peut appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue uniforme, lemme 3.12 ce qui donne la convergence uniforme annoncée. □

Une autre conséquence immédiate du lemme 3.75 est le

Théorème 3.77 (Critère de Dini)**.** *Soit f intégrable sur $\mathbb{T}$. Si $t \mapsto \dfrac{f(t+t_0)-f(t_0)}{t}$ est intégrable sur $\mathbb{T}$ alors $S_n(f)(t_0) \underset{n\to+\infty}{\to} f(t_0)$.*

3.3 Fonctions harmoniques

Pour $z \in \mathbb{C}$, on note $z = x + iy$.

Définition 3.78. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit que $u \in \mathcal{C}(U)$ est *harmonique sur U* si en tout point de D, ses dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ existent et vérifient $\Delta u := \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Pour qu'une fonction soit harmonique, il faut et il suffit que ses parties réelle et imaginaire le soient.

Remarque 3.79. On rappelle que si $f: U \to \mathbb{C}$ est holomorphe (c'est-à-dire $\mathbb{C}$-différentiable i.e. pour $z_0 \in U$, il existe $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + o(z - z_0)$ au voisinage de z_0) alors elle est indéfiniment différentiable en (x, y). La fonction f vérifie alors dans U l'équation de Cauchy-Riemann

$$\overline{\partial} f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0. \tag{3.53}$$

De plus, si on note $\partial f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, alors $f'(z_0) = \partial f(z_0)$.
Réciproquement, si f est continue et vérifie l'équation de Cauchy-Riemann sur U alors elle est holomorphe dans U.
Rappelons, enfin, que f est holomorphe dans U si et seulement si f est développable en série entière au voisinage de chaque point de U.
On calcule

$$4\overline{\partial}\partial f = 4\partial\overline{\partial} f = \Delta f. \tag{3.54}$$

Ainsi une fonction holomorphe dans U est harmonique dans U.

L'égalité (3.54) implique que la partie réelle (ainsi que la partie imaginaire) d'une fonction holomorphe est harmonique. On verra un peu plus loin que ce résultat admet une réciproque.

3.3.1 Le noyau de Poisson

Pour $0 \leq r < 1$ et $t \in \mathbb{T}$, le noyau de Poisson est la fonction

$$P(r,t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} r^{|j|} e^{ijt} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2} = \operatorname{Re}\left(\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}}\right). \tag{3.55}$$

On vérifie facilement que

1. $P(r,t) > 0$,
2. $P(r,-t) = P(r,t)$,
3. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,t)dt = 1$,
4. pour $0 < \delta < |t| \leq \pi$, on a $P(r,t) \leq P(r,\delta)$,
5. $P(r,\delta) \to 0$ quand $r \to 1^-$ (avec $0 < \delta \leq \pi$)

Ainsi, si $(r_n)_n$ est une suite positive telle que $r_n \to 1^-$ la suite $(t \mapsto P(r_n, t))_n$ est une approximation de l'identité (voir la définition 3.7).
On note $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$, le disque unité ouvert, et $\overline{D}$ sa clôture, le disque unité fermé. En posant $z = re^{it} \in D$, on calcule

$$P(r, t - \tau) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\tau} + z}{e^{i\tau} - z}\right) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\tau} - z|^2}. \tag{3.56}$$

3.3.2 L'intégrale de Poisson

En posant $z = e^{it}$, on identifie $\mathbb{T}$ avec le cercle unité $\{z;\ |z| = 1\}$ du plan complexe. Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on note $f(re^{it})$, $r < 1$, son intégrale de Poisson (voir la remarque 3.21),

$$f\left(re^{it}\right) := P(r, \cdot) * f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} \hat{f}(n). \tag{3.57}$$

On va considérer cette fonction comme une fonction de la variable complexe $z = re^{it}$ dans D.
Si f est à valeurs réelles, alors

$$f(z) = f\left(re^{it}\right) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\tau} + z}{e^{i\tau} - z} f(e^{i\tau}) d\tau\right]. \tag{3.58}$$

Par le théorème différentiation sous le signe somme, la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\tau} + z}{e^{i\tau} - z} f(e^{i\tau}) d\tau$$

est holomorphe dans D. Ainsi $z \mapsto f(re^{it})$ est harmonique dans D si f est à valeurs réelles. Ceci reste vrai pour f intégrable sur $\mathbb{T}$ en la décomposant comme la somme de ses parties réelle et imaginaire. On a donc démontré

Proposition 3.80. *Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, l'intégrale de Poisson $f(re^{it})$ est une fonction harmonique dans D.*

On a

Théorème 3.81. *Soit u une fonction continue à valeurs réelles sur $\overline{D}$ harmonique dans D. Alors, dans D, u est l'intégrale de Poisson de sa restriction à $\mathbb{T}$ et elle est la partie réelle de la fonction holomorphe*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\tau} + z}{e^{i\tau} - z} u(e^{i\tau}) d\tau, \quad z \in D. \tag{3.59}$$

Démonstration. Par le théorème de différentiation sous le signe somme, la fonction f définie par (3.59) est holomorphe dans D. Il nous suffit de montrer que $u = u_1$ où $u_1 = \mathrm{Re}\, f$.
Montrons d'abord que u_1 se prolonge continûment sur $\overline{D}$ et que $(u_1)_{|\mathbb{T}} = u_{|\mathbb{T}}$. Il suffit donc de montrer que

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \mathrm{Re}\frac{e^{i\tau} + re^{it}}{e^{i\tau} - re^{it}} u(e^{i\tau}) d\tau = u(e^{it}). \tag{3.60}$$

En utilisant les propriétés de $P(r,t)$ (voir les points 1-5 dans la section 3.3.1), pour δ positif petit arbitraire, on calcule

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \mathrm{Re}\frac{e^{i\tau} + re^{it}}{e^{i\tau} - re^{it}} u(e^{i\tau}) d\tau - u(e^{it})\right| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathbb{T}} \mathrm{Re}\frac{e^{i\tau} + re^{it}}{e^{i\tau} - re^{it}}\left(u(e^{i\tau}) - u(e^{it})\right) d\tau\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P(r, t-\tau)\left|u(e^{i\tau}) - u(e^{it})\right| d\tau \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\sup_{|t-\tau| \leq \delta} |u(e^{i\tau}) - u(e^{it})| + 2\sup_{t \in \mathbb{T}} |u(e^{it})| \sup_{\substack{|t| \geq \delta \\ t \in \mathbb{T}}} P(r,t).
\end{aligned}$$

La continuité uniforme de u sur $\overline{D}$ nous permet de conclure (3.60).
Posons $h = u - u_1$. Alors h est continue sur $\overline{D}$, harmonique dans D et nulle sur $\mathbb{T}$. Supposons qu'il existe

$z_0 \in D$ tel que $h(z_0) > 0$. Soit $0 < \varepsilon < h(z_0)$. Pour $z \in \overline{D}$, posons $g(z) = h(z) + \varepsilon|z|^2$. Alors $g(z_0) \geq h(z_0) > \varepsilon$ or $g_{|T} = \varepsilon$. Donc il existe un point $z_1 \in D$ où g admet un maximum local. Ainsi en ce point $\partial_x^2 g \leq 0$ et $\partial_y^2 g \leq 0$. Mais le calcul direct montre que $\Delta g = 4\varepsilon > 0$ (comme $\Delta h = 0$).
Ainsi $h = u - u_1 \leq 0$. Le même argument montre que $u_1 - u \leq 0$ c'est-à-dire que $u = u_1$. Ceci achève la preuve du théorème 3.81. □

Le théorème 3.81 montre que, si u est harmonique dans D, il existe f holomorphe dans D tel que $u = \operatorname{Re} f$. En effet, u est continue dans D ; pour $0 < r < 1$, on peut donc appliquer le théorème précédent à la fonction $z \mapsto u(rz)$ ce qui définit une fonction $z \mapsto f_r(rz)$ holomorphe sur D. Ainsi $u(z) = \operatorname{Re} f_r(z)$ sur rD. Si $0 < r < r' < 1$, on a $\operatorname{Re}(f_r - f_{r'})(z) = 0$ sur rD. Donc, $f_r - f_{r'}$ est une fonction holomorphe à valeurs purement imaginaires sur rD ; elle est donc constante et cette constante peut être choisie nulle. Ainsi $f_{r'}$ est un prolongement holomorphe de f_r à $r'D$. On construit ainsi une fonction holomorphe sur $D = \bigcup_{0<r<1} rD$ telle que $u = \operatorname{Re} f$. On peut étendre ce résultat à un ouvert connexe.

Théorème 3.82. *Soit U un ouvert et $u : U \to \mathbb{R}$ harmonique. Alors il existe $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $u = \operatorname{Re} f$. De plus, si U est connexe, pour $z_0 \in U$, f est définie de façon unique par la valeur $f(z_0)$.*

Démonstration. Pour tout $z_0 \in U$ et $r_0 > 0$ tel que $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$, le raisonnement fait ci-dessus construit une fonction, disons, f_{z_0,r_0} holomorphe sur $z_0 + r_0 D$ telle que $u_{|z_0+r_0D} = \operatorname{Re} f_{z_0,r_0}$. Si $z_0 + r_0 D \cap z_0' + r_0' D \neq \emptyset$, on peut, quitte à les modifier par une constante imaginaire pure, garantir que $f_{z_0,r_0} = f_{z_0',r_0'}$ sur $z_0 + r_0 D \cap z_0' + r_0' D$. La collection de fonctions $(f_{z_0,r_0})_{z_0+r_0\overline{D}\subset U}$ définit alors une fonction holomorphe sur U telle que $u = \operatorname{Re} f$.
Supposons U est connexe et f et $\tilde{f}$ telles que $u = \operatorname{Re} f = \operatorname{Re} \tilde{f}$. Alors, pour $c \in \mathbb{R}$, $\{z \in U;\ f(z) - \tilde{f}(z) = c\}$ est fermé car $f - \tilde{f}$ est continue et ouvert car $f - \tilde{f}$ est holomorphe. Donc, comme U est connexe, $\{z \in U;\ f(z) - \tilde{f}(z) = c\} = \emptyset$ ou $\{z \in U;\ f(z) - \tilde{f}(z) = c\} = U$. Ainsi si f et $\tilde{f}$ prennent la même valeur en un point, elles sont égales sur U.
Ceci achève la preuve du théorème 3.82. □

Corollaire 3.83. *Soient U et V des ouverts de $\mathbb{C}$. Si f est holomorphe de V dans U et que g est harmonique de U dans $\mathbb{C}$ alors $g \circ f$ est harmonique sur V.*

Démonstration. En décomposant g en partie réelle et imaginaire, il suffit de prouver le corollaire pour g à valeurs réelles. On écrit alors $g = \operatorname{Re} G$ où G est holomorphe sur U. Donc $g \circ f = \operatorname{Re}(G \circ f)$ et $G \circ f$ est holomorphe sur V. La conclusion du corollaire suit. □

Exercice 3.84. Démontrer le corollaire en calculant directement $\Delta(g \circ f)$.

Définition 3.85. Soient $u : U \to \mathbb{R}$ harmonique et $v : U \to \mathbb{R}$. On dit que v est une *conjuguée harmonique* de u (sur U) si est seulement si $u + iv$ est holomorphe sur U.

Le théorème 3.82 garantit l'existence d'une conjuguée harmonique. Si U est connexe, elle unique à une constante réelle près.

Remarque 3.86. Dans D, la conjuguée harmonique de (3.57) est la fonction

$$\tilde{f}(re^{it}) = -i \sum_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{sign} n\, r^{|n|} e^{int} \hat{f}(n) = Q(r,\cdot) * f(t) \tag{3.61}$$

où l'on a posé

$$Q(r,t) = -i \sum_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{sign} n\, r^{|n|} e^{int} = \frac{2r\sin t}{1 - 2r\cos t + r^2}. \tag{3.62}$$

Q est la conjuguée harmonique du noyau de Poisson P (normalisé de façon que $Q(0,t) = 0$).

Du théorème 3.82 et de la remarque 3.79, on déduit immédiatement le

Corollaire 3.87. *Une fonction harmonique est indéfiniment différentiable.*

3.3.3 La propriété de la moyenne et le principe du maximum

Théorème 3.88. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$.*
Une fonction $u:\ U \to \mathbb{C}$ continue est harmonique sur U si et seulement si elle vérifie la propriété de la moyenne en tout point de U i.e. $\forall z_0 \in U$, $\forall r > 0$ tels que $z_0 + r\overline{D} \subset U$, on a

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})dt. \tag{3.63}$$

Démonstration. Supposons u harmonique dans U. Sans perte de généralité, on peut supposer que u est à valeurs réelles. Soient $z_0 \in U$ et $r_0 > 0$ tels que $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$. La formule de Poisson pour u dans $z_0 + r_0\overline{D}$ s'écrit alors, pour $0 < r < r_0$ et $z \in D$,

$$u\left(z_0 + r_0 z\right) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\tau} + z}{e^{i\tau} - z} u(z_0 + r_0 e^{i\tau})d\tau\right].$$

soit encore en écrivant $z = r\, r_0^{-1}\, e^{it}$ pour $0 \le r < r_0$,

$$u\left(z_0 + re^{it}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r\, r_0 \cos(t-\tau) + r^2} u(z_0 + r_0 e^{i\tau})d\tau. \tag{3.64}$$

En prenant $r = 0$, on obtient (3.63).
Réciproquement, soit u continue sur U et y vérifiant la propriété de la moyenne. Soient $z_0 \in U$ et $r_0 > 0$ tels que $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$. La formule de Poisson construit une fonction harmonique à valeurs réelles, disons, $\tilde{u}$ qui coïncide avec u sur le cercle $z_0 + r_0\mathbb{T}$. Soit $v = u - \tilde{u}$. La fonction v vérifie la propriété de la moyenne. Supposons $m := \max\limits_{z_0 + r_0\overline{D}} v(z) > 0$. v étant continue et $z_0 + r_0\overline{D}$ compact, ce maximum existe et est atteint. Comme il est strictement positif, il est atteint dans $z_0 + r_0 D$. Soit $\tilde{z}_0$ un tel maximum. Soit $\tilde{r}_0$ tel que $\tilde{z}_0 + \tilde{r}_0\overline{D} \subset z_0 + r_0 D$. Par la formule de la moyenne, pour $0 < r < \tilde{r}_0$, on a

$$m = v(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} v(\tilde{z}_0 + re^{it})dt \le m. \tag{3.65}$$

Or v est majorée par m dans $z_0 + r_0\overline{D}$. Comme v est continue, elle est constante égale à m sur $\tilde{z}_0 + r\mathbb{T}$ pour $0 < r < \tilde{r}_0$, c'est-à-dire, sur le disque $\tilde{z}_0 + \tilde{r}_0\overline{D}$. On voit ainsi que l'ensemble $\{z \in z_0 + r_0\overline{D};\ v(z) = m\}$ est ouvert ; il est clairement fermé ; ainsi, comme $z_0 + r_0\overline{D}$ est connexe, v est constante sur $z_0 + r_0\overline{D}$. Or, sur le bord $z_0 + r_0\mathbb{T}$, elle est nulle ; ainsi $m \le 0$. Comme on peut appliquer le même raisonnement à $-v$, on obtient v est identiquement nulle et que u et $\tilde{u}$ coïncident sur $z_0 + r_0\overline{D}$. Enfin, comme z_0 et r_0 sont arbitraires tels que $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$, on obtient que $u = \tilde{u}$ sur U.
Ceci achève la preuve du théorème 3.88. $\square$

Remarque 3.89. En intégrant (3.63) par rapport au rayon du cercle, on voit que si u vérifie la propriété de la moyenne (3.63) sur U, elle vérifie aussi

$$u(z_0) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{z_0 + r\overline{D}} u(z)dxdy \tag{3.66}$$

si $z_0 + r\overline{D} \subset U$.

Une autre propriété importante des fonctions harmoniques est

Théorème 3.90 (Le principe du maximum)**.** *Soit U un ouvert connexe borné et $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$ continue et harmonique dans U. Alors $\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u$ et s'il existe $x_0 \in U$ tel que $u(x_0) = \max_{\overline{U}} u$ alors u est constante égale à $u(x_0)$.*

Démonstration. Comme u est continue sur $\overline{U}$ compact, il existe $x_0 \in \overline{U}$ tel que $u(x_0) = \max_{\overline{U}} u$. En prenant $v = u$ dans la preuve du théorème 3.88, on obtient immédiatement l'énoncé du théorème 3.90. □

Une conséquence de la formule de la moyenne est le

Théorème 3.91 (Théorème de Harnack)**.** *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions harmoniques dans un ouvert connexe U.*

1. *Si $u_n \to u$ localement uniformément dans U (i.e. uniformément sur tout compact de U) alors u est harmonique sur U.*
2. *Si $u_1 \leq u_2 \leq \cdots$ alors soit $(u_n)_n$ converge localement uniformément dans U soit elle diverge vers $+\infty$ sur tout U.*

Démonstration. Démontrons 1. Comme $(u_n)_n$ converge uniformément vers u sur tout compact de U, u est continue et elle vérifie la propriété de la moyenne (comme conséquence du théorème de convergence dominée et car tous les $(u_n)_n$ la vérifient). Donc u est harmonique.
Démontrons 2. Quitte à soustraire u_1 à tous les éléments de la suite, on peut supposer $u_1 \geq 0$. Posons $u = \sup u_n$. Soit $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$. Alors, pour $0 \leq r \leq r_0$, le noyau de Poisson satisfait à

$$\frac{r_0 - r}{r_0 + r} \leq \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r\, r_0 \cos(t - \tau) + r^2} \leq \frac{r_0 + r}{r_0 - r}.$$

Ainsi, par la formule de Poisson (3.64), pour tout n, on obtient

$$\frac{r_0 - r}{r_0 + r} u_n(z_0) \leq u_n(z_0 + re^{it}) \leq \frac{r_0 + r}{r_0 - r} u_n(z_0) \quad \textit{(Inégalité de Harnack).} \tag{3.67}$$

La même inégalité reste donc vraie pour u. On en déduit que soit $u(z) = +\infty$ sur tout $z_0 + r_0 D$ soit $u(z) < +\infty$ (et donc $(u_n)_n$ converge) sur tout $z_0 + r_0 D$. Si m est le supremum de u dans $z_0 + r_0\overline{D}$, l'inégalité (3.65) pour $v = u$ reste vraie. Donc l'ensemble des points z où u est fini (c'est-à-dire où $(u_n)_n$ converge) est ouvert et fermé dans U connexe ; il est donc vide ou égal à U tout entier. S'il est U tout entier, on peut appliquer le théorème de convergence monotone à la formule de Poisson pour les $(u_n)_n$ ce qui nous dit que u vérifie la formule de Poisson dans U et ainsi est harmonique dans U. L'uniformité de la convergence sur tout compact provient par exemple de (3.67) appliqué à $u - u_n$ qui donne, pour $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$,

$$\frac{r_0 - r}{r_0 + r}(u - u_n)(z_0) \leq \sup_{z \in z_0 + r_0\overline{D}} (u - u_n)(z) \leq \frac{r_0 + r}{r_0 - r}(u - u_n)(z_0).$$

Ceci achève la preuve du théorème 3.91. □

3.4 La fonction conjuguée

Nous allons maintenant étudier la fonction conjuguée d'une fonction intégrable sur $\mathbb{T}$.

Chapter 3

Introduction to the Theory of Distributions

3.1 Test Functions and Distributions

3.1.1 Smooth compactly supported functions

Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^n$; we define $C_c^\infty(\Omega)$ as the vector space of complex-valued compactly supported functions defined on Ω. Even in the case $n = 1$ and $\Omega = \mathbb{R}$, it is not completely obvious that this space is not reduced to $\{0\}$. We leave to the reader as an exercise to check that the function

$$\rho_0(t) = \begin{cases} e^{-t^{-1}} & \text{if } t > 0, \\ 0 & \text{if } t \le 0, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

is a C^∞ function on $\mathbb{R}$. Starting with ρ_0, we may define a function ρ on $\mathbb{R}^n$ by

$$\rho(x) = \rho_0(1 - \|x\|^2) \tag{3.1.2}$$

and we see right away that $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ with $\operatorname{supp}\rho = \bar{B}(0,1)$. Here we have defined the support of ρ as the closure of the set $\{x \in \mathbb{R}^n, \rho(x) \neq 0\}$. Although that definition is fine when we deal with a continuous function, it will produce strange results if we want to define the support of a function in $L^1(\mathbb{R})$: for instance the characteristic function of $\mathbb{Q}$ is 0 a.e. and thus 0 as a function of $L^1(\mathbb{R})$, nevertheless the above set is $\mathbb{R}$. It is better to use the following definition, say for a function in $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, Ω open subset of $\mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{supp} u = \{x \in \Omega, \nexists U \text{open} \in \mathscr{V}_x, u_{|U} = 0\}, \quad (\operatorname{supp} u)^c = \{x \in \Omega, \exists U \text{open} \in \mathscr{V}_x, u_{|U} = 0\}. \tag{3.1.3}$$

The above definition makes sense for an L^1_{loc} function with $u_{|U} = 0$ meaning $u = 0$ a.e. in U. The smooth compactly supported functions are very useful as mollifiers, as shown by the next proposition.

Proposition 3.1.1. *Let $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ with $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$. For $\epsilon > 0$, we define $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\phi(x\epsilon^{-1})$. Then, if $f \in C_c^m(\mathbb{R}^n)$, $\lim_{\epsilon\to 0_+} \phi_\epsilon * f = f$ (convergence in $C_c^m(\mathbb{R}^n)$) and if $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ with $1 \le p < +\infty$, $\lim_{\epsilon\to 0_+} \phi_\epsilon * f = f$ (convergence in $L^p(\mathbb{R}^n)$). In both cases the function $\phi_\epsilon * f$ is C^∞.*

Proof. We write

$$(\phi_\epsilon * f)(x) - f(x) = \int \phi_\epsilon(x-y)f(y)dy - f(x) = \int \phi(y)\big(f(x-\epsilon y) - f(x)\big)dy,$$

so that, if $\operatorname{supp}\phi \subset \bar{B}(0, R_0)$,

$$|(\phi_\epsilon * f)(x) - f(x)| \le \int |\phi(y)|dy \sup_{|x_1 - x_2| \le \epsilon R_0} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

The function f is continuous and compactly supported, so is uniformly continuous on $\mathbb{R}^n$ (an easy consequence of the Heine theorem 1.5.10), thus

$$\lim_{\epsilon \to 0_+} \big(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(\phi_\epsilon * f)(x) - f(x)|\big) = 0,$$

yielding the uniform convergence of $\phi_\epsilon * f$ towards f. If f is C_c^m, a simple differentiation under the integral sign (see e.g. the *Théorème 3.3.2.* in [9]) gives as well the uniform convergence of the derivatives, up to order m. The smoothness of $\phi_\epsilon * f$ for $\epsilon > 0$ is due to the same theorem when $f \in C_c^m(\mathbb{R}^n)$, since we have $(\phi_\epsilon * f)(x) = \int \phi_\epsilon(x-y)f(y)dy$.

Remark 3.1.2. *We have not defined a topology on the vector space $C_c^m(\mathbb{R}^n)$, but at the moment it will be enough for us to say that a sequence $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ of functions in $C_c^m(\mathbb{R}^n)$ is converging if it converges in $C^m(\mathbb{R}^n)$ and if there exists a compact set K such that, for all $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp} u_k \subset K$.*

We note in particular that these conditions are satisfied by the "sequences" $(\phi_\epsilon * f)_{\epsilon > 0}$ since for $\epsilon \le 1$, $\operatorname{supp}(\phi_\epsilon * f) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp}\phi_\epsilon \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp}\phi$.

Let us now take $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ with $1 \le p < \infty$. With $\psi \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$, we have

$$f * \phi_\epsilon - f = (f - \psi) * \phi_\epsilon + \psi * \phi_\epsilon - \psi + \psi - f,$$

so that

$$\begin{aligned}
\|f * \phi_\epsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\le (1 + \|\phi\|_{L^1})\|f - \psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\psi * \phi_\epsilon - \psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le (1 + \|\phi\|_{L^1})\|f - \psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \underbrace{|\operatorname{supp}\phi + \epsilon|}_{\text{Lebesgue measure}}{}^{1/p}\|\psi * \phi_\epsilon - \psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Since $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, the previous convergence argument implies the inequality

$$\limsup_{\epsilon \to 0_+} \|f * \phi_\epsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le (1 + \|\phi\|_{L^1})\|f - \psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{for all } \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

The density of $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ for $1 \le p < \infty$ (see e.g. the *Théorème 3.4.1* in [9]) yields the result. For $\epsilon > 0, R > 0$, all the functions

$$\psi_{R,\epsilon}(y) = \sup_{|x| \le R} |(\partial_x^\alpha \phi_\epsilon)(x-y)f(y)|$$

belong to $L^1(\mathbb{R}^n_y)$ since

$$\int \psi_{R,\epsilon}(y)dy \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big(\int \sup_{|x|\le R} |(\partial_x^\alpha \phi_\epsilon)(x-y)|^{p'}dy\Big)^{1/p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

and $\operatorname{supp}\phi \subset \bar{B}_{R_0}$ gives that $|x - y| \le \epsilon R_0, |x| \le R$ imply $|y| \le \epsilon R_0 + R$, and the finiteness of the integral above, proving the smoothness of $\phi_\epsilon * f$ for $\epsilon > 0$. $\square$

N.B. The result of the proposition does not extend to the case $p = \infty$, since the uniform convergence of the continuous function $f * \phi_\epsilon$ would imply the continuity of the limit.

It will be also useful to use the compactly supported functions to construct some partitions of unity and, to begin with, to find C_c^∞ functions identically equal to 1 near a compact set.

Lemma 3.1.3. *Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^n$ and K be a compact subset of Ω. Then there exists a function $\varphi \in C_c^\infty(\Omega; [0,1])$ such that $\varphi = 1$ on a neighborhood of K.*

Proof. We claim that there exists $\epsilon_0 > 0$ such that $K + \epsilon_0 B_1 \subset \Omega$, ($B_1$ is the open unit ball). First we note that

$$d(K, \Omega^c) = \inf_{x \in K, y \in \Omega^c} |x - y| > 0, \tag{3.1.4}$$

otherwise, we could find sequences $(x_k)_{k\ge1}$ in K, $(y_k)_{k\ge1}$ in Ω^c such that $\lim_k |x_k - y_k| = 0$, and since K is compact, we may suppose that (x_k) converges with limit $x \in K$, implying $\Omega^c \ni \lim_k y_k = x$, which is impossible since $K \subset \Omega$. As a result, we have with $\epsilon_0 = d(K, \Omega^c)$

$$K + \epsilon_0 B_1 \subset \Omega,$$

otherwise, we could find $|t| < 1, x \in K$ such that $x + \epsilon_0 t = y \in \Omega^c$, implying $|x - y| < \epsilon_0 = d(K, \Omega^c)$, which is impossible. With the function ρ defined in 3.1.2, we define with $0 < \epsilon \le \frac{\epsilon_1}{2} < \frac{\epsilon_0}{4}$,

$$\varphi(x) = \int \mathbf{1}_{K+\epsilon_1 \bar{B}_1}(y) \rho\big((x-y)\epsilon^{-1}\big)\epsilon^{-n} dy \Big(\int \rho(t) dt\Big)^{-1}.$$

The function φ is C^∞ and such that

$$\operatorname{supp} \varphi \subset K + \epsilon_1 \bar{B}_1 + \epsilon \bar{B}_1 \subset K + \frac{3}{2}\epsilon_1 \bar{B}_1 \subset \underbrace{K + \frac{3}{4}\epsilon_0 \bar{B}_1}_{\text{compact}} \subset K + \epsilon_0 B_1 \subset \Omega.$$

Moreover $\varphi = 1$ on $K + \frac{\epsilon_1}{2} \bar{B}_1$ (which is a neighborhood of K), since if $x \in K + \frac{\epsilon_1}{2} \bar{B}_1$, we have, for y satisfying $|x - y| \le \epsilon$, that $y \in K + \frac{\epsilon_1}{2} \bar{B}_1 + \epsilon \bar{B}_1 \subset K + \epsilon_1 \bar{B}_1$. As a result, with $\tilde{\rho} = \rho\big(\int \rho(t) dt\big)^{-1}$, for $x \in K + \frac{\epsilon_1}{2} \bar{B}_1$, we have

$$1 = \int \tilde{\rho}((x-y)\epsilon^{-1})\epsilon^{-n} dy = \int \tilde{\rho}((x-y)\epsilon^{-1})\epsilon^{-n} \mathbf{1}_{K+\epsilon_1 \bar{B}_1}(y) dy = \varphi(x).$$

We note also that, since $\tilde{\rho} \ge 0$ with integral 1, $\mathbf{1}_L(y) \in [0,1]$, we have, for all $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \le \varphi(x) \le 1$. The proof of the lemma is complete. $\square$

3.1.2 Distributions

Definition 3.1.4. *Let Ω be an open set of $\mathbb{R}^n$ and let $T : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ be a linear form with the following continuity property,*

$$\forall K \, compact \subset \Omega, \exists C_K > 0, \exists N_K \in \mathbb{N}, \forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega), \ |\langle T, \varphi \rangle| \le C_K \sup_{\substack{|\alpha| \le N_K \\ x \in \mathbb{R}^n}} |(\partial_x^\alpha \varphi)(x)|, \tag{3.1.5}$$

where $C_K^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C_c^\infty(\Omega), \operatorname{supp} \varphi \subset K\}$.

N.B. We shall use also the notation $\mathscr{D}(\Omega)$ for the space of test functions $C_c^\infty(\Omega)$ and $\mathscr{D}'(\Omega)$ for the space of distributions on Ω. We have not introduced a topology on $\mathscr{D}(\Omega)$ but we have defined a notion of converging sequence with the remark 3.1.2. It would have been certainly more elegant to start with the display of the natural topological structure on $\mathscr{D}(\Omega)$, at the (heavy) cost of having to deal with a non-metrizable locally convex topology defined by an uncountable family of semi-norms. The study of inductive limits of increasing sequences of Fréchet spaces is outlined in the appendix 3.7.2. Anyhow, one should think of $\mathscr{D}'(\Omega)$ as the topological dual of $\mathscr{D}(\Omega)$, a view supported by the next lemmas and remarks.

Remark 3.1.5. With $\mathscr{D}_K(\Omega) = C_K^\infty(\Omega)$, we have, using the sequence of compact sets $(K_j)_{j \ge 1}$ of the lemma 2.3.1

$$\mathscr{D}(\Omega) = \cup_{j \ge 1} \mathscr{D}_{K_j}(\Omega)$$

and it is not difficult to see that each $\mathscr{D}_{K_j}(\Omega)$ is a Fréchet space with the natural countable family of semi-norms given by $p_{K_j,m}(u) = \sup_{\substack{|\alpha| \le m \\ x \in K_j}} |(\partial_x^\alpha u)(x)|$. If we want to use the countable family $p_{K_j,m}$, we end-up with the topology on the Fréchet space $C^\infty(\Omega)$ as described in the subsection 2.3.3; the actual topology on $\mathscr{D}(\Omega)$ is finer and it is important to understand that, with ρ defined in (3.1.2) (say with $n = 1$), the sequence $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, given by

$$u_k(x) = \rho(x - k)$$

does converge to 0 in the Fréchet space $C^\infty(\mathbb{R})$ but is *not* convergent in $C_c^\infty(\mathbb{R})$, since the second condition of the remark 3.1.2 is not satisfied: there is no compact subset K of $\mathbb{R}$ such that $\forall k \in \mathbb{N}, \operatorname{supp} u_k \subset K$.

Remark 3.1.6. Note that a linear form T on $C_c^\infty(\Omega)$ is a distribution if and only if, for all compact subsets K of Ω, its restriction to the Fréchet space $\mathscr{D}_K(\Omega)$ is continuous.

A L^1_{loc} function is a distribution: for Ω open subset of $\mathbb{R}^n$, for $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, we define for $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\langle T, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx \Longrightarrow |\langle T, \varphi \rangle| \le \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\operatorname{supp} \varphi} |f(x)|dx, \tag{3.1.6}$$

so that (3.1.5) is satisfied with $C_K = \int_K |f(x)|dx, N_K = 0$. Moreover the canonical mapping from $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ into $\mathscr{D}'(\Omega)$ is injective, as shown by the next lemma.