

О иерархическом поведении решений мэрилендского уравнения в квазиклассическом приближении

А. Федотов, Ф. Клорр

Ключевые слова: Квазипериодическое уравнение Шредингера, иерархическое поведение решений, квазиклассическое приближение

1. Введение

В этой работе мы исследуем решения разностного уравнения Шредингера

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} + \lambda \cot(\pi(nh + \theta)) \psi_n = E \psi_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где $\lambda > 0$, $h \in (0, 1)$, $\theta \in [0, 1)$ и $E \in \mathbb{R}$ – параметры – константа связи, частота, эргодический и спектральный параметры. Оператор, определяемый левой частью (1) в $l^2(\mathbb{Z})$, называют мэрилендской моделью, и мы называем (1) мэрилендским уравнением.

Мы считаем, что $h \notin \mathbb{Q}$. При этом функция $n \mapsto \lambda \cot(\pi(nh + \theta))$ – квазипериодическая. Мэрилендская модель была предложена специалистами по физике твердого тела и является одним из самых популярных операторов спектральной теории, см., напр., работу [1] и ссылки к ней. С одной стороны, он является квазипериодическим, а с другой – многие его спектральные свойства могут быть описаны явно.

Одна из важнейших задач теории почти периодических операторов – исследование поведения (обобщенных) собственных функций на бесконечности. Физики давно обсуждают иерархическую самоподобную структуру решений почти-периодических уравнений, у них имеются интересные наблюдения, основанные, в частности, на компьютерных вычислениях, см., напр., [2]. На нее указывают и конструкции математиков, см., напр., [3, 4, 5, 6]. Однако, долгое время удовлетворительных результатов не было даже на физическом уровне строгости. Впервые иерархическая структура собственных функций была описана совсем недавно для оператора почти-Матье в режиме *локализации*, когда, грубо говоря, спектр оператора почти-Матье оказывается точечным [7].

Опишем условие, выделяющее режим локализации для мэрилендской модели. Рассмотрим подходящие дроби $\frac{p_k}{q_k}$, $k \in \mathbb{N}$, цепной дроби, изображающей число h , см. [8]. Положим $\beta(h) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n}$. Чем меньше эта величина, тем хуже число h приближается рациональными числами. Далее, введем вместо λ и E введем параметры $\eta \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ и $l > 0$ так, что $E + i\lambda = 2 \cos(\eta + i l)$.

Оказывается, что для почти всех θ на множестве E , где $l(E, \lambda) < \beta(h)$, расположен сингулярно непрерывный спектр, а там, где $l(E, \lambda) > \beta(h)$, – точечный спектр, см. работы [9, 1] и ссылки к ним. Таким образом, последнее условие выделяет режим локализации. Можно сказать, что оно совпадает с аналогичным условием для оператора почти-Матье.

Мы исследуем поведение решений (1) в квазиклассическом приближении, см. [10], в рамках метода монодромизации, см. обзор [5]. Условия применимости нашего подхода автоматически гарантируют выполнение условия $l(E, \lambda) < \beta(h)$. Таким образом, мы исследуем мэрилендскую модель в режиме дополнительном к режиму локализации.

Обсудим чуть подробнее наш подход и условия его применения. Из теоремы 1 из [11] немедленно вытекает, что исследование поведения решений (1) на бесконечности сводится к исследованию решений цепочки мэрилендских уравнений вида

$$\psi_{j,n+1} + \psi_{j,n-1} + \lambda_j \operatorname{ctg}(\pi(nh_j + \theta_j)) \psi_{j,n} = E_j \psi_{j,n}, \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 17-01-00668-а.

где $j = 0, 1, 2, \dots$ – номер уравнения, а n – целочисленная переменная. Параметры в (2) определяются из соотношений $E_j + i\lambda_j = 2 \cos(\eta_j + il_j)$ и

$$h_{j+1} = \left\{ \frac{1}{h_j} \right\}, \quad l_{j+1} = \frac{l_j}{h_j}, \quad \eta_{j+1} = \frac{\eta_j}{\omega_j} \pmod{2\pi}, \quad \theta_{j+1} = \left\{ \frac{\theta_j}{\omega_j} \right\},$$

$$h_0 = h, \quad l_0 = l, \quad \eta_0 = \eta, \quad \theta_0 = \theta,$$

а $\{x\}$ – дробная часть $x \in \mathbb{R}$. При больших значениях модуля целочисленной переменной n решение исходного мэрилендского уравнения – уравнения с $j = 0$ – выражается через решение мэрилендского уравнения с $j = 1$ при значениях целочисленной переменной с меньшей абсолютной величиной – величиной порядка hn . Решение уравнения с $j = 1$ выражается через решение уравнения с $j = 2$ и т.д. Чем больше $|n|$ для решения исходного уравнения, тем больше уравнений цепочки надо изучить.

Для исследования уравнений цепочки мы используем квазиклассические методы, развитые в работах [12, 13, 14, 15]. Для этого нам приходится предположить, что все произведения $h_j \exp(l_j) = h_j \exp(l/(h_0 h_1 \dots h_{j-1}))$ достаточно малы. Можно показать, что это автоматически гарантирует выполнение условия $l(E, \lambda) < \beta(h)$.

Мы конструктивно объясним иерархическое самоподобное поведение решений Мэрилендского уравнения. При этом мы уделим особое внимание решениям наиболее интересным с точки зрения спектральной теории.

В следующем параграфе мы опишем основные объекты, необходимые для формулировки наших результатов, а параграфе 3 мы их сформулируем.

2. Основные объекты

Комплексный импульс. Как прежде будем считать, что $\lambda \neq 0$, а $E \in \mathbb{R}$. Определим комплексный импульс p соотношением

$$2 \cos p + \lambda \operatorname{ctg}(\pi z) = E. \quad (3)$$

Импульс – многозначная аналитическая функция. Ее точки ветвления расположены на вещественной оси. В целочисленных точках расположены логарифмические точки ветвления, а в точках, где $E - \lambda \operatorname{ctg}(\pi z) = \pm 2$, находятся точки ветвления типа квадратного корня. Остальные точки ветвления получаются из описанных сдвигами на целое число. Точки ветвления типа квадратного корня называют точками поворота. На отрезке $(0, 1)$ имеются две точки поворота. Мы будем обозначать их через z^\pm так, что $0 < z^- < z^+ < 1$. Имеется ветвь p_0 импульса аналитическая в верхней полуплоскости \mathbb{C}_+ и удовлетворяющая в ней условиям

$$\operatorname{Im} p(z) < 0 \quad \text{и} \quad 0 < \operatorname{Re} p(z) < \pi.$$

Ветвь p_0 выделяется этими условиями однозначно. Любая другая ветвь импульса аналитическая в \mathbb{C}_+ имеет вид $\sigma p + 2\pi k$, где $\sigma \in \{\pm 1\}$, а $k \in \mathbb{Z}$.

Нетрудно показать, что ветвь p_0 периодична с периодом единица.

Граничные значения p_0 непрерывны на $(0, 1)$ и удовлетворяют включениям:

$$p_0(z) - \pi \in i\mathbb{R}_-, \quad z \in (0, z_-); \quad p_0(z) \in (0, \pi), \quad z \in (z_-, z_+); \quad p_0(z) \in i\mathbb{R}_-, \quad z \in (z_+, 1). \quad (4)$$

Стандартное квазиклассическое поведение решений. Пусть I – один из интервалов $(0, z_-)$, (z_-, z_+) и $(z_+, 1)$, $|I|$ – его длина, а p – ветвь комплексного импульса, аналитическая на I .

Будем говорить, что решение ψ мэрилендского уравнения имеет при малых значениях he^l стандартное квазиклассическое поведение на I , если при $\theta + hn \in I$

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{\sin p(z)}} e^{\frac{i}{h} \int_{z_-}^z p(z') dz' + o(1)}, \quad z = \theta + hn, \quad (5)$$

и это асимптотическое представление равномерно по n при условии, что $\theta + nh$ находится вне $\delta|I|$ -окрестностей концов I , где $\delta > 0$ – фиксированное число.

Аналогично определяется стандартное асимптотическое поведение решений на интервалах, получаемых из I сдвигом на целое число.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Существование решений разностных уравнений с асимптотикой вида (5) – стандартный результат. Мы строим такие решения с помощью комплексного метода ВКБ для разностных уравнений, см. [12, 13, 14, 15].

Отрезки I , где p_0 (а значит, и другие аналитические ветви p) принимает вещественные значения, (т.е. отрезки вида $(z_- + m, z_+ + m)$, где $m \in \mathbb{Z}$) будем называть зонами осцилляций, а отрезки I , внутри которых $\text{Im } p_0 \neq 0$, (т.е. отрезки вида $(m, z_- + m)$ и $(m + z_+, m + 1)$, где $m \in \mathbb{Z}$), будем называть зонами экспоненциального роста.

На зонах роста $\text{Im } p_0 < 0$. Если на зоне роста I решение ψ с точностью до независящего от n множителя допускает представление (5) с $p = p_0 \pmod{2\pi}$ ($p = -p_0 \pmod{2\pi}$), то мы будем говорить, что ψ на I растет направо (соответственно, налево).

3. Иерархическое поведение решений

Фиксируем $J \in \mathbb{N}$. Здесь мы опишем качественное поведение решений мэрилендского уравнения на отрезках целочисленной решетки \mathbb{Z} длины порядка $1 / (h_0 h_1 \dots h_J)$. Удобно это делать с помощью простых диаграмм.

Пусть $m < M$ – два целых числа. Мы будем называть множество $[m, M] = \{k \in \mathbb{Z} : m \leq k \leq M\}$ интервалом целочисленной решетки \mathbb{Z} .

Диаграммы. Для $n_0 \in \mathbb{N}$ определим последовательность чисел

$$n_{j+1} = -[\theta_j + n_j h_j], \quad j = 0, 1, 2, \dots, \tag{6}$$

где $[\cdot]$ – целая часть. Рассмотрим множество всех n_0 , для которых $n_{J+1} = 0$. Они образуют некоторый интервал $[m_0, M_0]$ решетки \mathbb{Z} . Для каждого $j = 1, 2, \dots, J$ соответствующее n_j пробегает интервал $[m_j, M_j]$ решетки \mathbb{Z} . Очевидно, $m_{J+1} = M_{J+1} = 0$.

Не трудно видеть, что $|M_0 - m_0|$ имеет порядок порядка $1 / (h_0 h_1 \dots h_J)$.

Пусть по определению $I_j = [-M_{j+1}, -m_{j+1} + 1]$ – отрезок вещественной оси. Так как $m_{J+1} = M_{J+1} = 0$, то $I_J = [0, 1]$.

Изобразим интервалы $I_j, j = 0, 1, 2, \dots, J$, как показано на рисунке 1 (на рисунках пред-

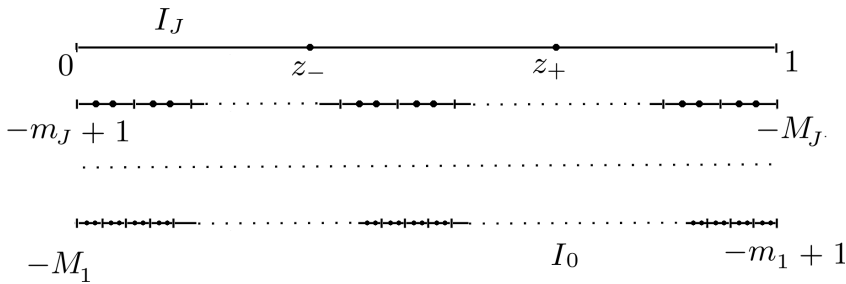


Рис. 1

полагается, что J – четное число). На этом рисунке верхний интервал – I_J , под ним – I_{J-1} и т.д. Концы интервалов I_0, I_1, \dots, I_J расположены в точности друг над другом. Правые концы интервалов с четными номерами изображены справа, а нечетных – слева. Для каждого $j \in [0, J]$ мы отметили на I_j точки ветвления комплексного импульса для уравнения (2) с номером j (целые числа отмечены короткими вертикальными линиями, а точки поворота – точками).

Перейдем к описанию диаграмм. Будем считать, что $\lambda_j \neq 0$ для всех $j \in [0, J]$. Тогда для каждого из уравнений (2) имеется по две точки поворота на отрезке $(0, 1)$.

Говоря о зонах роста и осцилляций на отрезке I_j , мы имеем в виду зоны роста и осцилляций для уравнения (2) с номером j .

Сначала построим диаграмму с номером $j = J$. Для этого на расположенных на I_J зонах роста нарисуем стрелки слева направо или справа налево, выбрав произвольно направление каждой из них. Пример полученной диаграммы – верхняя диаграмма на рисунке 2, полученная из I_J . Построим диаграмму с номером $j = J - 1$. Для этого рассмотрим

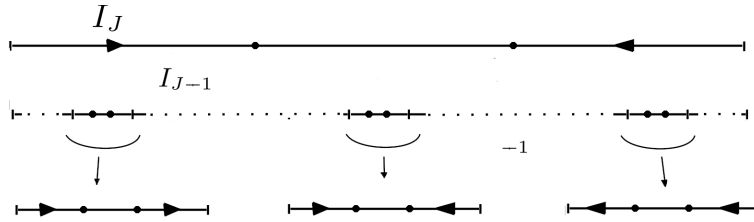


Рис. 2

подинтервалы интервала I_{J-1} , расположенные между соседними целыми числами, каждый – целиком под одной из изображенных на рисунке 1 зон роста на I_J . На каждой из зон роста на таком подинтервале интервала I_{J-1} нарисуем стрелку в том же направлении, что и над ним на зоне роста на I_J .

Далее, рассмотрим подинтервалы интервала I_{J-1} , расположенные между соседними целыми числами, каждый – целиком под отмеченной на рисунке 1 зоной осцилляций на I_J . На каждом из таких интервалов на расположенных на нем зонах роста нарисуем стрелки, направленные к расположенной на нем зоне осцилляций.

Под верхней диаграммой на рисунке 2 изображен интервал I_{J-1} и несколько его подинтервалов между соседними целыми числами. Еще ниже мы показываем как расставляются стрелки на зонах роста, расположенных на этих подинтервалах.

Остальные диаграммы (с номерами $J - 2, \dots, 1, 2$) строятся, следуя тому же алгоритму, как была построена $(J - 1)$ -ая диаграмма по J -ой.

Введем операцию проектирования с диаграммы на диаграмму. По определению, проекция некоторого множества M с j -ой диаграммы на диаграмму с номером $j - 1$, получается параллельным переносом M на рисунке 1 вертикально вниз с I_j на I_{j-1} . Отметим, что хотя на рисунке исходное множество и проекция имеют одинаковые размеры, фактический размер множества при проектировании увеличивается примерно в $1/h_j$ раз.

Проекция на остальные диаграммы определяется аналогично.

Поведение решений на отрезке $[m_0, M_0]$ целочисленной решетки. Пусть $\{c_j\}_{j=0}^{\infty}$ – суммируемая последовательность положительных чисел. Фиксируем $\delta > 0$.

Для $j = 0, 1, 2, \dots, J$ обозначим через T_j множество точек ветвления комплексного импульса для уравнения (2) на I_j . Через V_j обозначим $\frac{\delta c_j}{\lambda_j}$ -окрестность множества T_j .

Если число $\epsilon > 0$ достаточно мало, то справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть для всех $j = 0, 1, 2, \dots$ выполнены неравенства:

$$e^{l_j} h_j \leq \epsilon c_j, \quad \text{dist}(\eta_j, \pi\mathbb{Z}) \geq c_j. \quad (7)$$

Фиксируем $J \in \mathbb{N}$. Предположим, что мэрилендское уравнение (2) с $j = J$ имеет решение, которое на зонах роста, расположенных на J -ой диаграмме (построенной как в предыдущем пункте) растет в направлении изображенных на них стрелок.

Тогда для каждого $j = 0, 1, \dots, J - 1$ мэрилендское уравнение (2) с номером j имеет решение, которое на зонах роста, расположенных на j -ой диаграмме вне проекций множеств V_k , $j + 1 \leq k \leq J$, растет в направлении изображенных на ней стрелок.

Эта теорема описывает качественное поведение решения исходного мэрилендского уравнения на отрезке $[m_0, M_0]$ целочисленной решетки длины порядка $1/(h_0 h_1 \dots h_J)$. Можно

описать поведение решений и асимптотическими формулами, но объем краткого сообщения не позволяет сделать это.

Можно сказать, что поведение решений исходного мэрилендского уравнения на отрезке $[m_0, M_0]$ определяется поведением решений мэрилендского уравнения (2) с номером $j = J$, а детали его поведения описываются уравнениями с номерами меньшими J . Этот эффект проиллюстрирован на рисунках 3 и 4, где слева схематически изображен график модуля решения J -го мэрилендского уравнения, соответствующий J -ой (верхней) диаграмме на рисунке 2, а справа – график модуля решения $(J - 1)$ -го уравнения, соответствующего $(J - 1)$ -ой диаграмме. На правом рисунке вместо осцилляций решения на зонах осцилляций, мы нарисовали горизонтальные пунктирные линии.

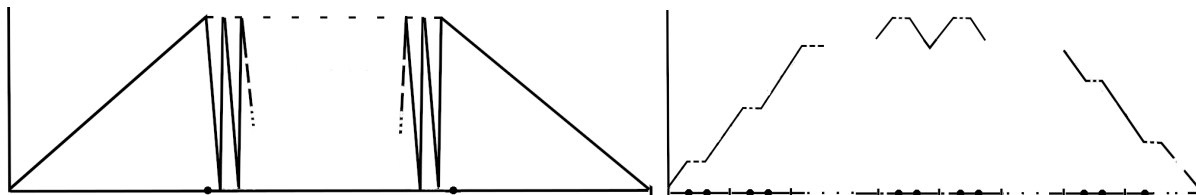


Рис. 3

Рис. 4

Соответствующее решение исходного мэрилендского уравнения наиболее интересно со спектральной точки зрения. Его значения концов отрезка $[m_0, M_0]$ экспоненциально малы по сравнению со значениями в его центральной части. Отметим, что упомянутое решение J -го мэрилендского уравнения существует, если выполнено условие квантования, которое может быть преобразовано к уравнению вида $\eta_J + \pi\theta_J \bmod (2\pi h_J) = O(h_J e^{-L_J/h_J})$, где правая часть здесь экспоненциально мала.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Jitomirskaya, L. Wencai, *Commun. pure appl. math.*, **70** (2017), 1025–1051. [2] P. Wiegmann and A. Zabrodin, *Nuclear Physics B*, **422(3)** (1994), 495–514. [3] Y. G. Sinai, *J. Stat. Phys.*, **46** (1987), 861–909. [4] B. Helffer, J. Sjöstrand, *Mém. SMF (now. sér.)*, **34** (1988), 1–113. [5] А. А. Федотов, *Алгебра и анализ*, **25:2** (2013), 303–325. [6] A. Fedotov, F. Klopp, “Pointwise Existence of the Lyapunov Exponent for a Quasiperiodic Equation”, *Mathematical results in quantum mechanics*, World Sci. Publ., 2008, 55–66. [7] S. Jitomirskaya, L. Wencai, *Annals of Mathematics*, **187** (2018), 721–776. [8] А. Я. Хинчин, *Ценные дроби*, ГИФМЛ, М., 1978. [9] B. Simon, *Annals Phys.*, **159** (1985), 157–183. [10] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение в задачах квантовой механики*, Наука, М., 1976. [11] A. Fedotov, F. Sandomirskyi, *Commun. Math. Phys.*, **334:2** (2015), 1083–1099. [12] В. С. Буслаев, А. А. Федотов, *Алгебра и анализ*, **6:3** (1994), 59–83. [13] А. А. Федотов, Е. В. Щетка, *Алгебра и анализ*, **29:2** (2017), 193–219. [14] A. Fedotov, F. Klopp, *SIAM J. Math. Analysis*, **51:6** (2019), 4413–4447. [15] A. Fedotov, F. Klopp, *Applic. Analysis*, <https://doi.org/10.1080/00036811.2019.1652735>.

А. Федотов

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: a.fedotov@spbu.ru

Поступило

Ф. Klopp

Institut Mathématique de Jussieu-Paris
Rive Gauche, Sorbonne Université
E-mail: frederic.klopp@imj-prg.fr