LM256 : Analyse vectorielle, intégrales multiples

Tien-Cuong Dinh

Disponible sur http://www.math.jussieu.fr/∼dinh
Cours de 21h donné aux étudiants de physique en deuxième année

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions d'une variable

Ce chapitre contient quelques rappels sur les fonctions d'une variable.

1.1 Définitions, représentations

Définition 1.1.1. Soit I une partie de $\mathbb{R}$. *Une fonction sur I* est une application de I dans $\mathbb{R}$. Une fonction f est donc une correspondance qui associe à tout nombre réel $x \in I$ un nombre réel $f(x)$. On écrit

$$f : x \mapsto f(x) \qquad \text{ou simplement} \qquad f(x).$$

Exemples 1.1.2. L'application

$x \mapsto ax$ définit une fonction linéaire.

$x \mapsto ax + b$ définit une fonction affine.

$x \mapsto ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, définit un polynôme de degré 2.

$x \mapsto \sin x$ définit la fonction sinus.

Définition 1.1.3. L'ensemble des points x où la fonction f est définie s'appelle *le domaine de définition de f.*

Exemples 1.1.4.

$f(x) = \frac{1}{x}$ est définie pour $x \neq 0$. Son domaine de définition est $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ est définie pour $x \geq 1$ et pour $x \leq -1$.

$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est définie sur $[-1, 1]$.

Définition 1.1.5. On appelle *graphe* de la fonction $f(x)$ l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ par rapport à deux axes Ox et Oy, lorsque x parcourt le domaine de définition de f (voir Figure 1).

Remarque 1.1.6. Soit a un point dans le domaine de définition de f. La droite $\{x = a\}$ coupe le graphe de f en un et un seul point. C'est le point $(a, f(a))$.

Définition 1.1.7. Soient f et g deux fonctions. L'application $x \mapsto f(g(x))$ définit une fonction qu'on appelle *la composée de* $f(x)$ *et* $g(x)$. On note $f(g(x))$ ou $(f \circ g)(x)$ cette fonction. Elle est définie aux points x dans le domaine de définition de g tels que $g(x)$ soit dans le domaine de définition de f.

Exemple 1.1.8. Si $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, on a $f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Le domaine de définition de $f(g(x))$ est $]-1, 1[$. On a $g(\pm 1) = 0$ et donc $g(\pm 1)$ **n'est pas** dans le domaine de définition de f.

1.2 Limites, continuité, dérivées

On suppose que la fonction f est définie au moins sur un intervalle $]a, b[$ contenant un point x_0, sauf peut-être en x_0.

Définition 1.2.1. On dit que la fonction $f(x)$ *tend vers* L *(L fini) lorsque* x *tend vers* x_0 si

> *quel que soit le nombre réel* $\epsilon > 0$, *il existe un nombre* $\alpha > 0$ *tel que la relation* $0 < |x - x_0| < \alpha$ *entraîne* $|f(x) - L| < \epsilon$.

Ceci signifie que pour un ϵ donné quelconque on doit trouver un α en fonction de ϵ tel que quand l'écart de x à x_0 (avec $x \neq x_0$) est inférieur à α l'écart de $f(x)$ à L est inférieur à ϵ.

Définition 1.2.2. La constante L est appelée *limite de* $f(x)$ *quand* x *tend vers* x_0 ou *limite de* $f(x)$ *en* x_0 et on note

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Théorème 1.2.3. *Soient* $f(x)$ *et* $g(x)$ *deux fonctions telles que* $f(x)$ *tende vers* L *et* $g(x)$ *tende vers* M *quand* x *tend vers* x_0. *Alors*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = L \pm M, \qquad \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = LM.$$

Si $L \neq 0$, *on a*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}, \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{M}{L}.$$

Démonstration. (première partie) Soit $\epsilon > 0$. Comme $f(x)$ tend vers L quand $x \to x_0$, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < \alpha_1$ on ait $|f(x) - L| < \epsilon/2$. De la même manière, on montre qu'il existe $\alpha_2 > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < \alpha_2$ on ait $|g(x) - M| < \epsilon/2$. Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. On a $\alpha > 0$ et si $0 < |x - x_0| < \alpha$ on a $0 < |x - x_0| < \alpha_1$ et $0 < |x - x_0| < \alpha_2$, donc

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - L - M| &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

On a montré que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ de sorte que $0 < |x - x_0| < \alpha$ entraîne $|f(x) + g(x) - L - M| < \epsilon$. Donc

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = L + M.$$

□

Rappel. Inégalité triangulaire : $|a + b| \leq |a| + |b|$. Elle entraîne les inégalités $|a \pm b| \geq |a| - |b|$.

Définition 1.2.4. Lorsque la limite de $f(x)$ en x_0 est égale à la valeur $f(x_0)$ de $f(x)$ en x_0, on dit que f *est continue en* x_0. On dira que $f(x)$ est *continue sur l'intervalle* $]a, b[$ si elle est continue en tout point x_0 de $]a, b[$.

Si $f(x)$ est continue sur $]a, b[$ son graphe au-dessus de $]a, b[$ est une courbe continue (voir Figure 2).

Exemples 1.2.5. Les fonctions e^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, les polynômes, leurs compositions, sommes, produits ... sont continus **là où elles sont définies**.

Proposition 1.2.6. *Si f est continue en x_0 elle est bornée au voisinage de x_0. Plus précisément, il existe $\alpha > 0$ et $A > 0$ tels que*

$$|f(x)| < A \qquad \text{pour} \qquad x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[.$$

Démonstration. Comme f est continue en x_0, on a $\lim_{x \to x_0} = f(x_0)$. Par conséquent, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que

$$0 < |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Ceci est aussi vrai pour $x = x_0$ car $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \epsilon$. Donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

En particulier, pour $\epsilon = 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < 1.$$

Posons $A = |f(x_0)| + 1$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient pour $|x - x_0| < \alpha$ que

$$|f(x)| = |f(x_0) + f(x) - f(x_0)| \leq |f(x_0)| + |f(x) - f(x_0)| < |f(x_0| + 1 = A.$$

C'est qu'il faut démontrer. □

Définition 1.2.7. On appelle *dérivée de* $f(x)$ *au point* x_0 la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si celle-ci existe (et est finie). On note

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Si cette dérivée existe, on dit que f est *dérivable* en x_0.

La dérivée de $f(x)$ en x_0 est égale à la pente de la droite tangente au graphe de f au point $(x, f(x))$ (voir Figure 3). Si f est dérivable en x_0 elle est continue en x_0.

Exemples 1.2.8.

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (x^n)' = nx^{n-1}, \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}, \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Définition 1.2.9. Si $f(x)$ est dérivable en tout point x_0 de $]a, b[$, on dit que f *est dérivable sur* $]a, b[$. Dans ce cas $x \mapsto f'(x)$ définit une nouvelle fonction. La dérivée de cette fonction $f'(x)$ est notée $f''(x)$, c'est *la dérivée seconde* de f. La dérivée d'ordre n de f est notée $f^{(n)}$.

Théorème 1.2.10. *Les dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient ... sont données par les formules :*

$$\begin{aligned}
(f \pm g)'(x_0) &= f'(x_0) \pm g'(x_0) \\
(af)'(x_0) &= af'(x_0) \\
(fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \qquad si \quad g(x_0) \neq 0 \\
(f \circ g)'(x_0) &= f'(g(x_0))g'(x_0).
\end{aligned}$$

Démonstration. (première partie) On a

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0) + g'(x_0).
\end{aligned}$$

□

1.3 Développements limités, différentielles

Définition 1.3.1. Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f admet *un développement limité d'ordre* n au voisinage de x_0 si l'on peut écrire

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

où $\epsilon(x)$ tend vers 0 quand $x \to x_0$. Le polynôme $a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n$ est appelé *la partie régulière* du développement limité et $(x-x_0)^n\epsilon(x)$ est *le reste*. On note souvent $o((x - x_0)^n)$ à la place de $(x - x_0)^n\epsilon(x)$.

Ce développement, s'il existe, est **unique**. Lorsque $x_0 = 0$ le développement limité d'ordre n de f s'écrit simplement

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Notons $\mathrm{DL}_n(f, x_0)$ la partie régulière du développement limité d'ordre n de f en x_0. Alors

$$\mathrm{DL}_n(f \pm g, x_0) = \mathrm{DL}_n(f, x_0) \pm \mathrm{DL}_n(g, x_0)$$

et

$$\mathrm{DL}_n(af, x_0) = a\mathrm{DL}_n(f, x_0).$$

Pour calculer $\mathrm{DL}_n(fg, x_0)$, on développe le produit $\mathrm{DL}_n(f, x_0)\mathrm{DL}_n(g, x_0)$ et on garde uniquement les termes $(x - x_0)^m$ avec $m \leq n$.

Théorème 1.3.2. *Supposons que la fonction f admet les n premières dérivées continues au voisinage de x_0. Alors il existe un nombre a, compris entre x_0 et x, tel que*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \boxed{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - x_0)^n}$$

(c'est la formule de Mac Laurin). On a aussi

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

et si $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Exemples 1.3.3. Les DL en 0

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Définition 1.3.4. Soit $y = f(x)$ une fonction dérivable au voisinage de x_0. On appelle *différentielle de la fonction* $f(x)$ *au point* x_0 la fonction linéaire

$$X \mapsto Y = f'(x_0)X.$$

On pose $Y = dy$. En particulier si $y = f(x) = x$, la différentielle $dy = dx$ est la fonction linéaire

$$X \mapsto X.$$

Ceci permet d'écrire pour une fonction f **générale**

$$dy = f'(x_0)dx.$$

Par abus de langage, nous confondrons souvent la différentielle de f avec sa valeur que nous noterons df. [1]

Proposition 1.3.5. *On a*

$$d(f \pm g) = df \pm dg \qquad et \qquad d(af) = adf$$
$$d(fg) = gdf + fdg \qquad et \qquad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}.$$

Démonstration. (première partie) On a

$$d(f+g) = (f+g)'dx = (f'+g')dx = f'dx + g'dx = df + dg.$$

□

On a la proposition suivante.

Proposition 1.3.6. *Si* $F(x) = f(g(x))$ *alors*

$$dF(x) = f'(g(x))g'(x)dx$$

sur le domaine de définition de F.

Démonstration. On a

$$dF(x) = F'(x)dx = f'(g(x))g'(x)dx.$$

□

[1] on a déjà vu que la fonction $x \mapsto \sin x$ est confondue avec sa valeur $\sin x$

1.4 Primitives, intégrales

Définition 1.4.1. Soit f une fonction sur un intervalle $]a, b[$. On appelle *primitive de f* toute fonction dérivable F sur $]a, b[$ telle que

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pour tout } x \in]a, b[.$$

Si G est une autre primitive de F, la différence $F - G$ est toujours une fonction constante.

Exemples 1.4.2. La fonction $\sin x$ est une primitive de $\cos x$ sur $\mathbb{R}$ car $(\sin x)' = \cos x$. Les primitives de $\cos x$ sont $\sin x + c$ où c est une constante. Les primitives de $\sin x$ sont $-\cos x + c$; les primitives de e^x sont $e^x + c$, les primitives de x^n sont $\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pour $n \geq 0$ et les primitives de $\frac{1}{x}$ sont $\log |x| + c_1$ sur $]0, +\infty[$ ou $\log |x| + c_2$ sur $] - \infty, 0[$.

Considérons une fonction f continue sur un intervalle **fermé** $[a, b]$. On partage $[a, b]$ en n intervalles égaux au moyen des points de division

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad \ldots, \quad x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad \ldots, \quad x_n = b$$

(voir Figure 4). On définit

$$I_n = \frac{b-a}{n}\big[f(x_1) + \cdots + f(x_n)\big] = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(x_k).$$

On admet que la limite suivante existe

$$I = \lim_{n \to \infty} I_n.$$

Définition 1.4.3. On appelle I *l'intégrale de f sur* $[a, b]$ et on note

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Convention.

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Supposons que f est **positive** sur $[a, b]$. Alors $(x_k - x_{k-1})f(x_k)$ est l'aire du rectangle de base $[x_{k-1}, x_k]$ et de hauteur $f(x_k)$. Donc I_n est l'aire approchée de la surface limitée par le graphe de f et les droites $x = a$ et $x = b$. L'intégrale I est, dans ce cas, l'aire de la surface.

Proposition 1.4.4. *On a*

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

Si F est une primitive de f alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Proposition 1.4.5. (changement de variable) *Si l'on pose $x = \varphi(t)$ avec $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ et φ dérivable, on a*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Proposition 1.4.6. (intégration par parties) *On a*

$$\int_a^b udv = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b vdu.$$

Plus précisément, on a

$$\int_a^b uv'dx = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b u'vdx.$$

Notation. $\left[f\right]_a^b = f(b) - f(a).$

Démonstration. On a

$$[uv]_a^b = (uv)(b) - (uv)(a) = \int_a^b (uv)'dx = \int_a^b uv'dx + \int_a^b u'vdx.$$

D'où

$$\int_a^b uv'dx = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b u'vdx.$$

□

Remarque 1.4.7. On utilise souvent la formule précédente quand $u'v$ est “plus simple” que uv' (pour les calculs d'intégrale).

Exemple 1.4.8. Pour calculer $\int_0^1 xe^x dx$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$. On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$. Donc $du(x) = dx$ et $dv(x) = e^x dx$. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x dx &= \int_0^1 udv = \big[uv\big]_0^1 - \int_0^1 vdu \\
&= \big[xe^x\big]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \big[xe^x\big]_0^1 - \big[e^x\big]_0^1 \\
&= (1.e^1 - 0.e^0) - (e^1 - e^0) = (e - 0) - (e - 1) = 1.
\end{aligned}$$

1.5 Aire d'un domaine du plan

Dans ce paragraphe, nous utilisons les intégrales pour calculer l'aire d'une surface du plan.

Aire d'une arche de sinusoïde. Considérons le graphe de la fonction $y = \sin x$ pour x entre 0 et π (voir Figure 5). Calculons l'aire de la surface limitée par le graphe de cette fonction et l'axe Ox. Cette aire a pour valeur

$$S = \int_0^\pi \sin x dx = \big[-\cos x\big]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 2$$

car $-\cos x$ est une primitive de $\sin x$.

Aire d'une ellipse. Considérons la surface bordée par la courbe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

où a et b sont positifs (voir Figure 6). C'est une ellipse. La demie-ellipse supérieure est limitée par l'axe Ox et le graphe de la fonction positive

$$y = f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

qui est définie sur $[-a, a]$. Donc la surface de l'ellipse est donnée par

$$S = 2\int_{-a}^a f(x)dx.$$

On effectue le changement de variable

$$x = a\cos t \qquad y = b\sin t, \qquad t \in [0, \pi].$$

Il est clair que si $t=\pi$ on a $x=-a$ et si $t=0$ on a $x=a$. Donc

$$\begin{aligned} S &= 2\int_{\pi}^{0}(b\sin t)d(a\cos t) = 2\int_{\pi}^{0}(b\sin t)(-a\sin t)dt \\ &= -2ab\int_{\pi}^{0}\sin^2 t dt = 2ab\int_{0}^{\pi}\sin^2 t dt = ab\int_{0}^{\pi} 2\sin^2 t dt \\ &= ab\int_{0}^{\pi}(1-\cos 2t)dt = ab\left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]_{0}^{\pi} = \pi ab. \end{aligned}$$

Rappel. $2\sin^2 t = 1-\cos 2t$.

Exercices

Exercice 1.1. *Déterminer pour chacune des fonctions suivantes le domaine de définition et la limite au point x_0 indiqué.*

1. $\dfrac{2(1-\cos x)}{x^2}$ *en* $x_0=\dfrac{\pi}{3}$
2. $\dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x\tan^2 x}$ *en* $x_0=0$
3. $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2+\cos x}$ *en* $x_0=+\infty$
4. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+8}+\sqrt{x^2+4x}-2}{x}$ *en* $x_0=0$

Exercice 1.2. *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & si\ x>0 \\ 1 & si\ x=0 \\ \dfrac{\mathrm{sh}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} & si\ x<0 \end{cases}$$

est continue.

Exercice 1.3.

1. *Soit* $f(x)=\exp\left(\dfrac{x^2}{-2+\cos x}\right)$. *Calculer la limite de f en $+\infty$.*
2. *Soit* $g(x)=x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$, *pour $x\neq 0$. La fonction g admet-elle une limite en 0 ?*

Exercice 1.4. *Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}-\{0\}$ dans $\mathbb{R}$, définies par :*

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}, \qquad g(x)=x\sin\frac{1}{x}$$

Peut-on prolonger f et g par continuité en 0 ?

Exercice 1.5. *Etudier la continuité en 0 des fonctions suivantes :*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{e^{1/x}-2} & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(1/x)}{\cos(1/x) + e^{(1/x^2+x^2)}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.6. 1. *Montrer que les fonctions* $f(x) = |x|$ *et* $g(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ *sont continues et dérivables sur* $\mathbb{R}^*$.

2. *Etudier leur continuité et leur dérivabilité au point* 0.

Exercice 1.7. 1. *Donner la dérivée d'une fonction composée.*

2. *Donner la dérivée d'une fonction réciproque.*
3. *Calculer la dérivée des fonctions réciproques suivantes :* arcsin, arccos *et* arctan.
4. *Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition et calculer la dérivée :*

   (a) $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} + \arctan x$

   (c) $f(x) = \arctan \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ (d) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$

   (f) $f(x) = \arctan(\ln x)$

Exercice 1.8. *Calculer les développements limités des fonctions suivantes :*

1. $DL_4(0)$ *de* $f(x) = \ln^2(1+x)$ 2. $DL_3(0)$ *de* $g(x) = e^{\sin x}$

3. $DL_3(0)$ *de* $h(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ 4. $DL_3(0)$ *de* $j(x) = \dfrac{\ln(\cos x)}{\cos x - 1}$

5. $DL_3(1)$ *de* $k(x) = \sqrt{x}$ 6. $DL_7(0)$ *de* $l(x) = \dfrac{1}{1-x^2-x^3}$

Exercice 1.9. *Calculer les primitives des fonctions suivantes :*

1. $\dfrac{x-3}{(x+1)(x^2+4)}, \ x\sqrt{x^2+1}, \ \tan(2x)$

2. $\dfrac{6x-7}{3x^2-7x+11}, \ \dfrac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2}, \ \dfrac{1}{\sqrt{16-9x^2}}$

3. $\dfrac{x}{x^4+16}, \ \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}, \ \dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$

4. $xe^x, \ x\sin x, \ \ln x, \ x^n \ln x, \ x\cos^2 x, \ \ln(x^2+1)$

5. $\sin^3 x, \ \tan^3 x, \ \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}$

Exercice 1.10. *Calculer les intégrales suivantes :*

1.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \; dx$$

2.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x} \text{ (On pourra procéder au changement de variables } t = tan(x/2))$$

Exercice 1.11. *Calculer l'aire des domaines suivants :*

1. $\{\ (x, y) \mid 0 \leq x,\ 0 \leq y \text{ et } 1 \leq x + y \leq 2\}$
2. $\{\ (x, y) \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ et } x \leq y \leq \mathrm{sh} x\}$
3. $\{\ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi \text{ et } \sin^2 x \leq y \leq \sin x\}$
4. $\{\ (r, \theta) \mid \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2} \text{ et } r \leq 1\}$

Chapitre 2

Fonctions de plusieurs variables

2.1 Définitions, graphe, lignes de niveau

Définition 2.1.1. Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. Une *fonction sur D* est une application de D dans $\mathbb{R}$, c.-à-d. une correspondance $(x,y) \mapsto f(x,y)$ qui, à chaque couple de nombres réels $(x,y) \in D$, associe un nombre réel $f(x,y)$. L'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ où f est définie s'appelle *domaine de définition de f*.

Si M est le point de coordonnées (x,y), on peut noter par $f(M)$ ou par $f(x,y)$ la valeur de f en (x,y).

Exemples 2.1.2.

$$f(x,y) = ax + by \qquad \text{est une fonction linéaire}$$

$$f(x,y) = ax + by + c \qquad \text{est une fonction affine}$$

$$f(x,y) = x^3 - y^2 + x + 2y - 1 \qquad \text{est un polynôme.}$$

La fonction

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$$

est définie quand $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$, c.-à-d. sur le carré de centre $(0,0)$ de taille 2×2 avec bord ; la fonction

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}}$$

est définie quand $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$ sauf pour $|x| = |y| = 1$, c.-à-d. sur le carré de centre $(0,0)$ de taille 2×2 privé de ses 4 sommets ; et la fonction

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

est définie pour $x^2 + y^2 < 1$, c.-à-d. sur le disque sans bord de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

Comme pour les fonctions d'une variable, on peut définir le graphe d'une fonction à deux variables. Le *graphe* d'une fonction à deux variables f est l'ensemble des points de coordonnées $(x, y, f(x, y))$ dans $\mathbb{R}^3$. On note S le graphe de f. C'est *la surface représentative* de la fonction f.

On peut également représenter la distribution des valeurs de $f(x, y)$ à l'aide de l'ensemble des points (x, y) tels que $f(x, y)$ ait une même valeur c. C'est une courbe dans $\mathbb{R}^2$ d'équation

$$f(x, y) = c.$$

Elle est une *ligne de niveau de f*.

Les lignes de niveau de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ sont les cercles de centre 0, d'équation

$$x^2 + y^2 = c.$$

Remarque 2.1.3. Les fonctions à trois variables sont définies de la même manière. Si $f(x, y, z)$ est une fonction de trois variables, les surfaces de niveau ont comme équation

$$f(x, y, z) = c.$$

Les *surfaces de niveau* de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ par exemple sont les sphères de centre 0.

2.2 Limites, continuité

Définition 2.2.1. Soit $f(x, y)$ une fonction à deux variables qui est définie au moins dans un carré de centre $M_0 = (x_0, y_0)$ sauf peut-être en M_0. On dit que $f(M) = f(x, y)$ tend vers L quand M tend vers M_0 si la propriété suivante est satisfaite

quel que soit le nombre $\epsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$\big(|x - x_0| < \alpha, \quad |y - y_0| < \alpha, \quad (x, y) \neq (x_0, y_0)\big) \quad \Longrightarrow \quad |f(x, y) - L| < \epsilon$$

et on écrit

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = L.$$

La propriété précédente dit que $f(M)$ appartient à l'intervalle $]L - \epsilon, L + \epsilon[$ dès que M appartient au carré de centre M_0 et de taille $2\alpha \times 2\alpha$ et $M \neq M_0$.

Définition 2.2.2. On dit que f *est continue en* M_0 si $\lim_{M \to M_0} f(M)$ existe et est égale à la valeur $f(M_0)$ de f en M_0. Si f est continue en chaque point de D, on dit que f *est continue sur* D.

Proposition 2.2.3. *Si la fonction f est continue en M_0, elle est bornée dans un voisinage de M_0. Plus précisément, il existe $\alpha > 0$ et $A > 0$ tels que lorsque $|x - x_0| < \alpha$ et $|y - y_0| < \alpha$ on a $|f(x, y)| < A$.*

Démonstration. Comme f est continue en M_0, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\big(|x - x_0| < \alpha, \quad |y - y_0| < \alpha, \quad (x, y) \neq (x_0, y_0)\big) \quad \Longrightarrow \quad |f(M) - f(M_0)| < \epsilon.$$

Observons que la dernière inégalité est aussi vraie pour $M = M_0$ car on a $0 = |f(M_0) - f(M_0)| < \epsilon$. On en déduit que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\big(|x - x_0| < \alpha, \quad |y - y_0| < \alpha\big) \quad \Longrightarrow \quad |f(M) - f(M_0)| < \epsilon.$$

En particulier, pour $\epsilon = 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\big(|x - x_0| < \alpha, \quad |y - y_0| < \alpha\big) \quad \Longrightarrow \quad |f(M) - f(M_0)| < 1.$$

Posons $A = |f(M_0)| + 1$. Si α et (x, y) sont comme ci-dessus, on obtient grâce à l'inégalité triangulaire que

$$|f(M)| = |f(M) - f(M_0) + f(M_0)| \leq |f(M) - f(M_0)| + |f(M_0)| \leq 1 + |f(M_0)| = A.$$

C'est qu'il faut démontrer. □

Proposition 2.2.4. *On a*

$$\lim_{M \to M_0} \big(f(M) \pm g(M)\big) = \lim_{M \to M_0} f(M) \pm \lim_{M \to M_0} g(M)$$

$$\lim_{M \to M_0} \lambda f(M) = \lambda \lim_{M \to M_0} f(M)$$

$$\lim_{M \to M_0} \big(f(M) g(M)\big) = \lim_{M \to M_0} f(M) \lim_{M \to M_0} g(M)$$

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{\lim_{M \to M_0} f(M)}{\lim_{M \to M_0} g(M)} \quad \textit{si} \ \lim_{M \to M_0} g(M) \neq 0.$$

Démonstration. (première partie) Posons

$$L = \lim_{M \to M_0} f(M) \qquad \text{et} \qquad H = \lim_{M \to M_0} g(M).$$

Par définition de limite, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que

$$\big(|x - x_0| < \alpha_1, \quad |y - y_0| < \alpha_1, \quad (x, y) \neq (x_0, y_0)\big) \quad \Longrightarrow \quad |f(x, y) - L| < \epsilon/2.$$

Pour la fonction g, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que

$$\big(|x - x_0| < \alpha_2, \quad |y - y_0| < \alpha_2, \quad (x, y) \neq (x_0, y_0)\big) \quad \Longrightarrow \quad |g(x, y) - H| < \epsilon/2.$$

Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. On a $\alpha > 0$ et lorsque

$$|x - x_0| < \alpha, \quad |y - y_0| < \alpha, \quad (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

on a

$$|x - x_0| < \alpha_1, \quad |y - y_0| < \alpha_1, \quad (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

et

$$|x - x_0| < \alpha_2, \quad |y - y_0| < \alpha_2, \quad (x, y) \neq (x_0, y_0).$$

Les deux dernières propriétés impliquent

$$|f(x, y) - L| < \epsilon/2 \quad \text{et} \quad |g(x, y) - H| < \epsilon/2;$$

On obtient grâce à l'inégalité triangulaire que

$$|f(x, y) + g(x, y) - L - H| \leq |f(x, y) - L| + |g(x, y) - H| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Ceci implique que

$$\lim_{M \to M_0} f(M) + g(M) = L + H = \lim_{M \to M_0} f(M) + \lim_{M \to M_0} g(M).$$

□

Proposition 2.2.5. *Si f et g sont continues en M_0 alors $f \pm g$, λf, fg sont continue en M_0. Si de plus $g(M_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en M_0.*

Démonstration. (première partie) On a d'après la proposition précédente

$$\lim_{M \to M_0} f(M) + g(M) = \lim_{M \to M_0} f(M) + \lim_{M \to M_0} g(M) = f(M_0) + g(M_0)$$

car f et g sont continues en M_0. Ceci montre que $f + g$ est continue en M_0. □

Théorème 2.2.6. *Si f est une fonction à deux variables, continue en M_0 et si h est une fonction à une variable continue en $f(M_0)$, alors la fonction composée $h(f(x, y))$ est continue en M_0.*

Démonstration. (je décris seulement l'idée de la preuve) Quand $M \to M_0$, on a $f(M) \to f(M_0)$ car f est continue en M_0. Puisque h est continue en $f(M_0)$, on obtient que $h(f(M)) \to h(f(M_0))$. Donc $h(f(x, y))$ est continue en M_0. □

Théorème 2.2.7. *Soient $h_1(x)$ une fonction à une variable continue en x_0 et $h_2(y)$ une fonction à une variable continue en y_0. Si f est une fonction à deux variables continue en $\big(h_1(x_0), h_2(y_0)\big)$, alors la fonction composée $f\big(h_1(x), h_2(y)\big)$ est continue en M_0.*

Exemple 2.2.8. La fonction $e^{x^2+y^2}$ est continue en tout point car la fonction exponentielle est continue et la fonction $x^2 + y^2$ est continue comme somme de fonctions continues.

Remarque 2.2.9. (changement de variables) Soient $u(x,y)$ et $v(x,y)$ deux fonctions de deux variables en x, y et $f(u,v)$ une fonction de deux variables u, v. Si on remplace les variables u, v par les fonctions $u(x,y)$ et $v(x,y)$ on obtient une fonction de deux variables x, y

$$F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)).$$

Si f, u et v sont continues, F est aussi continue.

Remarque 2.2.10. La limite, la continuité et les fonctions composées au cas de trois variables sont définies de la même manière.

2.3 Dérivées partielles

On considère une fonction $f(x,y)$ à deux variables définie au voisinage d'un point $M_0 = (x_0, y_0)$. Lorsqu'on fixe une variable x ou y on obtient une fonction d'une variable. On suppose que les fonctions **d'une variable**

$$F_1(x) = f(x, y_0) \qquad \text{est dérivable en } x_0$$

et

$$F_2(y) = f(x_0, y) \qquad \text{est dérivable en } y_0.$$

Définition 2.3.1. On appelle *dérivée partielle* de f, par rapport à la variable x, au point $M_0 = (x_0, y_0)$ la dérivée $F_1'(x_0)$ de la fonction $F_1(x)$ en x_0. On la note

$$f_x'(x_0, y_0) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

La *dérivée partielle* de f par rapport à la variable y au point $M_0 = (x_0, y_0)$ est la dérivée $F_2'(y_0)$ de $F_2(y)$ en y_0. On la note

$$f_y'(x_0, y_0) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Lorsque les dérivées partielles existent en tout point d'un domaine D, elles définissent des fonctions à deux variables sur ce domaine. On note

$$f_x'(x,y) \qquad \text{et} \qquad f_y'(x,y) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}$$

ces fonctions.

Exemple 2.3.2. Soit $f(x,y) = x^2 + y^3 + xy$. On a

$$f_x'(x,y) = 2x + y \qquad \text{et} \qquad f_y'(x,y) = 3y^2 + x.$$

Comme dans le cas d'une variable, on a la proposition suivante

Proposition 2.3.3. *On a*

$$(f \pm g)'_x = f'_x \pm g'_x, \qquad (af)'_x = af'_x, \qquad (fg)'_x = f'_x g + f g'_x$$

et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_x = \frac{f'_x g - f g'_x}{g^2}$$

là où g ne s'annule pas.

Démonstration. (première partie) Posons

$$F_1(x) = f(x, y_0), \qquad G_1(x) = g(x, y_0) \qquad \text{et} \qquad H_1(x) = f(x, y_0) + g(x, y_0).$$

On a

$$(f+g)'_x(x_0, y_0) = H'_1(x_0) = F'_1(x_0) + G'_1(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + g'_x(x_0, y_0).$$

C'est qu'il faut démontrer. □

On peut considérer les dérivées partielles de $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$

$$f''_{xx}(x, y), \qquad f''_{xy}(x, y), \qquad f''_{yx}(x, y), \qquad f''_{yy}(x, y)$$

lorsqu'elles existent. Ce sont les *dérivées d'ordre 2* de f. Dans l'exemple 2.3.2 on obtient

$$2, \qquad 1, \qquad 1, \qquad 6y.$$

On admet le théorème suivant.

Théorème 2.3.4. *Si les dérivées $f''_{xy}(x, y)$ et $f''_{yx}(x, y)$ existent et sont continues, alors elles sont égales.*

Supposons que f admet toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre n et ces dérivées sont continues. Pour n dérivations où interviennent p fois la variable x et q fois la variable y, $(n = p + q)$, on note la dérivée partielle correspondante

$$f^{(n)}_{x^p y^q}(x, y) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^q}(x, y).$$

Par exemple pour $n = 3$, les dérivées partielles d'ordre 3 sont

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Ceci correspond à $(p, q) = (3, 0), (2, 1), (1, 2)$ ou $(0, 3)$.

Exemple 2.3.5. Soit $f(x,y) = x^3y^2$. On a

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6y^2, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 12xy, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 6x^2, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0.$$

Théorème 2.3.6. (dérivée de fonction composée) *Soient $u(x)$ et $v(x)$ des fonctions d'une variable dérivables en x_0. Soient $u_0 = u(x_0)$ et $v_0 = v(x_0)$. Soit f une fonction à deux variables définie au voisinage de (u_0, v_0) admettant les dérivées partielles d'ordre 1 continues au voisinage de (u_0, v_0). Alors la fonction composée $f[(u(x), v(x)]$ est une fonction à une variable et sa dérivée en x_0 est égale à*

$$f'_u(u_0, v_0)u'(x_0) + f'_v(u_0, v_0)v'(x_0).$$

On a aussi le théorème suivant.

Théorème 2.3.7. (dérivée de fonction composée) *Soient $u(x,y)$ et $v(x,y)$ des fonctions de deux variables admettant les dérivées partielles au voisinage de (x_0, y_0). Soient $u_0 = u(x_0, y_0)$ et $v_0 = v(x_0, y_0)$. Soit f une fonction à deux variables définie au voisinage de (u_0, v_0) admettant les dérivées partielles d'ordre 1 continues au voisinage de (u_0, v_0). Posons $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$. Alors*

$$F'_x(x_0, y_0) = f'_u(u_0, v_0)u'_x(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0)v'_x(x_0, y_0)$$

et

$$F'_y(x_0, y_0) = f'_u(u_0, v_0)u'_y(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0)v'_y(x_0, y_0).$$

Maintenant, on définit le plan tangent d'une surface dans $\mathbb{R}^3$. Soit S une surface dans $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$z = f(x,y)$$

où f est une fonction définie au voisinage de (x_0, y_0). Soit $z_0 = f(x_0, y_0)$. On suppose que f admet les dérivées partielles d'ordre 1 et que ces dérivées sont des fonctions continues. Alors *le plan tangent de S en* (x_0, y_0, z_0) est défini par l'équation

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

(voir Figure 5).

Exemple 2.3.8. Soit S la surface d'équation

$$z = f(x,y) = x^2 + y^2.$$

On a

$$f'_x(x,y) = 2x \qquad f'_y(x,y) = 2y.$$

Le plan tangent de S en $(1, 1, 2)$ a comme équation

$$z - 2 = 2(x-1) + 2(y-1)$$

soit

$$z = 2x + 2y - 2.$$

2.4 Fonctions implicites

On admet le théorème général suivant

Théorème 2.4.1. (existence et unicité de fonction implicite) *Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables telle que $f(x_0,y_0)=0$. Supposons que f admet les dérivées partielles d'ordre 1 continues au voisinage de (x_0,y_0). Supposons aussi que $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$. Alors il existe un voisinage de x_0 et une fonction dérivable $y=\varphi(x)$ sur ce voisinage tels que*

$$\varphi(x_0)=y_0 \qquad \textit{et} \qquad f(x,\varphi(x))=0.$$

De plus, la fonction $\varphi(x)$ satisfaisant ces conditions est unique.

Définition 2.4.2. Cette fonction $\varphi(x)$ s'appelle *fonction implicite* définie par l'équation $f(x,y)=0$ et par la condition initiale $\varphi(x_0)=y_0$.

Exemple 2.4.3. Soit $f(x,y)=x^2+y^2-1$. L'ensemble des zéros de f est le cercle $\{x^2+y^2=1\}$. Soient $x_0=0$ et $y_0=1$. L'équation $f(x,y)=0$ est équivalente à $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. Au voisinage de $(x_0,y_0)=(0,1)$ on a $y>0$, donc $y=\sqrt{1-x^2}$. La fonction $\varphi(x)$ est, dans ce cas, égale à $\sqrt{1-x^2}$. Elle est définie sur $[-1,1]$.

Théorème 2.4.4. *Sous l'hypothèse du Théorème 2.4.1, on a*

$$\varphi'(x)=-\frac{f'_x(x,\varphi(x))}{f'_y(x,\varphi(x))}.$$

Démonstration. On a $f(x,\varphi(x))=0$ pour tout x au voisinage de x_0. En prenant la dérivée par rapport à x on obtient grâce au théorème 2.3.6 que

$$f'_x(x,\varphi(x))+f'_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0.$$

Ceci implique le théorème. □

Remarque 2.4.5. Si $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, il existe une fonction dérivable $\psi(y)$ définie au voisinage de y_0 telle que

$$\psi(y_0)=x_0 \qquad \text{et} \qquad f(\psi(y),y)=0$$

et on a

$$\psi'(y)=-\frac{f'_y(\psi(y),y)}{f'_x(\psi(y),y)}.$$

Corollaire 2.4.6. *Supposons qu'au moins l'une de deux dérivées $f'_x(x_0,y_0)$ ou $f'_y(x_0,y_0)$ soit non nulle. Alors la droite tangente de la courbe d'équation $f(x,y)=0$ en (x_0,y_0) admet comme équation*

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0.$$

Démonstration. On considère le cas où $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, l'autre cas sera traité de la même manière. Au voisinage de (x_0, y_0), la courbe $f(x, y) = 0$ est le graphe de la fonction $y = \varphi(x)$. Sa droite tangente en (x_0, y_0) admet comme équation

$$y - y_0 = \varphi'(x_0)(x - x_0).$$

D'après le théorème 2.4.4, la dernière équation est équivalente à

$$y - y_0 = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}(x - x_0)$$

ou encore

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

C'est qu'il faut démontrer. □

On a des propriétés analogues pour les fonctions à trois variables

Théorème 2.4.7. (existence et unicité de fonction implicite) *Soit $f(x, y, z)$ une fonction de trois variables telle que $f(x_0, y_0, z_0) = 0$. Supposons que f admet les dérivées partielles d'ordre 1 continues au voisinage de (x_0, y_0, z_0). Supposons aussi que $f'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Alors il existe un voisinage de (x_0, y_0) et une fonction $z = \varphi(x, y)$ sur ce voisinage tels que*

$$\varphi(x_0, y_0) = z_0 \qquad \textit{et} \qquad f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$$

et φ admette les dérivées partielles d'ordre 1 continues. De plus, la fonction $\varphi(x, y)$ satisfaisant ces conditions est unique.

Définition 2.4.8. Cette fonction $\varphi(x, y)$ s'appelle *fonction implicite* définie par l'équation $f(x, y, z) = 0$ et par la condition initiale $\varphi(x_0, y_0) = z_0$.

Théorème 2.4.9. *Les dérivées partielles de la fonction $\varphi(x, y)$ sont données par les formules*

$$\varphi'_x(x, y) = -\frac{f'_x(x, y, \varphi(x, y))}{f'_z(x, y, \varphi(x, y))} \qquad \textit{et} \qquad \varphi'_y(x, y) = -\frac{f'_y(x, y, \varphi(x, y))}{f'_z(x, y, \varphi(x, y))}.$$

Corollaire 2.4.10. *Supposons qu'au moins l'une de trois dérivées $f'_x(x_0, y_0, z_0)$, $f'_y(x_0, y_0, z_0)$ ou $f'_z(x_0, y_0, z_0)$ soit non nulle. Alors le plan tangent de la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ en (x_0, y_0, z_0) admet comme équation*

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Exemple 2.4.11. Le plan tangent de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

en $(1/3, 2/3, 2/3)$ est de l'équation

$$\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{3}\left(y - \frac{2}{3}\right) + \frac{4}{3}\left(z - \frac{2}{3}\right) = 0$$

soit

$$x + 2y + 2z = 3.$$

2.5 Développement limité d'ordre 1

Soit f une fonction définie au moins sur un voisinage de $M_0 = (x_0, y_0)$. Nous supposons que les dérivées partielles d'ordre 1 de f existent et sont des fonctions continues.

Théorème 2.5.1. *On a la formule*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0) + \sqrt{h^2 + k^2}\epsilon(h, k)$$

où $\epsilon(h, k)$ *est une fonction à deux variables qui tend vers* 0 *quand* (h, k) *tend vers* $(0, 0)$.

La formule précédente est *le développement limité d'ordre 1* pour la fonction $f(x, y)$ au voisinage de M_0. Notons que $\sqrt{h^2 + k^2}$ est la distance entre les points (x_0, y_0) et $(x_0 + h, y_0 + k)$.

Exemple 2.5.2. Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$. On a $f'_x(x, y) = 2x$ et $f'_y(x, y) = 2y$. Le DL d'ordre 1 de f au voisinage de $(1, 1)$ est

$$f(1 + h, 1 + k) = 2 + 2h + 2k + \sqrt{h^2 + k^2}\epsilon(h, k).$$

Remarque 2.5.3. On peut aussi considérer les DL pour les fonctions à trois variables. Si $f(x, y, z)$ est une fonction admettant les dérivées partielles d'ordre 1 continues au voisinage de (x_0, y_0, z_0). Alors

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) &= f(x_0, y_0, z_0) + hf'_x(x_0, y_0, z_0) + kf'_y(x_0, y_0, z_0) \\ &\quad + lf'_z(x_0, y_0, z_0) + \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}\epsilon(h, k, l) \end{aligned}$$

où $\epsilon(h, k, l)$ tend vers 0 quand (h, k, l) tend vers 0.

2.6 Formes différentielles

Soit $f(x, y)$ une fonction à deux variables définie au voisinage de (x_0, y_0). Supposons aussi qu'elle admet les dérivées partielles d'ordre 1. La fonction

$$(h, k) \mapsto f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k$$

définit une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ que l'on appelle *différentielle* de la fonction f au point (x_0, y_0).

En un point (x, y) général *la différentielle de* f s'écrit

$$(h, k) \mapsto f'_x(x, y)h + f'_y(x, y)k$$

ou plus simplement

$$(h, k) \mapsto f'_xh + f'_yk.$$

C'est une fonction linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ mais elle dépend du point (x, y) car les dérivées f'_x et f'_y dépendent de (x, y). On l'a noté par df. Par abus de langage, nous confondrons souvent df avec sa valeur $f'_x h + f'_y k$.

Si $f(x, y) = x$ on a $df = dx = h$ et si $f(x, y) = y$ on a $df = dy = k$. Par conséquent, on peut écrire pour f générale

$$df = f'_x dx + f'_y dy.$$

Proposition 2.6.1. *On a*

$$d(f_1 \pm f_2) = df_1 \pm df_2 \qquad d(\lambda f) = \lambda df$$

et

$$d(uv) = udv + vdu \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Démonstration. (deuxième partie) On a

$$d(\lambda f) = \frac{\partial(\lambda f)}{\partial x} dx + \frac{\partial(\lambda f)}{\partial y} dy = \lambda f'_x dx + \lambda f'_y dy = \lambda df.$$

C'est qu'il faut démontrer. □

Définition 2.6.2. On appelle *forme différentielle* (plus précisément 1-*forme différentielle*) une combinaison ω linéaire de dx et dy à coefficients variables $A(x, y)$ et $B(x, y)$, que nous écrirons

$$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy.$$

Les formes différentielles ω qui sont les différentielles d'une fonction, c.-à-d. que $\omega = df$, sont appelées *exactes*.

Théorème 2.6.3. *Supposons que A et B admettent les dérivées partielles continues sur un domaine sans trou D de $\mathbb{R}^2$. Alors la forme différentielle*

$$\omega = Adx + Bdy$$

est exacte sur D si et seulement si

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Démonstration. (condition nécessaire) Si ω est exacte, on a $\omega = df$. Donc $A = f'_x$ et $B = f'_y$. Par hypothèse, $A'_y = f''_{xy}$ et $B'_x = f''_{yx}$ existent et sont continues. D'après le théorème 2.3.4, on a $f''_{xy} = f''_{yx}$. Ceci implique que $A'_y = B'_x$. □

Remarque 2.6.4. En général, le théoème précédent est faux sur les domaines qui ont des trous.

Théorème 2.6.5. (changement de variables) *Si l'on effectue le changement de variables*

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v)$$

alors la forme différentielle $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ *devient*

$$A_1(u, v)du + B_1(u, v)dv$$

avec

$$A_1(u, v) = A\big(x(u, v), y(u, v)\big)\frac{\partial x}{\partial u} + B\big(x(u, v), y(u, v)\big)\frac{\partial y}{\partial u}$$

et

$$B_1(u, v) = A\big(x(u, v), y(u, v)\big)\frac{\partial x}{\partial v} + B\big(x(u, v), y(u, v)\big)\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Démonstration. On a

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \qquad \text{et} \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

Donc

$$\omega = A\big(x(u, v), y(u, v)\big)\Big(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\Big) + B\big(x(u, v), y(u, v)\big)\Big(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\Big).$$

En développant le membre à droite, on obtient

$$\omega = A_1(u, v)du + B_1(u, v)dv$$

avec A_1 et B_1 comme ci-dessus. □

Remarque 2.6.6. Si $f(x, y, z)$ est une fonction à trois variables, la différentielle de f est

$$df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz.$$

Une forme différentielle à 3 variables s'écrit

$$\omega = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz.$$

Supposons que A, B, C admettent les dérivées partielles d'ordre 1 continues. Sur un domaine sans trou D (un domaine convexe par exemple), ω est exacte si et seulement si

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \qquad \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial x}, \qquad \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}.$$

Exercices

Exercice 2.1. *Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition D et donner une représentation graphique de D.*

1. $f(x,y) = \ln(x^2+y^2-1)$ 2. $f(x,y) = \ln(y-x^2)$

3. $f(x,y) = \sqrt{1-xy}$ 4. $f(x,y) = \sqrt{(x+y+1)(x+y-1)}$

5. $f(x,y) = \dfrac{\sin x + \cos y}{x^2+xy+y^2}$

Exercice 2.2. *Représenter la ligne de niveau c de la fonction f dans les cas suivants :*

1.$f(x,y) = 3x+2y$ $c = 1,\ 2,\ 0$

2. $f(x,y) = y^2$ $c = -1,\ 0,\ 1,\ 4$

3. $f(x,y) = \ln(x+y)$ $c = 0,\ 1$

Exercice 2.3. *Pour $f(x,y)$, c et m_0 donnés ci-dessous, donner l'équation de la courbe I^c de niveau c de f et celle de la tangente T à I^c au point m_0 :*

1. $f(x,y) = \ln(y-x^2)$ $c = 0$ $m_0 = (-1,2)$

2. $f(x,y) = 2xy - 3x + y + 3$ $c = 6$ $m_0 = (1,2)$

3. $f(x,y) = 2^{xy}$ $c = 4$ $m_0 = (1,2)$

Exercice 2.4. *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \textit{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

1. *Etudier la continuité de f sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *Calculer les dérivées partielles de f sur* $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. *Que valent-elles en* $(0,0)$ *?*

Exercice 2.5. *Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition et étudier la limite en* $(0,0)$.

1. $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{y^2}$ 2. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x}$ 3. $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

4. $f(x,y) = (x+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right)$ 5. $f(x,y) = (1+xy)^{1/x}$

Exercice 2.6. *On considère la fonction f définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & \textit{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$ mais que sa restriction à $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ l'est.

Exercice 2.7. *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

1. *Soit $\mathcal{D}$ une droite quelconque passant par l'origine. Montrer que la restriction de f à $\mathcal{D}$ est continue en $(0,0)$.*
2. *Peut-on en déduire que f est continue en $(0,0)$?*

Exercice 2.8. *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-1)y^3}{(x-1)^2 + y^2} & si\ (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Etudier la continuité et la dérivabilité (différentiabilité) de f au point $(1,0)$.

Exercice 2.9. *Donner les dérivées partielles au premier ordre des fonctions suivantes :*

(a) $f(x,y,z) = x^3 y + xyz + xz^3$ *(b)* $f(x,y) = x^{y^2}$

(c) $f(x,y,z) = \exp\left(\frac{x}{y}\right) + \exp\left(\frac{z}{y}\right)$ *(d)* $f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2)$

Exercice 2.10. *Soit $f = exp(u - 2v)$, où $u : (x,y) \longmapsto \sin x$ et $v : (x,y) \longmapsto x^3 + y^2$. Calculer les dérivées partielles de f.*

Exercice 2.11. *Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x\varphi(\frac{y}{x}) \end{cases}$*

Montrer que : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = f$.

Exercice 2.12. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction satifaisant à l'équation d'Euler :* $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} = mf$.

Pour (x,y,z) fixés, on pose $\varphi : \alpha \longmapsto \frac{1}{\alpha^m} f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$.
Montrer que $\varphi' = 0$ et en déduire que f est homogène de degré m.

Exercice 2.13.
1. *Montrer que $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ vérifie l'équation de Laplace :* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.
2. *On considère $u = 1/r$, où $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Montrer que u satisfait l'équation de Laplace :* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

Exercice 2.14. *Déterminer les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 des fonctions suivantes :*

1. $f(x,y) = x^2 + xy - y^3$. *Le théorème de symétrie de Schwarz est-il vérifié ?*

2. $f(x,y,z) = \cos(x+yz)$.

Exercice 2.15. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ de la manière suivante :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. *Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, en $(0,0)$ et les calculer.*
2. *Que peut-on déduire de ces résultats ?*

Exercice 2.16 (Laplacien en coordonnées polaires). *Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui admet en tout point de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2. On considère la fonction $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.*

1. *Déterminer $\dfrac{\partial F}{\partial r}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$.*
2. *En déduire l'expression de Laplacien de f : $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ au point $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.*

Exercice 2.17. *Montrer que l'équation $x^5 + 3xy - y^6 = 1$ définit y comme une fonction implicite de x au voisinage du point $(1,0)$. En notant $y = \varphi(x)$, calculer $\varphi'(1)$ et $\varphi''(1)$.*

Exercice 2.18. *Montrer que l'équation $xy + yz + xz + 2x + 2y - z = 0$ définit implicitement une fonction $(x,y) \longmapsto z = f(x,y)$ au voisinage de $(0,0,0)$ et calculer le plan tangent en ce point à la surface considérée.*

Exercice 2.19. *Soit $F(x,y) = x^2 + y^4 - 3xy + x - 1$. Montrer qu'on peut appliquer à F le théorème des fonctions implicites au point $(2,1)$.*

Soit $\varphi(x)$ une fonction telle que dans un voisinage de $(2,1)$ on ait l'équivalence :

$$F(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x).$$

On a donc $\varphi(2) = 1$ et $F(x,\varphi(x)) = 0$ dans le voisinage de $x = 2$ considéré. En dérivant deux fois cette dernière relation, puis en évaluant en $x = 2$, calculer $\varphi'(2)$ et $\varphi''(2)$.

En déduire un développement limité de φ à l'ordre 2 au point 2.

Exercice 2.20. *Développer à l'ordre 1 les fonctions suivantes, au voisinage des points indiqués :*

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ — $(1,1)$, $(0,2)$, (a,b)

(b) $f(x,y,z) = x^2 + 3xyz - y^3 + z$ — $(1,0,-1)$

(c) $f(x,y,z) = \sin x \cos y \tan z$ — $\left(0, \pi, \dfrac{\pi}{4}\right)$

Exercice 2.21. *Calculer les différentielles totales des fonctions suivantes :*

(a) $f(x, y) = \ln(xy)$

(b) $f(x, y, z) = x^2 + x^2y^2z^2 + \sin(yz)$

(c) $f(x, y, z) = \tan(3x - y) + 6^{y+z}$

Chapitre 3

Intégrales curvilignes

3.1 Vecteurs, produits de vecteurs

Définition 3.1.1. Un *vecteur* dans le plan est la donnée d'un couple ordonné (A, B) de deux points dans le plan. C'est le vecteur *d'origine* A et *d'extrémité* B et on le note par $\overrightarrow{AB}$. Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont considérés comme *égaux* si l'on peut obtenir l'un par l'autre en utilisant une translation.

Définition 3.1.2. Notons (x_A, y_A), (x_B, y_B) les coordonnées de A, B. Alors $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ sont appelés *les composantes* du vecteur $\overrightarrow{AB}$. La *norme* de $\overrightarrow{AB}$ est notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, elle est égale à

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

C'est la longueur du segment joignant A et B. Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont *égaux* si et seulement s'ils ont les mêmes composantes.

Remarque 3.1.3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si le polygône $ABDC$ est un parallèlogramme. On peut obtenir $\overrightarrow{CD}$ comme une translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exemple 3.1.4. Soient $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$, $C = (3, 2)$ et $D = (4, 4)$. Alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux car ils ont comme composantes $(1, 2)$.

Attention. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ **ne sont pas** égaux. $ABCD$ **n'est pas** un parallèlogramme. $\overrightarrow{DC}$ a comme composantes $(-1, -2)$.

Définition 3.1.5. Soient $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ deux vecteurs de composantes (a_1, b_1) et (a_2, b_2) respectivement. La *somme* $\overrightarrow{v_1} \pm \overrightarrow{v_2}$ est un vecteur de composantes $(a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2)$. Si λ est un nombre réel, on définit $\lambda\overrightarrow{v_1}$ comme un vecteur de composantes $(\lambda a_1, \lambda b_1)$. Le *produit scalaire* de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ est le nombre $a_1 a_2 + b_1 b_2$ et sera noté $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}$. Si $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$ on dit que $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont *orthogonaux*.

Proposition 3.1.6. *On a*

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1}$$

$$(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) \cdot \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_3}$$

$$\overrightarrow{v_1} \cdot (\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_3}$$

$$(\lambda\overrightarrow{v_1}) \cdot \overrightarrow{v_2} = \lambda(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}).$$

Démonstration. (première partie) On écrit $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2)$. On a $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = a_1a_2 + b_1b_2$ et $\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1} = a_2a_1 + b_2b_1$. D'où $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1}$. □

Cas de l'espace. Les vecteurs, leurs sommes, produits scalaires dans $\mathbb{R}^3$ sont définis de la même manière. Si $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont respectivement deux vecteurs de composantes (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2), alors leur produit scalaire $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}$ est égal à

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2.$$

La proposition 3.1.6 est valable dans ce cas.

Définition 3.1.7. Le *produit vectoriel* de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ est un vecteur de composantes

$$(b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Il est noté $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}$.

Proposition 3.1.8. *On a*

$$\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}.$$

$$(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) \wedge \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3}$$

$$\overrightarrow{v_1} \wedge (\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_3}$$

$$(\lambda\overrightarrow{v_1}) \wedge \overrightarrow{v_2} = \lambda(\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}).$$

Démonstration. (première partie) On a

$$\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = (b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1)$$

et

$$\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1} = (b_2c_1 - b_1c_2, c_2a_1 - c_1a_2, a_2b_1 - a_1b_2).$$

Il est clair que $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_1}$. □

Proposition 3.1.9. *On a $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont proportionnels, c.-à-d. qu'on a $\overrightarrow{v_1} = \lambda\overrightarrow{v_2}$ ou $\overrightarrow{v_2} = \lambda\overrightarrow{v_1}$ avec λ une constante.*

Démonstration. **Condition suffisante.** Supposons par exemple que $\overrightarrow{v_1} = \lambda\overrightarrow{v_2}$ (le cas où $\overrightarrow{v_2} = \lambda\overrightarrow{v_1}$ sera traité de la même manière). On a alors $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$, $c_1 = \lambda c_2$. Ceci implique que

$$\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = (b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1) = (0, 0, 0).$$

Condition nécessaire. Supposons que $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = 0$. On montre que $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont proportionnels. Si $\overrightarrow{v_1} = 0$ on a $\overrightarrow{v_1} = 0\overrightarrow{v_2}$; les deux vecteurs sont proportionnels. Sinon, on a $(a_1, b_1, c_1) \neq (0, 0, 0)$. Supposons que $a_1 \neq 0$ (le cas où $b_1 \neq 0$ ou $c_1 \neq 0$ seront traités de la même manière). On a supposé que

$$\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = (b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1) = (0, 0, 0).$$

En particulier, on a $c_1a_2 - c_2a_1 = 0$ et $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Comme $a_1 \neq 0$, on obtient $c_2 = c_1a_2/a_1$ et $b_2 = a_2b_1/a_1$. D'où

$$\overrightarrow{v_2} = (a_2, a_2b_1/a_1, c_1a_2/a_1) = \lambda(a_1, b_1, c_1) = \lambda\overrightarrow{v_1}$$

avec $\lambda = a_2/a_1$. Donc $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont proportionnels. □

Proposition 3.1.10. *Le vecteur $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. La norme $\|\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}\|$ est égale à l'aire d'un parallèlogramme de côtés $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.*

Démonstration. (orthogonalité) On a

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}) \cdot \overrightarrow{v_1} &= (b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1) \cdot (a_1, b_1, c_1) \\
&= (b_1c_2 - b_2c_1)a_1 + (c_1a_2 - c_2a_1)b_1 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_1 \\
&= b_1c_2a_1 - b_2c_1a_1 + c_1a_2b_1 - c_2a_1b_1 + a_1b_2c_1 - a_2b_1c_1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}$ est orthogonal à $\overrightarrow{v_1}$. De même, on montre qu'il est orthogonal à $\overrightarrow{v_2}$. □

3.2 Champ de vecteurs, champ de gradients

Considérons un domaine D du plan. Pour chaque point $M = (x, y)$ de D, supposons donné un vecteur $\overrightarrow{V}$ d'origine M par des composantes P et Q. Ces composantes dépendent de (x, y), elles sont des fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ à deux variables x et y.

Définition 3.2.1. L'application de D dans l'ensemble des vecteurs définie par

$$(x, y) = M \mapsto \overrightarrow{V}$$

s'appelle un *champ de vecteurs* défini sur D. On le note $\overrightarrow{V}(M)$ ou $\overrightarrow{V}(x, y)$.

Remarque 3.2.2. Au champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ de composantes $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ on peut associer la forme différentielle

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Considérons maintenant un cas particulier.

Définition 3.2.3. Soit $U(x,y)$ une fonction sur D admettant les dérivées partielles d'ordre 1 continues. Le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ de composantes $\frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial U}{\partial y}$ est appelé *champ de gradients* de U et on note $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U$. On dit aussi que $\overrightarrow{V}(x,y) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right)$ est le *gradient* de U au point $M = (x,y)$.

Remarque 3.2.4. La forme différentielle associée au champ de gradients $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U$ de U est la différentielle dU de U.

Théorème 3.2.5. *Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs de composantes $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sur un domaine D. Supposons que $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ admettent les dérivées partielles d'ordre 1 continues. Alors $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradients si et seulement si la forme différentielle associée*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

est exacte. En particulier, si $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradients, on a

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Démonstration. Le champ $\overrightarrow{V}$ est de gradients si et seulement s'il existe une fonction U admettant les dérivées d'ordre 1 telle que $P = U'_x$ et $Q = U'_y$. Ceci équivaut à $Pdx + Qdy = dU$ ou au fait que $Pdx + Qdy$ est une forme exacte.

Dans ce cas, on a $P'_y = U''_{xy}$ et $Q'_x = U''_{yx}$. Sous l'hypothèse que ces dérivées sont continues, on déduit du théorème 2.3.4 que $P'_y = Q'_x$. □

Corollaire 3.2.6. *Supposons que D est un domaine sans trou. Supposons aussi que $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ admettent les dérivées partielles d'ordre 1 continues. Alors $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradients si et seulement si*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Démonstration. Pour un domaine sans trou, on a vu dans le théorème 2.6.3 que l'équation précédente est équivalente au fait que $Pdx + Qdy$ est exacte. Le théorème 3.2.5 dit que ceci équivaut au fait que $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradients. □

Cas de l'espace. Les champs de vecteurs dans un domaine D de $\mathbb{R}^3$ sont définis de la même manière. Ils ont trois composantes. On peut associer à un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ de composantes $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ et $R(x,y,z)$ la forme différentielle

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

On suppose que P, Q, R admettent les dérivées partielles d'ordre 1 continues. Alors $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradients si et seulement si la forme différentielle associée est exacte. Dans le cas où D n'a pas de trou (un domaine convexe, par exemple), ceci équivaut aux conditions suivantes :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Définition 3.2.7. On appelle *rotationnel* de $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs de composantes

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

On le note $\overrightarrow{\mathrm{rot}\ \overrightarrow{V}}$.

Théorème 3.2.8. *Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs de composantes P, Q, R sur un domaine D de $\mathbb{R}^3$. Supposons que P, Q, R admettent les dérivées partielles d'ordre 1 continues. Si $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradients alors* $\overrightarrow{\mathrm{rot}\ \overrightarrow{V}}$ *est nul. La réciproque est vraie lorsque D est un domaine sans trou.*

Définition 3.2.9. On appelle *divergence* de $\overrightarrow{V}$ la fonction

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

On la note $\mathrm{div}\ \overrightarrow{V}$.

Théorème 3.2.10. *Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs de composantes P, Q, R sur un domaine D de $\mathbb{R}^3$. Supposons que P, Q, R admettent les dérivées partielles d'ordre 1 et 2, et que ces dérivées sont continues. Alors* $\mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}\ \overrightarrow{V}} = 0$.

Démonstration. On a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}\ \overrightarrow{V}} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}\ \overrightarrow{V}} &= \frac{\partial(R'_y - Q'_z)}{\partial x} + \frac{\partial(P'_z - R'_x)}{\partial y} + \frac{\partial(Q'_x - P'_y)}{\partial z} \\
&= R''_{yx} - Q''_{zx} + P''_{zy} - R''_{xy} + Q''_{xz} - P''_{yz} \\
&= 0
\end{aligned}$$

car $R''_{yx} = R''_{xy}$, $Q''_{zx} = Q''_{xz}$ et $P''_{zy} = P''_{yz}$. □

Réciproquement, on a

Théorème 3.2.11. *Soit* $\overrightarrow{W}$ *un champ de vecteurs sur un domaine sans trou* D *de* $\mathbb{R}^3$. *Supposons que les composantes de* $\overrightarrow{W}$ *admettent les dérivées partielles continues. Alors si* $\operatorname{div} \overrightarrow{W} = 0$, *il existe un champ de vecteurs* $\overrightarrow{V}$ *tel que* $\overrightarrow{\operatorname{rot} \overrightarrow{V}} = \overrightarrow{W}$.

3.3 Courbes, tangentes

Définition 3.3.1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Considérons deux fonctions continues f et g sur I. On appelle *courbe du plan* l'ensemble C des points M de coordonnées $x = f(t)$ et $y = g(t)$ où t parcourt l'intervalle I. On dit aussi que C est une *courbe paramétrée.*

Exemple 3.3.2. La courbe définie par les fonctions $f(t) = a_1 t + b_1$ et $g(t) = a_2 t + b_2$, avec $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ et $t \in \mathbb{R}$, est une droite dans le plan. Si $a_1 = 0$, c'est la droite verticale $x = b_1$, si $a_2 = 0$ on obtient la droite horizontale $y = b_2$.

Remarque 3.3.3. On peut paramétrer une même courbe C par plusieurs manières différentes. Par exemple, la droite $y = x$ peut être paramétrée par

$$x = t, \qquad y = t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

mais aussi par

$$x = 2t, \qquad y = 2t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.3.4. La courbe définie par $x = \cos t$ et $y = \sin t$ pour $0 \leq t \leq 2\pi$ est le cercle de centre 0 et de rayon 1 (cercle unité).

Dès maintenant, on suppose que les fonctions f et g sont dérivables.

Définition 3.3.5. Le point M de coordonnées $x = f(t)$ et $y = g(t)$ de la courbe C est dit *ordinaire* si $(f'(t), g'(t)) \neq (0,0)$. Il est *stationnaire* si $(f'(t), g'(t)) = (0,0)$.

Définition 3.3.6. Soit M_0 le point de coordonnées $x = f(t_0)$ et $y = g(t_0)$ de la courbe C. Supposons que M_0 est un point ordinaire. La droite paramétrée par

$$x = f'(t_0)t + f(t_0) \qquad \text{et} \qquad y = g'(t_0)t + g(t_0)$$

est appelée *(droite) tangente* de C en M_0.

Exemple 3.3.7. Considérons le cercle unité C défini par

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

et le point $M_0 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ qui correspond à $t_0 = \pi/4$. La droite tangente de C en M_0 est définie par

$$x = -\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

soit
$$x + y = \sqrt{2}.$$

Définition 3.3.8. Soit P un point quelconque de la droite tangente de C en M_0. Le vecteur $\overrightarrow{M_0P}$ d'origine M_0 et d'extrémité P est appelé *vecteur tangent* de C en M_0. En particulier, le vecteur d'origine M_0 et de composantes $(f'(t_0), g'(t_0))$ est un vecteur tangent en M_0.

Remarques 3.3.9. Une courbe paramétrée C dans $\mathbb{R}^3$ est définie par 3 équations
$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t).$$
Le point M_0 de coordonnées $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ est *ordinaire* si
$$\big(f'(t_0), g'(t_0), h'(t_0)\big) \neq (0, 0, 0)$$
et *stationnaire* sinon. La tangente en un point ordinaire M_0 est paramétrée par
$$x = f'(t_0)t + f(t_0), \qquad y = g'(t_0)t + g(t_0), \qquad z = h'(t_0)t + h(t_0).$$
Le vecteur d'origine M_0 et de composantes $\big(f'(t_0), g'(t_0), h'(t_0)\big)$ est tangent à C en M_0.

3.4 Intégrale curviligne le long d'une courbe

On considère une courbe paramétrée définie par les équations
$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad t \in [a, b].$$
Notons $A = (f(a), g(a))$, $B = (f(b), g(b))$ et $\overparen{AB}$ la courbe.

Soit $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ une 1-forme différentielle. On remplace x par $f(t)$ et y par $g(t)$. On a $dx = df(t) = f'(t)dt$, $dy = dg(t) = g'(t)dt$. Notons
$$P_1(t) = P(f(t), g(t)), \qquad Q_1(t) = Q(f(t), g(t)).$$
La forme ω devient
$$[P_1(t)f'(t) + Q_1(t)g'(t)]dt.$$

Considérons l'intégrale
$$I = \int_a^b \big[P_1(t)f'(t) + Q_1(t)g'(t)\big]dt.$$

Proposition 3.4.1. *L'intégrale I ne dépend pas du paramètre choisi mais uniquement de la courbe $\overparen{AB}$ et de la forme ω.*

Définition 3.4.2. L'intégrale I est appelée *intégrale curviligne de la forme* $\omega = Pdx + Qdy$ *le long de la courbe* $\widehat{AB}$ et nous la noterons

$$\int_{\widehat{AB}} \omega \qquad \text{ou} \qquad \int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy.$$

On a donc

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = \int_a^b \left[P\big(f(t), g(t)\big)f'(t) + Q\big(f(t), g(t)\big)g'(t)\right]dt.$$

Remarque 3.4.3. Considérons le cas d'une courbe $\widehat{AB}$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ paramétrée par

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t), \qquad t \in [a, b]$$

et une 1-forme différentielle

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz.$$

L'intégrale curviligne de ω le long de $\widehat{AB}$ est notée

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Elle est égale à

$$\int_a^b \left[P\big(f(t), g(t), h(t)\big)f'(t) + Q\big(f(t), g(t), h(t)\big)g'(t) + R\big(f(t), g(t), h(t)\big)h'(t)\right]dt.$$

Elle ne dépend pas du choix de paramètre.

3.5 Circulation d'un vecteur

Nous allons introduire quelques notations vectorielles. Supposons que la courbe $\widehat{AB}$ est paramétrée par

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad t \in [a, b].$$

Notons M ou $M(t)$ le point $(f(t), g(t))$ de la courbe et $\overrightarrow{M'}(t)$ le vecteur d'origine M et de composantes $(f'(t), g'(t))$. On a vu que $\overrightarrow{M'}(t)$ est un vecteur tangent à la courbe $\widehat{AB}$ en M.

Considérons aussi un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ de composantes $P(x, y)$ et $Q(x, y)$. On associe à $\overrightarrow{V}$ la 1-forme différentielle

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Proposition 3.5.1. *On a*

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = \int_a^b \overrightarrow{V}(f(t), g(t)) \cdot \overrightarrow{M'}(t)dt.$$

Démonstration. On a

$$\overrightarrow{V}(f(t), g(t)) \cdot \overrightarrow{M'}(t) = P(f(t), g(t))f'(t) + Q(f(t), g(t))g'(t).$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_a^b \overrightarrow{V}(f(t), g(t)) \cdot \overrightarrow{M'}(t)dt &= \int_a^b \big[P(f(t), g(t))f'(t) + Q(f(t), g(t))g'(t)\big]dt \\ &= \int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy. \end{aligned}$$

□

Définition 3.5.2. L'intégrale ci-dessus est appelée *la circulation* ou *le travail* du vecteur $\overrightarrow{V}$ le long du chemin $\widehat{AB}$.

Posons $\overrightarrow{dM}(t) := \overrightarrow{M'}(t)dt$. Alors on peut noter la circulation de $\overrightarrow{V}$

$$\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dM}.$$

Elle ne dépend pas du paramètre choisi pour $\widehat{AB}$.

Remarque 3.5.3. Si en tout point M de la courbe $\widehat{AB}$, $\overrightarrow{V}$ est orthogonal à la tangente de $\widehat{AB}$ alors

$$\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dM} = 0.$$

En effet, on a $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{M}' = 0$ en tout point M de la courbe.

3.6 Propriété de l'intégrale curviligne

L'intégrale curviligne dépend linéairement de la forme ω. Plus précisément on a les propriétés suivantes.

Proposition 3.6.1. *On a*

$$\int_{\widehat{AB}} \omega_1 + \omega_2 = \int_{\widehat{AB}} \omega_1 + \int_{\widehat{AB}} \omega_2 \qquad et \qquad \int_{\widehat{AB}} \lambda\omega = \lambda \int_{\widehat{AB}} \omega.$$

On a aussi

$$\int_{\widehat{AB}} (\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}) \cdot \overrightarrow{dM} = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{dM} + \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{V_2} \cdot \overrightarrow{dM} \quad et \quad \int_{\widehat{AB}} (\lambda\overrightarrow{V}) \cdot \overrightarrow{dM} = \lambda \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dM}.$$

Démonstration. (deuxième partie) On écrit $\omega = Pdx + Qdy$. On a $\lambda\omega = \lambda Pdx + \lambda Qdy$. D'où

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} \lambda\omega &= \int_a^b \big[\lambda P(f(t),g(t))f'(t) + \lambda Q(f(t),g(t))g'(t)\big]dt \\ &= \lambda \int_a^b \big[P(f(t),g(t))f'(t) + Q(f(t),g(t))g'(t)\big]dt \\ &= \lambda \int_{\widehat{AB}} \omega. \end{aligned}$$

□

On a aussi la proposition suivante.

Proposition 3.6.2. *Si C est un point sur la courbe $\widehat{AB}$ alors*

$$\int_{\widehat{AB}} \omega = \int_{\widehat{AC}} \omega + \int_{\widehat{CB}} \omega \qquad \textit{et} \qquad \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dM} = \int_{\widehat{AC}} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dM} + \int_{\widehat{CB}} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dM}.$$

Démonstration. En utilise le paramètre de $\widehat{AB}$ comme ci-dessus. Soit $c \in [a,b]$ tel que $(f(c),g(c)) = C$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} \omega &= \int_a^b \big[P(f(t),g(t))f'(t) + Q(f(t),g(t))g'(t)\big]dt \\ &= \int_a^c \big[P(f(t),g(t))f'(t) + Q(f(t),g(t))g'(t)\big]dt + \\ &\quad + \int_c^b \big[P(f(t),g(t))f'(t) + Q(f(t),g(t))g'(t)\big]dt \\ &= \int_{\widehat{AC}} \omega + \int_{\widehat{CB}} \omega. \end{aligned}$$

□

Attention. On a

$$\int_{\widehat{BC}} \omega = -\int_{\widehat{CB}} \omega.$$

Pour un champ de gradients, on obtient

Théorème 3.6.3. *On a*

$$\int_{\widehat{AB}} dU = U(B) - U(A) \quad \textit{et} \quad \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U \cdot \overrightarrow{dM} = U(B) - U(A).$$

En particulier, si A et B sont sur la même ligne de niveau de U alors

$$\int_{\widehat{AB}} dU = 0 \quad \textit{et} \quad \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U \cdot \overrightarrow{dM} = 0.$$

Démonstration. On a $dU = U'_x dx + U'_y dy$ et

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{AB}} dU &= \int_a^b \left[U'_x(f(t), g(t))f'(t) + U'_y(f(t), g(t))g'(t)\right] dt \\
&= \int_a^b \left[U(f(t), g(t))\right]' dt \\
&= U(f(b), g(b)) - U(f(a), g(a)) \\
&= U(B) - U(A).
\end{aligned}$$

Pour la deuxième partie, puisque la 1-forme associée à $\overrightarrow{\text{grad}}\, U$ est dU, on a

$$\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{\text{grad}}\, U \cdot \overrightarrow{dM} = \int_{\widehat{AB}} dU$$

qui est égale à $U(B) - U(A)$.

Si A et B sont sur la même ligne de niveau de U, on a $U(A) = U(B)$; et les intégrales précédentes sont égales à 0. □

Remarque 3.6.4. Si C est une courbe fermée, alors

$$\int_C dU = 0 \quad \text{et} \quad \int_C \overrightarrow{\text{grad}}\, U \cdot \overrightarrow{dM} = 0.$$

3.7 Aire d'un domaine du plan

Soit D un domaine dans le plan limité par une courbe C fermée, sans point double. On suppose que la courbe C est orientée dans le sens direct (contre les aiguilles d'une montre).

Théorème 3.7.1. *L'aire du domaine D est égale à l'intégrale curviligne*

$$S = \int_C x dy = -\int_C y dx = \frac{1}{2}\int_C (x dy - y dx).$$

Nous allons démontrer ce théorème au paragraphe 4.7.

Exemple 3.7.2. Nous recalculons l'aire de l'ellipse limitée par la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

Nous prendrons la représentation paramétrique

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi], \quad a, b > 0.$$

Alors l'aire de l'ellipse est égale à

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_C (xdy - ydx) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos t d(b\sin t) - b\sin t d(a\cos t) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\cos^2 t dt + ab\sin^2 t dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} abdt \\
&= \pi ab.
\end{aligned}$$

Exercices

Exercice 3.1. *Soient a, b, c et d quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que :*

1. $a \wedge (b \wedge c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$
   En déduire que le produit vectoriel n'est pas associatif.
2. $\det[a, b, c] = a \cdot (b \wedge c) = (a \wedge b) \cdot c$
3. $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = \begin{cases} c(a \cdot (b \wedge d)) - d(a \cdot (b \wedge c)) \\ -a(b \cdot (c \wedge d)) + b(c \cdot (d \wedge a)) \end{cases}$

Exercice 3.2. 1. *Chercher un vecteur perpendiculaire au plan qui passe par les points $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ et $R(1, -1, 1)$.*

2. *Calculer l'aire du triangle PQR.*
3. *Grâce au produit mixte, montrer que les vecteurs $\vec{a} = (1, 4, -7)$, $\vec{b} = (2, -1, 4)$ et $\vec{c} = (0, -9, 18)$ sont coplanaires (c'est-à-dire qu'ils appartiennent à un même plan).*
4. *Calculer l'aire du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{a} = (1, 0, 6)$, $\vec{b} = (2, 3, -8)$ et $\vec{c} = (8, -5, 6)$*
5. *Calculer l'aire du parallélépipède d'arrêtes adjacentes PQ, PR et PS avec : $P(1, 1, 1)$, $Q(2, 0, 3)$, $R(4, 1, 7)$ et $S(3, -1, -2)$.*

Exercice 3.3. *Représenter graphiquement les champs de vecteurs définis par :*

1. $\vec{V}(x, y, z) = (x, y, 0)$
2. $\vec{V}(x, y, z) = (-x, -y, 0)$
3. $\vec{V}(x, y, z) = (x, y, z)$
4. $\vec{V}(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\right)$
5. $\vec{V}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$
6. $\vec{V}(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

Exercice 3.4. *Calculer :*

1. *div* $\vec{r}$ *et* $\overrightarrow{rot}\ \vec{r}$
2. *div* $\vec{u}$ *et* $\overrightarrow{rot}\ \vec{u}$ *avec* $\vec{u}(x,y,z) = (xy, yz, xz)$
3. $(div\ \vec{w})\,(1,-1,1)$ *avec* $\vec{w}(x,y,z) = (x^2y, -2y^3z^2, xy^2z)$
4. $\left(\overrightarrow{grad}\ f\right)(1,-2,-1)$ *avec* $f(x,y,z) = 3x^2y - y^3z^2$

Exercice 3.5. *Un champ vectoriel est dit irrationnel si (et seulement si) son rotationnel est nul.*

1. *Montrer que le champ* $\vec{u}(x,y,z) = (ax+by+cz, dx+ey+fz, gx+hy+iz)$ *est irrationnel si et seulement si la matice* $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *est symétrique.*
2. *Montrer que* $\vec{u}$ *est alors le gradient d'un champ scalaire.*

Exercice 3.6. *Montrer que pour* f *et* g *deux champs scalaires et* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux champs vectoriels, on a les résultats suivants :*

1. $\overrightarrow{grad}(fg) = \left(\overrightarrow{grad}\ f\right) g + f\left(\overrightarrow{grad}\ g\right)$
2. $div(f\vec{u}) = \left(\overrightarrow{grad}\ f\right)\cdot\vec{u} + f(div\ \vec{u})$
3. $div(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \left(\overrightarrow{rot}\ \vec{u}\right)\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{v}\right)$
4. $\overrightarrow{rot}(f\vec{u}) = \left(\overrightarrow{grad}\ f\right)\wedge\vec{u} + f\cdot(\overrightarrow{rot}\ \vec{u})$

Exercice 3.7. *Exprimer en fonction de* $\dot{r}$ *et* $\vec{r}$ *le gradient de :*

$$r, \quad r^2, \quad \ln r, \quad \frac{1}{r}, \quad r^k \quad k\in\mathbb{R}.$$

Exercice 3.8. *Pour chacun des champs* $\vec{u}$ *ci-dessous :*

- *vérifier que le rotationnel de* $\vec{u}$ *est nul.*
- *déterminer un champ scalaire* f *admettant ce champ* $\vec{u}$ *pour gradient.*

1. $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{r^2}$
2. $\vec{u}(x,y,z) = (2xy, x^2+3y^2z^2, 2y^3z+4z^3)$
3. $\vec{u}(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{x} + y\cos(xy), \dfrac{1}{y} + x\cos(xy), \dfrac{1}{z}\right)$

Exercice 3.9. *Soit* $\vec{w}(x,y,z) = (x^a y, -axz, ayz)$.

1. *Calculer directement* $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{w})\right)$.
2. *Déterminer* k *et* $a\in\mathbb{N}$ *pour que :* $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{w})\right) = (0, 2(x^k+1), 0)$.

Exercice 3.10. *Existe-t-il une fonction vectorielle différentiable $\vec{V}$ telle que :*

(i) $\overrightarrow{rot}\ \vec{V} = \vec{r}$ *(ii)* $\overrightarrow{rot}\ \vec{V} = (2, 1, 3)$

S'il existe, trouver $\vec{V}$*.*

Exercice 3.11. *Soit* $\vec{V}(x, y, z) = (y^2 + z^2, -xy, -xz)$

1. *Déterminer une fonction* φ *telle que* $\varphi(1) = 1$ *et* $\varphi(z) \cdot \vec{V}(M)$ *soit un rotationnel.*
2. φ *étant ainsi choisie, déterminer un potentiel vecteur* $\vec{U}_0(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), 0)$ *du champ de rotationnels obtenu. En déduire la forme générale des potentiels vecteurs* $\vec{U}(M)$ *de ce champ (c'est-à-dire les vecteurs* $\vec{U}(M)$ *tels que :* $\overrightarrow{rot}\ \vec{U}(M) = \varphi(z) \cdot \vec{V}(M)$*).*

Exercice 3.12. *Soit* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction deux fois dérivable.*

1. *On considère le champ scalaire* $f = \varphi \circ r$*. Calculer son gradient et son laplacien.*
2. *On considère le champ vectoriel* $\vec{u} = (\varphi \circ r)\vec{r}$*. Calculer sa divergence et son rotationnel.*

Ces types de champs sont dits radiaux.

Exercice 3.13. *Soit* $\vec{u} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *une fonction vectorielle d'une variable réelle de classe* $\mathcal{C}^1$*. Montrer que :*

(a) $div(\vec{u} \circ r) = (\vec{u}' \circ r) \cdot \dfrac{\vec{r}}{r}$ *(b)* $\overrightarrow{rot}(\vec{u} \circ r) = (\vec{u}' \circ r) \wedge \dfrac{\vec{r}}{r}$

Exercice 3.14. *Soit* $w = (yz + x^2y^3)dx + (xz + x^3y^2)dy + \phi(x, y)dz$

1. *Déterminer* ϕ *pour que la forme* w *soit exacte sur* $\mathbb{R}$*.*
2. *Trouver alors les primitives de* w*.*

Exercice 3.15. *Soit* $\mathcal{C}$ *la courbe représentée paramétriquement par :*

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t}\cos t \\ y(t) = e^{2t}\sin t \\ z(t) = ke^{2t} \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

1. *Montrer que* $\mathcal{C}$ *est tracée sur un cône de révolution d'axe Oz.*
2. *Montrer que les tangentes à* $\mathcal{C}$ *forment toutes le même angle avec le plan Oxy.*

Exercice 3.16. *Calculer les équations des tangentes aux courbes suivantes :*

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} \\ y(t) = 2\cos 3t \\ z(t) = 2\sin 3t \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = t^2 + 1 \\ y(t) = 4t - 3 \\ z(t) = 2t^2 - 6t \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = e^{2t} \end{cases}$$

aux points respectifs : $t_0 = \pi$, $t_0 = 2$ *et* $t_0 = 0$.

Exercice 3.17. *Les coordonnées d'un point mobile* M *sont données par le système :*

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos t - 1 \\ y(t) = -2\cos t + 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

1. *Déterminer la trajectoire de M et la représenter graphiquement.*
2. *Déterminer le vecteur tangent unitaire.*

Exercice 3.18. *On considère la courbe représentée par le système paramétré :*

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

Décrire géométriquement cette courbe et calculer le vecteur tangent unitaire en précisant les points où il est défini.

Exercice 3.19. *On considère un mouvement plan d'équation vectorielle :*

$$\vec{u} = (2t + \sin 2t)\vec{i} + (1 - \cos 2t)\vec{j}.$$

Rechercher, au point correspondant à $t = \frac{\pi}{4}$ les vecteurs unitaires tangent et normal.

Exercice 3.20. *Soient les points $A(1,0)$, $B(0,1)$ et $C(1,1)$.*

1. *Calculer les trois intégrales curvilignes :*

$$I_k = \int_{\Gamma_k} \left[(y^2 - y)dx - 2(x^2 - x)dy\right]$$

   $k = 1, 2, 3$, où Γ_1 est la ligne brisée OAC, Γ_2 la ligne brisée OBC et Γ_3 le segment $[OC]$.

2. *Le résultat est-il indépendant du chemin suivi ?*

Exercice 3.21. *Soit Γ l'arc limité par les points $A(1,0,0)$ et $B(1,0,2\pi)$ de la trajectoire du mouvement dont le vecteur vitesse est $\vec{v}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.*
Calculer :

$$I = \int_{\Gamma} 4xydx + 3y^2dy + 5zdz$$

Exercice 3.22. *Soient $A(1,-1)$, $B(1,1)$, $C(-1,-1)$ et $D(-1,1)$. Calculer :*

$$I = \int_{\Gamma} \left[(x^2 + y^2)dx + 2x^2ydy\right]$$

si Γ est la courbe fermée $ABCDA$ constituée :
(a) de l'arc AB du cercle $(x-1)^2 + y^2 = 1$ $\quad x \geq 1$ (b) du segment $[BC]$
(c) de l'arc CD du cercle $(x+1)^2 + y^2 = 1$ $\quad x \leq -1$ (d) du segment $[DA]$

Exercice 3.23. *Soit :*

$$I = \int_{\Gamma} \left[(x^2 + y^2)dx + (x^2 + y^2)dy\right]$$

où Γ est la frontière, parcourue dans le sens trigonométrique, de la plus petite des deux portions délimitées par le cercle de rayon 2 centré à l'origine et par la parabole d'équation $y^2 = 3x$.

1. *Calculer I.*
2. *Calculer l'aire intérieure à Γ.*

Exercice 3.24. *On considère la forme différentielle* $\phi(x,y) = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$.

1. *Montrer que* ϕ *est une forme différentielle fermée.*
2. *Calculer* $I = \int_{\mathcal{C}} \phi(x,y)$ *si* $\mathcal{C}$ *est :*
   – *le cercle de rayon* $R > 0$, *centré à l'origine, parcouru dans le sens direct,*
   – *la courbe représentée par* $\begin{cases} x(t) = (2+\cos\frac{t}{2})\cos t \\ y(t) = (2+\cos\frac{3t}{2})\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 4\pi.$
3. *Calculer les aires intérieures à ces deux courbes.*

Exercice 3.25. *Un point matériel est soumis au champ de forces :* $\vec{F}(x,y,z) = (2x - y + 3z, z + 4y, 2xz + y + x^2)$ *le long de l'ellipse* $\mathcal{E}$ *d'équation paramétrique :*

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \quad\quad 0 \le t \le 2\pi \\ z = 0 \end{cases}$$

parcourue dans le sens trigonométrique. Déterminer les coefficients a *et* $b \in \mathbb{N}$ *avec* $3 < a < b$, *sachant que le travail de* $\vec{F}$, $W = \int_{\mathcal{E}} \vec{F}\cdot d\vec{M}$, *le long de l'ellipse vaut* 32π.

Exercice 3.26. *Calculer l'intégrale curviligne* $\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{M}$, *si* $\mathcal{C}$ *est la courbe décrite par la fonction vectorielle* $\overrightarrow{OM}(t)$ *:*

1. $\vec{F}(x,y,z) = (\sin x, \cos y, xz) \quad \overrightarrow{OM}(t) = (t^3, -t^2, t) \quad 0 \le t \le 1$
2. $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, xy, z^2) \quad \overrightarrow{OM}(t) = (\sin t, \cos t, t^2) \quad 0 \le t \le \pi/2$

Exercice 3.27.
1. *Calculer à l'aide d'une intégrale curviligne l'aire intérieure à l'astroïde représentée par :*
   $\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^3 t \end{cases} \quad\quad 0 \le t \le 2\pi$
2. *Même question pour la cardioïde définie par l'équation polaire :* $r = a(1+\cos\theta)$.

Exercice 3.28. *Soit l'intégrale curviligne*

$$I = \int_\Gamma \frac{(1+y)dx + xdy}{x^2y^2 + 2x^2y + x^2 + 1}$$

1. *Montrer que* I *ne dépend pas du chemin* Γ *suivi entre deux points fixes.*
2. *Calculer* I *si l'arc* Γ *est limité par les points* $A(0,1)$ *et* $B(1/2,1)$, *sans faire le choix d'un chemin particulier.*

Exercice 3.29. *Soit* OP *l'arc de la courbe* $x^4 - 6xy^3 = 4y^2$ *limité par l'origine et par le point* P, *situé dans le premier cadrant, dont les coordonnées sont de la forme* $(2t, t)$. *Calculer :*

$$\int_{OP} \big((10x^4 - 2xy^3)dx - 3x^2y^2dy\big)$$

Exercice 3.30. *Montrer que l'expression* $w = \dfrac{x}{x^2+y^2}dx + y\dfrac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}dy$ *est la différentielle totale d'une fonction* f *que l'on déterminera.*

Exercice 3.31. *Calculer l'intégrale curviligne :*

$$I = \int_{AB} \sqrt{x}dy - [\sqrt{x}\ln(x+1)]dx$$

A et B étant les points d'abscisses 0 *et* 1 *sur la courbe d'équation* $y = (x-1)\ln(x+1)$.

Exercice 3.32. *Calculer l'intégrale curviligne* I *le long de la boucle fermée* $\mathcal{C}$ *constituée par les deux arcs de paraboles* $y = x^2$ *et* $x = y^2$*, décrite dans le sens direct, avec :*

$$I = \int_{\mathcal{C}} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$$

Chapitre 4

Intégrales multiples

4.1 Intégrale double

Soit $z = f(x, y)$ une fonction à deux variables sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$ limité par une courbe C. Supposons que f est continue sur D (avec son bord C). On divise le plan $\mathbb{R}^2$ en petits rectangles de taille $\Delta x \times \Delta y$ parallèles aux axes Ox, Oy de la manière suivante. On coupe d'abord $\mathbb{R}^2$ en plusieurs tranches T_i de hauteur Δy en moyenne des droites parallèles à l'axe Ox. Ensuite, on coupe chaque tranche en moyenne des droites parallèles à l'axe Oy et nous gardons les rectangles $R_{i,j}$ contenus dans D. Notons $M_{i,j}$ le centre de $R_{i,j}$. Considérons la somme double

$$\sum \sum f(M_{i,j})\Delta x \Delta y.$$

Notons que $\Delta x \Delta y$ est l'aire du rectangle $R_{i,j}$. Nous admettons la propriété suivante
lorsque Δx et Δy tendent vers 0, la somme ci-dessus converge vers une quantité que nous noterons

$$I = \iint_D f(x, y)dxdy.$$

Définition 4.1.1. On appelle I *l'intégrale double* de la fonction $f(x, y)$ sur le domaine D.

Donnons une interprétation géométrique. Supposons que la fonction f est positive. Notons S le graphe de f au-dessus de D. Cette surface et les parallèles à Oz menées par les points de C limitent un domaine V dans $\mathbb{R}^3$. L'intégrale I est le volume de ce domaine. En effet, le volume limité dans V par le rectangle $R_{i,j}$ et les plans parallèles à Oz qui s'appuient sur son périmètre a pour valeur approchée

$$f(M_{i,j})\Delta x \Delta y.$$

La somme

$$\sum\sum f(M_{i,j})\Delta x\Delta y$$

représente une valeur approchée du volume de V. La limite I est donc le volume exacte de V.

Proposition 4.1.2. *Lorsque le domaine D est fixé, on a*

$$\iint_D f_1(x,y)dxdy + \iint_D f_2(x,y)dxdy = \iint_D \big(f_1(x,y) + f_2(x,y)\big)dxdy$$

$$\iint_D \lambda f(x,y)dxdy = \lambda \iint_D f(x,y)dxdy, \qquad \textit{pour } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si l'on divise D en deux domaines D_1 et D_2 alors

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Démonstration. (deuxième partie) L'intégrale $\iint_D \lambda f(x,y)dxdy$ est par définition la limite de la somme

$$\sum\sum \lambda f(M_{i,j})\Delta x\Delta y$$

quand Δx et Δy tendent vers 0. Cette somme est égale à

$$\lambda\sum\sum f(M_{i,j})\Delta x\Delta y$$

qui tend vers $\lambda\iint_D f(x,y)dxdy$. D'où

$$\iint_D \lambda f(x,y)dxdy = \lambda \iint_D f(x,y)dxdy.$$

□

4.2 Théorème de Fubini

Sur le domaine D, lorsque y est fixé, x varie dans une partie de $\mathbb{R}$. On suppose que x varie sur un intervalle $[\psi_0(y), \psi_1(y)]$ où ψ_0 et ψ_1 sont des fonctions en y.

Fixons une tranche T_i de D et une valeur y_i telle que les points d'ordonnée y_i soient dans cette tranche. Alors x varie dans l'intervalle $[\psi_0(y_i), \psi_1(y_i)]$. Considérons les rectangles $R_{i,j}$ de cette tranche et la somme

$$\sum_j f(M_{i,j})\Delta x.$$

Cette somme représente la valeur approchée de l'intégral simple

$$\int_{\psi_0(y_i)}^{\psi_1(y_i)} f(x,y_i)dx.$$

Cette intégrale dépend de y_i. Posons

$$F(y) = \int_{\psi_0(y)}^{\psi_1(y)} f(x,y)dx.$$

On a

$$\sum_j f(M_{i,j})\Delta x \simeq F(y_i).$$

Pour la somme double que nous considérons, on a

$$\sum\sum f(M_{i,j})\Delta x\Delta y \simeq \sum F(y_i)\Delta y.$$

Sur le domaine D, y varie sur un certain intervalle $[c,d]$. On a

$$\sum\sum f(M_{i,j})\Delta x\Delta y \simeq \sum F(y_i)\Delta y \simeq \int_c^d F(y)dy.$$

Quand Δx et Δy tendent vers 0, on obtient

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d F(y)dy.$$

Ceci entraîne le théorème de Fubini :

Théorème 4.2.1. *On peut calculer l'intégrale double en moyenne de deux intégrales simples :*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_0(y)}^{\psi_1(y)} f(x,y)dx\right) dy.$$

Remarque 4.2.2. Supposons que sur le domaine D, la variable x varie sur un intervalle $[a,b]$ et lorsque x est fixé, y varie sur un intervalle $[\varphi_0(x), \varphi_0(x)]$ où φ_0 et φ_1 sont des fonctions en x. Alors on a aussi

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)dy\right) dx.$$

4.3 Changement de variables

Nous donnons ici la règle générale pour le changement de variables. Supposons qu'on effectue le changement de variables

$$x = x(u,v) \qquad \text{et} \qquad y = y(u,v).$$

Lorsque (x,y) varie dans le domaine D, (u,v) varie dans un domaine R. On considère le déterminant de la matrice

$$\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

On l'appelle *le Jacobien* des fonctions $x(u, v)$ et $y(u, v)$ par rapport aux variables u et v et on le note

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

Théorème 4.3.1. *On a*

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_R f\big(x(u, v), y(u, v)\big) \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| dudv.$$

Attention. Dans la formule précédente, on prend **la valeur absolue** du Jacobien.

Coordonnées polaires. Soit D le disque de centre 0 et de rayon a. On considère les coordonnées polaires (r, θ) et on effectue le changement de variables

$$x = r\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = y\sin\theta.$$

Le Jacobien de (x, y) par rapport à (r, θ) est

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Lorsque (x, y) varie dans D, r varie dans $[0, a[$ et θ varie dans $[0, 2\pi[$. Donc (r, θ) varie dans le rectangle $R = [0, a[\times[0, 2\pi[$. On obtient

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

Ici on a pour la valeur absolue du Jacobien $|r| = r$ car $r \geq 0$.

4.4 2-formes différentielles sur $\mathbb{R}^2$

Les formes différentielles que nous considérons jusqu'à présent sont les formes différentielles de degré 1 ou les 1-formes différentielles. Nous allons définir les 2-formes différentielles. Introduisons d'abord le produit extérieur des 1-formes, noté par $\wedge$. Soient ω_1, ω_2, ω_3 des 1-formes sur $\mathbb{R}^2$ ou sur un domaine de $\mathbb{R}^2$. Le produit extérieur des 1-formes vérifie les propriétés suivantes :

1. $\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1$.
2. $(\omega_1 \pm \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_3 \pm \omega_2 \wedge \omega_3$.
3. $\omega_1 \wedge (\omega_2 \pm \omega_3) = \omega_1 \wedge \omega_2 \pm \omega_1 \wedge \omega_3$.
4. $(f \cdot \omega_1) \wedge \omega_2 = f \cdot (\omega_1 \wedge \omega_2)$ où $f(x, y)$ est une fonction.

En particulier, on a d'après la propriété 1

$$dx \wedge dx = -dx \wedge dx$$

donc $dx \wedge dx = 0$. De la même manière, on obtient $dy \wedge dy = 0$ et $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$.

Si $\omega_1 = A_1 dx + B_1 dy$ et $\omega_2 = A_2 dx + B_2 dy$ où A_i, B_i sont des fonctions, on a

$$\begin{aligned}\omega_1 \wedge \omega_2 &= (A_1 dx + B_1 dy) \wedge (A_2 dx + B_2 dy)\\ &= A_1 A_2 dx \wedge dx + B_1 A_2 dy \wedge dx + A_1 B_2 dx \wedge dy + B_1 \wedge B_2 dy \wedge dy\\ &= (-B_1 A_2 + A_1 B_2) dx \wedge dy.\end{aligned}$$

Définition 4.4.1. On appelle *2-forme différentielle* sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$ toute expression

$$f(x,y) dx \wedge dy$$

où $f(x,y)$ est une fonction sur D.

Définition 4.4.2. Soit $\Omega = f(x,y) dx \wedge dy$ une 2-forme différentielle sur un domaine D. On définit *l'intégrale* de Ω sur D par

$$\iint_D \Omega = \iint_D f(x,y) dx dy.$$

Attention. On a $f(x,y) dy \wedge dx = -\Omega \neq \Omega$ et donc

$$\iint_D f(x,y) dx \wedge dy = -\iint_D f(x,y) dy \wedge dx \neq \iint_D f(x,y) dy \wedge dx.$$

Lorsqu'on effectue le changement de variables

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v), \qquad (u,v) \in R$$

la 2-forme différentielle $\Omega = f(x,y) dx \wedge dy$ devient

$$\Omega_1 = f\big(x(u,v), y(u,v)\big) dx(u,v) \wedge dy(u,v).$$

Comme $dx = x'_u du + x'_v dv$ et $dy = y'_u du + y'_v dv$, on a

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= (x'_u du + x'_v dv) \wedge (y'_u du + y'_v dv)\\ &= x'_v y'_u dv \wedge du + x'_u y'_v du \wedge dv\\ &= (-x'_v y'_u + x'_u y'_v) du \wedge dv\\ &= \frac{D(x,y)}{D(u,v)} du \wedge dv.\end{aligned}$$

Attention. Il **n'y a pas de valeur absolue** pour le Jacobien dans la ligne précédente.

Théorème 4.4.3. *Supposons que lorsque (u,v) parcourt le bord de R dans le sens direct alors (x,y) parcourt le bord de D également dans le sens direct (ou le jacobien est positif en tout point). Alors*

$$\iint_D \Omega = \iint_R \Omega_1.$$

Démonstration. (deuxième cas) Si le Jacobien est positif en tout point on déduit des calculs précédents que

$$\begin{aligned}
\iint_D \Omega &= \iint_D f(x,y)dxdy \\
&= \iint_R f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv \\
&= \iint_R f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\frac{D(x,y)}{D(u,v)}dudv \\
&= \iint_R f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\frac{D(x,y)}{D(u,v)}du\wedge dv \\
&= \iint_R \Omega_1.
\end{aligned}$$

□

4.5 Formule de Green-Riemann

On note toujours D un domaine dans $\mathbb{R}^2$ limité par une courbe C. La courbe C est orientée dans le sens des aiguilles d'une montre. Soient $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ deux fonctions sur D ayant les dérivées partielles d'ordre 1 continues.

Théorème 4.5.1. *On a*

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

La formule ci-dessus s'appelle *formule de Green-Riemann.*

Définition 4.5.2. Soit $\omega = Pdx + Qdy$ une 1-forme différentielle. On appelle *dérivée extérieure* de ω la 2-forme différentielle

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy.$$

On dit que ω est *fermée* si $d\omega = 0$.

Proposition 4.5.3. *On a*

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

et ω est fermée si et seulement si

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

La formule de Green-Riemann peut donc s'écrire de la manière suivante.

Corollaire 4.5.4. *On a*

$$\int_C \omega = \iint_D d\omega.$$

En particulier, si ω est fermée, on a

$$\int_C \omega = 0.$$

Démonstration. On a d'après le théorème 4.5.1 que

$$\begin{aligned}\int_C \omega &= \int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \iint_D d\omega.\end{aligned}$$

Si ω est fermée, on a $d\omega = 0$ et donc

$$\int_C \omega = \iint_D d\omega = 0.$$

□

Proposition 4.5.5. *Soit ω une 1-forme dont les coefficients admettent les dérivées partielles d'ordre 1 continues. Si ω est exacte, alors elle est fermée. Sur un domaine* **sans trou**, *ω est exacte si et seulement si elle est fermée.*

Démonstration. (première partie) Si $\omega = Pdx + Qdy$ est exacte, il existe une fonction f telle que $\omega = df$. Donc $P = f'_x$ et $Q = f'_y$. D'après la proposition 4.5.3, on a

$$d\omega = (Q'_x - P'_y) dx \wedge dy = (f''_{yx} - f''_{xy}) dx \wedge dy = 0.$$

Donc ω est fermée. □

4.6 Volume d'un domaine dans $\mathbb{R}^3$

Soit $f(x, y)$ une fonction à deux variables définie sur un domaine D limitée par une courbe C. Soit S la surface représentative (le graphe) de f. On a vu que si f est positive, l'intégrale de f sur D est le volume du domaine V de $\mathbb{R}^3$ limitée par S et les parallèles à Oz menées par les points de C. Ceci permet de calculer les volumes dans $\mathbb{R}^3$. Donnons un exemple.

Soit B la boule de centre 0 et de rayon R. La demi-boule supérieure est limitée par le graphe de la fonction

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

au-dessus du disque Δ de centre 0 et de rayon R. Donc le volume de B est égal à

$$\mathrm{vol}(B) = 2\iint_\Delta \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy.$$

Si on effectue le changement de variables

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

alors (r, θ) varie dans le rectangle $\mathscr{R} = [0, R] \times [0, 2\pi[$ et

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = r.$$

On obtient

$$\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{R^2 - r^2}$$

et

$$\mathrm{vol}(B) = 2\iint_{\mathscr{R}} \sqrt{R^2 - r^2}\ rdrd\theta.$$

En appliquant le théorème de Fubini on a

$$\mathrm{vol}(B) = 2\int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - r^2}\ rd\theta\right) dr.$$

On intègre d'abord par rapport à θ. Comme $\sqrt{R^2 - r^2}\ r$ ne dépend pas de θ, on obtient

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - r^2}\ rd\theta = \sqrt{R^2 - r^2}\ r\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\sqrt{R^2 - r^2}\ r.$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(B) &= 2\int_0^R \left(\sqrt{R^2 - r^2}\ r2\pi\right) dr \\ &= 4\pi\int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\ rdr \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable $t = R^2 - r^2$. On a $dt = -2rdr$, $rdr = -\frac{1}{2}dt$ et t varie de R^2 à 0. On obtient

$$\mathrm{vol}(B) = 4\pi\int_{R^2}^0 t^{1/2}(-\frac{1}{2})dt = 2\pi\int_0^{R^2} t^{1/2}dt = 2\pi\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^{R^2} = \frac{4}{3}R^3.$$

4.7 Aire d'un domaine dans $\mathbb{R}^2$

Si la fonction $f(x, y)$ considérée dans le paragraphe précédent est identiquement égale à 1, le volume qu'on a calculé est égal à l'aire du domaine D. On a donc

$$\text{aire}(D) = \iint_D dxdy = \iint_D dx \wedge dy.$$

Comme $d(xdy) = dx \wedge dy$, la formule de Green-Riemann donne

$$\text{aire}(D) = \iint_D d(xdy) = \int_C xdy.$$

On a aussi $dx \wedge dy = -d(ydx)$ et donc

$$\text{aire}(D) = \iint_D -d(ydx) = -\int_C ydx.$$

En considérant la somme des égalités ci-dessus, on obtient

$$\text{aire}(D) = \frac{1}{2} \int_C xdy - ydx.$$

Nous avons donc démontré le théorème 3.7.1.

4.8 Intégrale triple

Les intégrales de fonctions à trois variables sont définies de la même manière que dans le cas de deux variables. Soit D un domaine dans $\mathbb{R}^3$ limité par une surface S. Soit $f(x, y, z)$ une fonction continue sur le domaine D avec son bord S.

On divise l'espace $\mathbb{R}^3$ en petits parallélépipèdes rectangles de taille $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ parallèles aux axes Ox, Oy, Oz. On considère les parallélépipèdes $R_{i,j,k}$ contenu dans V. Notons $M_{i,j,k}$ le centre de $R_{i,j,k}$. Considérons la somme triple

$$\sum\sum\sum f(M_{i,j,k})\Delta x \Delta y \Delta z.$$

Notons que $\Delta x \Delta y \Delta z$ est le volume de $R_{i,j,k}$. Nous admettons la propriété suivante :
lorsque Δx, Δy, Δz tendent vers 0, la somme ci-dessus converge vers une quantité que nous noterons

$$I = \iiint_D f(x, y, z)dxdydz.$$

Définition 4.8.1. On appelle I *l'intégrale triple* de la fonction $f(x, y, z)$ sur le domaine D.

Proposition 4.8.2. *Lorsque le domaine D est fixé, on a*

$$\iiint_D f_1 dxdydz + \iiint_D f_2 dxdydz = \iiint_D \big(f_1 + f_2\big) dxdydz$$

$$\iiint_D (\lambda f) dxdydz = \lambda \iiint_D f dxdydz, \qquad \textit{pour } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si l'on divise D en deux domaines D_1 et D_2 alors

$$\iiint_D f dxdydz = \iiint_{D_1} f dxdydz + \iiint_{D_2} f dxdydz.$$

Démonstration. (deuxième partie) voir Proposition 4.1.2. □

4.9 Théorème de Fubini

Considérons un point (x, y, z) dans D. Supposons que z varie sur un certain intervalle $[z_0, z_1]$ et pour chaque z fixé, (x, y) varie dans un certain domaine $D(z)$ qui dépend de z. En raisonnant comme dans le cas de deux variables, on obtient la version suivante du théorème de Fubini.

Théorème 4.9.1. *On a*

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz = \int_{z_0}^{z_1} \left(\iint_{D(z)} f(x, y, z) dxdy \right) dz.$$

Remarque 4.9.2. Pour calculer l'intégrale double

$$\iint_{D(z)} f(x, y, z) dxdy$$

on peut appliquer le théorème de Fubini pour le cas de deux variables.

Donnons une autre version du théorème de Fubini. Supposons que (x, y) varie dans un certain domaine Δ de $\mathbb{R}^2$ et pour chaque (x, y) fixé dans Δ, z varie dans un intervalle $[z_0(x, y), z_1(x, y)]$.

Théorème 4.9.3. *On a*

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz = \iint_\Delta \left(\int_{z_0(x,y)}^{z_1(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dxdy.$$

4.10 Changement de variables

La règle générale pour le changement de variables est ici analogue au cas de deux variables. Supposons qu'on effectue le changement

$$x = x(u, v, t), \qquad y = y(u, v, t), \qquad z(u, v, t).$$

Lorsque (x, y, z) varie dans le domaine D de $\mathbb{R}^3$, (u, v, t) varie dans un domaine D' de $\mathbb{R}^3$. On suppose que la correspondance $(u, v, t) \mapsto (x, y, z)$ est bijective. On considère le déterminant de la matrice

$$\begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_t \\ y'_u & y'_v & y'_t \\ z'_u & z'_v & z'_t \end{vmatrix}$$

C'est *le Jacobien* des fonctions $x(u, v, t)$, $y(u, v, t)$, $z(u, v, t)$ par rapport aux variables u, v, t et nous le noterons

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, t)}.$$

Théorème 4.10.1. *On a*

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{D'} f\big(x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t)\big) \left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, t)}\right| dudvdt.$$

Attention. Dans la formule précédente, on prend **la valeur absolue** du Jacobien.

Coordonnées cylindriques. Soit D le cylindre défini par

$$x^2 + y^2 \leq R^2, \qquad z \in [z_0, z_1].$$

On effectue le changement de coordonnées

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z.$$

Les nouvelles variables sont (r, θ, z). Le point (r, θ, z) varie dans le domaine D' défini par

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, z_0 \leq z \leq z_1.$$

Donc D' est le parallélépipède $[0, R] \times [0, 2\pi[\times [z_0, z_1]$. On a

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \cdot 1 = r$$

et
$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta dz.$$

Coordonnées sphériques. Soit D la boule de centre 0 et de rayon R. Elle est définie par
$$x^2+y^2+z^2 \le R^2.$$

On effectue le changement de coordonnées
$$x = r\sin\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\varphi.$$

Les nouvelles variables sont (r,θ,φ). Le point (r,θ,φ) varie dans le domaine D' défini par
$$0 \le r \le R, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le \pi.$$

Donc D' est le parallélépipède $[0,R]\times[0,2\pi[\times[0,\pi]$. On a
$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{vmatrix} = -r^2\sin\varphi$$

et
$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{D'} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi.$$

Ici la valeur absolue du Jacobien est égale à $r\sin\varphi$ car $\sin\varphi \ge 0$ (puisque $0 \le \varphi \le \pi$).

4.11 2-formes et 3-formes différentielles dans $\mathbb{R}^3$

Les 2-formes et 3-formes différentielles à trois variables sont définies de la même manière que dans le cas de deux variables.

Définition 4.11.1. On appelle *2-forme différentielle* sur un domaine D de $\mathbb{R}^3$ toute combinaison
$$P(x,y,z)dy\wedge dz + Q(x,y,z)dz\wedge dx + R(x,y,z)dx\wedge dy$$

où P, Q, R sont des fonctions à trois variables sur D. On appelle *3-forme différentielle* sur D tout produit
$$f(x,y,z)dx\wedge dy\wedge dz$$

où f est une fonction à trois variables sur D.

Comme dans le cas de deux variables, le produit extérieur des formes différentielles vérifie les propriétés analogues. En particulier, on a $dx \wedge dx = 0$, $dy \wedge dy = 0$, $dz \wedge dz = 0$, $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$, ...

Définition 4.11.2. Soit $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ une 1-forme différentielle sur D. On définit *la dérivée extérieure* de ω par

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz.$$

C'est une 2-forme différentielle sur V. On dit que ω est *fermée* si $d\omega = 0$. Les 2-formes qui s'écrivent $d\omega$ avec ω une 1-forme sont appelées *exactes.*

Définition 4.11.3. Soit $\Omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ une 2-forme différentielle sur D. On définit *la dérivée extérieure* de Ω par

$$d\Omega = dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy.$$

C'est une 3-forme différentielle sur D. On dira que Ω est *fermée* si $d\Omega = 0$.

Proposition 4.11.4. *On a $d(df) = 0$ pour toute fonction f admettant les dérivées partielles d'ordre 1, 2 continues. En particulier, les 1-formes exactes sont fermées. Sur les domaines sans trou, les 1-formes fermées sont exactes.*

Démonstration. (première partie) On a $df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$ et

$$\begin{aligned} d(df) &= df'_x \wedge dx + df'_y \wedge dy + df'_z \wedge dz \\ &= (f''_{xx}dx + f''_{xy}dy + f''_{xz}dz) \wedge dx + (f''_{yx}dx + f''_{yy}dy + f''_{yz}dz) \wedge dy + \\ &\quad +(f''_{zx}dx + f''_{zy}dy + f''_{zz}dz) \wedge dz. \end{aligned}$$

En développant cette somme et en utilisant les égalités $dx \wedge dx = 0$, $dy \wedge dy = 0$, $dz \wedge dz = 0$, $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$, $f''_{xy} = f''_{yx}$ ..., on obtient que cette somme est égale à 0. □

Proposition 4.11.5. *On a $d(d\omega) = 0$ pour toute 1-forme ω dont les coefficients admettent les dérivées partielles d'ordre 1, 2 continues. En particulier, les 2-formes exactes sont fermées. Sur les domaines sans trou, les 2-formes fermées sont exactes.*

Remarques 4.11.6. Si $\overrightarrow{V}$ est un champ de vecteurs de composantes P, Q, R, on peut associer à $\overrightarrow{V}$ une 1-forme

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$$

et une 2-forme

$$\Omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy.$$

On a

$$d\omega = (R'_y - Q'_z)dy \wedge dz + (P'_z - R'_x)dz \wedge dx + (Q'_x - P'_y)dx \wedge dy.$$

Observons que

$$R'_y - Q'_z, \quad P'_z - R'_x, \quad Q'_x - P'_y$$

sont composantes de $\overrightarrow{\text{rot } \overrightarrow{V}}$. C'est-à-dire que $d\omega$ est la 2-forme associée à $\overrightarrow{\text{rot } \overrightarrow{V}}$. On a aussi

$$d\Omega = (P'_x + Q'_y + R'_z)dx \wedge dy \wedge dz = \text{div } \overrightarrow{V} \; dx \wedge dy \wedge dz.$$

Définition 4.11.7. Soit $\Theta = f(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz$ une 3-forme différentielle sur un domaine D de $\mathbb{R}^3$. On définit *son intégrale* sur D par

$$\iiint_D f(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz = \iiint_D f(x, y, z)dxdydz.$$

Attention. On a

$$\iiint_D f(x, y, z)dy\wedge dx\wedge dz = -\iiint_D f(x, y, z)dx\wedge dy\wedge dz = -\iiint_D f(x, y, z)dxdydz$$

car $dy \wedge dx \wedge dz = -dx \wedge dy \wedge dz$.

Exercices

Exercice 4.1. *Calculer*

$$\int_0^1 dy \int_0^y x^2 dx, \quad \int_0^1 dy \int_0^y y^2 dx$$

$$\int_0^1 dx \int_0^x -\sin(x^2)dy, \quad \int_0^1 dx \int_{1-x}^{1+x} (2x + 3y^2)dy$$

$$\int_0^1 dz \int_0^z dy \int_0^y 2xyzdx, \quad \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_0^{x+y} 3xydz$$

$$\int_0^\pi dy \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} 2z \sin y dx, \quad \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_0^x -yzdz.$$

Exercice 4.2. *Calculer les intégrales suivantes en utilisant le théorème de Fubini*

$$\iint_D 2xydxdy, \quad D = \{(x, y),\ 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}.$$

$$\iint_D (x + 2y)dxdy, \quad D = \{(x, y),\ 1 \le x \le 3, 1 + x \le y \le 2x\}.$$

$$\iint_D e^{x/y} dxdy, \quad D = \{(x, y),\ 1 \le y \le 2, y \le x \le 2y^3\}$$

$$\iint_D \frac{2}{x} dxdy, \quad D = \{(x, y),\ 1 \le y \le e, y^2 \le x \le y^4\}.$$

$$\iint_D x\cos y dxdy, \quad D \text{ borné par } y=0, y=x^2, x=2.$$

$$\iint_D 2xydxdy, \quad D \text{ le premier quadrant du disque unité}$$

$$\iint_D ye^{2x}dxdy, \quad D \text{ le triangle de sommets } (0,0),(2,4),(6,0).$$

$$\iint_D xydxdy, \quad D=\{(x,y),\ x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 2\}.$$

$$\iint_D (x+2y)dxdy, \quad \text{où } D \text{ est le triangle de sommets } (0,0),(2,2),(4,0).$$

$$\iint_D xydxdy, \quad D=\{(x,y),\ x\geq 0, y\geq 0, \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1\}$$

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}, \quad D=\{(x,y),\ x\geq 1, y\geq 1, x+y\leq 4\}.$$

$$\iint_D e^{2x+2y}dxdy, \quad \text{où } D \text{ est le triangle de sommets } (0,0),(1,1),(1,-1).$$

Exercice 4.3. *Caculer le volume compris entre*

a) la surface d'équation $z=x^2+y^2$ *et le plan* $z=4$.

b) les surfaces d'équation $z=x^2+y^2-1$ *et* $z=1-x^2-y^2$.

c) la surface d'équation $z=x^2+4y^2$ *et le plan* $z=4$.

Exercice 4.4. *Calculer le volume*

a) Sous le paraboloide $z=x^2+y^2$ *et sur le domaine délimité par* $y=x^2$ *et* $x=y^2$.

b) Sous la paraboloide $z=3x^2+y^2$ *et sur le domaine borné par* $y=x$ *et* $x=y^2-y$.

c) Sous la surface $z=2xy$ *et sur le triangle de sommets* $(1,1)$, $(4,1)$, $(1,2)$.

d) Compris entre le paraboloide $z=x^2+y^2+4$ *et les plans* $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

e) Borné par le cylindre $y^2+z^2=9$ *et les plans* $x=2y$, $x=0$, $z=0$ *dans le premier octant.*

f) Borné par les cylindres $x^2+y^2=4$ *et* $y^2+z^2=4$.

Exercice 4.5. *Trouver le centre de gravité de la plaque homogène limitée par la parabole* $y=2x^2$ *et la droite* $y=2$.

Exercice 4.6. *Calculer le jacobien de la transformation donnée et calculer l'intégrale donnée en utilisant cette transformation.*

a) $x=\frac{1}{3}(u+v)$, $y=\frac{1}{3}(v-2u)$, $\iint_D(3x+y)dxdy$ *où* D *est le domaine borné par les droites* $y=x-2$, $y=x$, $y=-2x$ *et* $y=3-2x$.

b) $x=2u+3v$, $y=3u-2v$, $\iint_D(2x+y)dxdy$ *où* D *est le carré de sommets* $(0,0)$, $(2,3)$, $(5,1)$, $(3,-2)$.

c) $x=u/v$, $y=v$, $\iint_D -xydxdy$ *où* D *est dans le premier quadrant et borné par les droites* $y=x$, $y=3x$ *et les hyperboles* $xy=1$, $xy=3$.

Exercice 4.7. *En utilisant un changement de variables, calculer*

$$\iint_D x dx dy, \quad \text{où } D \text{ est le disque de centre 0 et de rayon 5.}$$

$$\iint_D y dx dy, \quad \text{où } D \text{ est le domaine dans le premier quadrant borné par le cercle}$$

$$x^2 + y^2 = 9 \text{ et les droites } y = x, y = 0.$$

$$\iint_D xy dx dy, \quad \text{où } D \text{ est le domaine dans le premier quadrant et compris}$$

$$\text{entre les cercles } x^2 + y^2 = 4 \text{ et } x^2 + y^2 = 25.$$

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy, \quad \text{où } D \text{ est l'anneau } 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16.$$

$$\iint_D \frac{dx dy}{1 + x^2 + y^2}, \quad \text{où } D \text{ est le disque unité.}$$

$$\iint_D \frac{xy dx dy}{x^2 + y^2}, \quad \text{où } D \text{ est le triangle de sommets } (0, 0, (2, 2), (2, 0).$$

$$\iint \frac{dx dy}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}}, \quad D \text{ étant la partie du plan comprise}$$

$$\text{entre les ellipses d'équations} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4.$$

$$\iint_D (x + y) dx dy, \quad D \text{ étant le triangle limité par les axes et la droite } x + y = 3.$$

Exercice 4.8. *En utilisant les coordonnées polaires, calculer le volume*
a) borné par le paraboloide $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ *et le plan* $z = 4$.
b) borné par les paraboloides $z = 3x^2 + 3y^2$ *et* $z = 4 - x^2 - y^2$.
c) à l'intérieure du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ *et l'ellipsoide* $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$.

Exercice 4.9. *Calculer avec deux méthodes différentes l'intégrale suivante*

$$\iint_D (y^2 - x^2) dx dy, \quad \text{où } D \text{ est défini par } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Exercice 4.10. *Soit* $f(x, y)$ *une fonction de classe* C^1. *Montrer que* $df \wedge df = 0$. *Calculer*

$$(x^2 dx - y^2 dy) \wedge ((2x - 1)dx + dy)$$

$$(dx + e^x dy) \wedge (dy - e^y dx)$$

$$d(x^2 + 6xy + y^2) \wedge d(x^3 + y^3).$$

Exercice 4.11. *Utilisant la formule de Green-Riemann, calculer*

$$\int_{bD} x^2ydx + xy^3dy, \quad D \text{ étant le carrée de sommets } (0,0),(2,0),(2,2),(0,2)$$

$$\int_C (x^2+y^2)dx + 2xydy, \quad C \text{ se compose de l'arc de parabole } y = x^2 \text{ compris entre}$$

$$(0,0) \text{ et } (2,4) \text{ et des segments qui vont de } (2,4) \text{ à } (0,4), \text{ et de } (0,4) \text{ à } (0,0)$$

$$\int_{bD} 2xydx + y^5dy, \quad D \text{ étant le triangle de sommets } (0,0),(2,0),(2,1)$$

$$\int_{bD} x^2ydx - xy^5dy, \quad D \text{ le carrée de sommets } (\pm 1, \pm 1)$$

$$\int_{bD} 3(y+e^{\sqrt{x}})dx + (2x+\cos y^2)dy, \quad D \text{ limité par les paraboles } y = x^2, x = y^2$$

$$\int_{bD} (y^2 - \arctan x)dx - (3x+\sin y)dy, \quad D \text{ limité par les courbes } y = x^2, y = 4$$

$$\int_C x^2dx + 3y^2dy, \quad C \text{ définie par } x^6 + y^6 = 1$$

$$\int_C x^2ydx - 6y^2dy, \quad C \text{ le cercle unité}$$

$$\int_C \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{r}, \quad \overrightarrow{V} = x^3y\overrightarrow{i} + 2x^4\overrightarrow{j}, \quad C \text{ la courbe } x^4 + y^4 = 1.$$

$$\iint_D xydxdy, \quad D = \{(x,y),\ x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 2\}$$

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}, \quad D = \{(x,y),\ x \geq 1, y \geq 1, x+y \leq 4\}.$$

Exercice 4.12. *Calculer*

$$\iiint_D zdxdydz, \quad D = \{(x,y,z),\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 4\}.$$

$$\iiint_D -yzdxdydz, \quad D = \{(x,y,z),\ 0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 2\pi, 0 \leq x \leq z+2\}.$$

$$\iiint_D e^x dxdydz, \quad D = \{(x,y,z),\ 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y, 0 \leq z \leq x+y\}.$$

$$\iiint_D zdxdydz, \quad \iiint_D z^2dxdydz \quad \text{et} \quad \iiint_D (x+y-z)^2dxdydz,$$

$$\text{où } D = \{(x,y,z),\ x^2+y^2+z^2 \leq 4\}.$$

Exercice 4.13. *a) Calculer*

$$\iiint_D y dx dy dz$$

où D *se trouve sous le plan* $z = x + 2y$ *et au-dessus de la région du plan* Oxy *bornée par les courbes* $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$.

b) Calculer

$$\iiint_D z dx dy dz$$

où D *est borné par les plans* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 3$ *et* $x + z = 3$.

c) Calculer

$$\iiint_D xz dx dy dz$$

où D *est la tétraèdre de sommets* $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(2, 2, 0)$ *et* $(0, 2, 2)$.

d) Calculer

$$\iiint_D (2x + 4y) dx dy dz$$

où D *est borné par le cylindre parabolique* $y = x^2$ *et les plans* $x = z$, $x = y$ *et* $z = 0$.

e) Calculer

$$\iiint_D x dx dy dz$$

où D *est borné par le paraboloide* $x = 4y^2 + 4z^2$ *et le plan* $x = 16$.

f) Calculer

$$\iiint_D z dx dy dz$$

où D *est borné par le cylindre* $y^2 + z^2 = 16$ *et les plans* $x = 0$, $y = 4x$ *et* $z = 0$ *dans le premier octant.*

Exercice 4.14. *Déterminer le centre de gravité du volume homogène défini par* $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ *et* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.

Exercice 4.15. *En utilisant les intégrales triples, calculer le volume du domaine décrit.*

a) Le tétraède formé par les plans de coordonnées et le plan $2x + 3y + 6z = 24$.

b) Le domaine borné par le cylindre elliptique $4x^2 + z^2 = 1$ *le les plans* $y = 0$ *et* $y = z + 1$.

c) Le domaine borné par le cylindre $x = y^2$ *et les plans* $z = 0$ *et* $x + z = 2$.

d) Le domaine enfermé dans les paraboloides $z = x^2 + y^2$ *et* $z = 8 - x^2 - y^2$.

Exercice 4.16. *Déterminer le jacobien de la transformation* $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w^2$. *Calculer le volume du domaine limité par les plans de coordonnées et la surface* $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 2$.

Exercice 4.17. *En utilisant les coordonnées cylindriques*

a) Calculer

$$\iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz$$

où D *est borné par le cylindre* $x^2 + y^2 = 4$ *et les plans* $z = -2$ *et* $z = 2$.

b) Calculer

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$$

où D est borné par le paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$ et le plan Oxy.

c) Calculer

$$\iiint_D xzdxdydz$$

où D est borné par les plans $z = 0$, $z = y$ et le cylindre $x^2+y^2 = 4$, dans le demi-espace $y \geq 0$.

d) Calculer

$$\iiint_D ydxdydz$$

où D est enserré entre les cylindres $x^2 + y^2 = 4$ et $x^2 + y^2 = 16$, au-dessus du plan Oxy et sous le plan $z = x + 4$.

e) Calculer

$$\iiint_D x^2dxdydz$$

où D est borné par le cylindre $x^2 + y^2 = 1$, au-dessus du plan $z = 0$ et sous le cône $z^2 = 9x^2 + 9y^2$.

Exercice 4.18. *En utilisant les coordonnées sphériques.*

a) Calculer

$$\iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

où D est la boule de centre 0 et de rayon 2.

b) Calculer

$$\iiint_D (x^2+y^2)dxdydz$$

où D est la demi-sphère unité supérieure.

c) Calculer

$$\iiint_D y^2dxdydz$$

où D est la partie dans le premier octant de la boule de centre 0 et de rayon 2.

d) Calculer

$$\iiint_D 2xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}dxdydz$$

où D est enfermé entre les sphères $x^2+y^2+z^2 = 1$ et $x^2+y^2+z^2 = 4$, dans le premier octant.

e) Calculer

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

où D est borné inférieurement par le cône $\phi = \pi/6$ et supérieurement par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

f) Calculer

$$\iiint_D x^2 dxdydz$$

où D est entres les sphères de centre 0 et de rayons 1 et 4, et au-dessus du cône $\phi = \pi/4$.

g) Calculer le volume du domaine qui se trouve au-dessus du cône $\phi = \pi/3$ et sous la surface $r = 4\cos\phi$.

Exercice 4.19. *En utilisant un changement de variables, calculer*

$$\iiint_D z^2 dxdydz, \quad D = \{(x,y,z),\ x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$$

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad D = \{4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$$

$$\iiint_D e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}} dxdydz, \quad D = \{(x,y,z),\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}.$$

Exercice 4.20. *Calculer*

$$\iiint_D xyzdxdydz, \quad D = \left\{(x,y,z),\ x,y,z \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}.$$

Exercice 4.21. *Calculer le volume intérieur à la sphère et au cylindre d'équations*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \qquad x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

Exercice 4.22. *Calculer*

$$(x^2 dx + z^2 dy + dz) \wedge (dx - 2dy - x^2 dz)$$

$$(e^z dx - e^y dz) \wedge (xdy + ydz)$$

$$(-y^2 dx + dy + 2ydz) \wedge (zdx \wedge dy + xdz \wedge dx)$$

$$(xdy + ydz) \wedge (zdy + xdz) \wedge (xdz - zdx)$$

$$d(x^3 + e^z) \wedge (2dx \wedge dy - xdy \wedge dz).$$

Montrer que si $f(x,y,z)$ est une fonction de classe C^1 alors $df \wedge df = 0$.

Chapitre 5

Formules de Stokes

5.1 Surfaces dans $\mathbb{R}^3$, tangent, vecteur normal

Soit Δ un domaine dans $\mathbb{R}^2$. Considérons une surface S dans $\mathbb{R}^3$ paramétrée par

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Delta.$$

Supposons que les fonctions à deux variables $x(u, y)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ admettent les dérivées partielles d'ordre 1 continues en u, v. Notons $M(u, v)$ le point de coordonnées

$$\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big).$$

On définit les dérivées partielles de $M(u, v)$ de la manière suivante. Notons

$$\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \text{ le vecteur d'origine } M \text{ et de composantes } (x'_u, y'_u, z'_u)$$

et

$$\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v} \text{ le vecteur d'origine } M \text{ et de composantes } (x'_v, y'_v, z'_v).$$

Ces deux vecteurs sont tangents à la surface S au point M. Le vecteur d'origine M

$$\overrightarrow{m} = \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}$$

est orthogonal à S au point M. Nous supposons que ce vecteur n'est pas nul. Posons

$$\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{m}}{\|\overrightarrow{m}\|} = \frac{\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}}{\left\|\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}\right\|}.$$

C'est un vecteur unitaire orthogonale à la surface S en M. Ce vecteur dépend du point $M(u, v)$ et dépend continûment de ce point. Nous dirons que la surface S est orientée suivant le vecteur $\overrightarrow{n}$.

Remarque 5.1.1. Pour changer l'orientation de S, il suffit de permuter les variables u et v. La surface S est alors paramétrée par (v, u).

Proposition 5.1.2. *Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de S correspondant au point (u_0, v_0). Soient $\overrightarrow{m_0}$, $\overrightarrow{n_0}$ les vecteurs orthogonaux associés comme ci-dessus. Alors le plan tangent de S en M_0 admet comme équation*

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \overrightarrow{m_0} = 0$$

ou encore

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \overrightarrow{n_0} = 0.$$

Démonstration. Le plan défini par les équations précédentes passe par le point M_0. Il est aussi clair que ce plan est orthogonal à $\overrightarrow{m}_0$. En particulier, il contient les deux vecteurs suivants qui sont tangents à la surface en M_0

$$\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}.$$

On a supposé que $\overrightarrow{m}_0$ (le produit vectoriel de ces vecteurs) est non nul, ce qui implique que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants. Le plan considéré est donc le plan tangent de la surface en M_0. □

5.2 Intégrale de surface

Soit $\Omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ une 2-forme différentielle définie sur un domaine de $\mathbb{R}^3$ qui contient la surface S. Lorsqu'on effectue le remplacement

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

et

$$dx = x'_u du + x'_v dv, \quad dy = y'_u du + y'_v dv, \quad dz = z'_u du + z'_v dv$$

on obtient une 2-forme Ω_1 qui dépend de variables (u, v). C'est une 2-forme différentielle définie sur Δ.

Définition 5.2.1. On définit *l'intégrale* $\iint_S \Omega$ de la 2-forme différentielle Ω sur la surface S par

$$\iint_S \Omega = \iint_\Delta \Omega_1.$$

Cette définition ne dépend pas de la paramétrisation de la surface S.

Remarque 5.2.2. Si S^- désigne la même surface S mais orientée dans le sens inverse, alors

$$\iint_{S^-} \Omega = -\iint_S \Omega.$$

5.3 Aire d'une surface

Considérons une surface S, graphe d'une fonction $z = z(x, y)$ au-dessus d'un domaine Δ de $\mathbb{R}^2$. Autrement dit, S est paramétrée par

$$x = x, \quad y = y, \quad z = z(x, y), \quad (x, y) \in \Delta.$$

La proposition suivante donne une formule pour calculer l'aire de S. Cette formule se ressemble à la formule de longueur d'une courbe dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 5.3.1. *On a*

$$\text{aire}(S) = \iint_\Delta \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\ dxdy.$$

Remarque 5.3.2. Lorsque la surface S est paramétrée par les variables (y, z) ou (z, x), on calcule aire(S) de la même manière. Si S est la réunion des surfaces S_1, S_2, alors

$$\text{aire}(S) = \text{aire}(S_1) + \text{aire}(S_2).$$

Définition 5.3.3. La 2-forme différentielle $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\ dx \wedge dy$ est appelée *élément d'aire* de la surface S. On le note $d\sigma$.

Plus généralement, si la surface S est paramétrée par

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Delta$$

on a

$$\text{aire}(S) = \iint_\Delta \left\| \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v} \right\| dudv.$$

5.4 Flux à travers d'une surface

Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteur dans un domaine de $\mathbb{R}^3$ qui contient la surface S.

Définition 5.4.1. On appelle *flux du champ $\overrightarrow{V}$ à travers la surface* S l'intégrale

$$\iint_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n}\ d\sigma.$$

Notons $\overrightarrow{d\sigma} = \overrightarrow{n}\ d\sigma$. Le flux du champ $\overrightarrow{V}$ à travers la surface S s'écrit

$$\iint_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\sigma}.$$

Notons $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ les composantes du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$. On associe à $\overrightarrow{V}$ la 2-forme différentielle

$$\Omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy.$$

Théorème 5.4.2. *Le flux du champ $\overrightarrow{V}$ à travers la surface S est égal à*

$$\iint_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\sigma} = \iint_S \Omega.$$

Démonstration. (cas où S est le graphe d'une fonction $z = z(x,y)$ avec (x,y) dans Δ). On a

$$d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\; dxdy.$$

On a aussi

$$\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial x} = (1, 0, z'_x) \quad \text{et} \quad \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial y} = (0, 1, z'_y).$$

Leur produit vectoriel est égal à

$$\overrightarrow{m} = (-z'_x, -z'_y, 1)$$

qui est de norme $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}$. On en déduit que

$$\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{m}}{\|\overrightarrow{m}\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}(-z'_x, -z'_y, 1)$$

et

$$\iint_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\sigma} = \iint_\Delta \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n}\, d\sigma = \int_\Delta (-Pz'_x - Qz'_y + R)dxdy.$$

D'autre part, comme $dz = z'_x dx + z'_y dy$, on obtient que Ω est égale sur S à

$$Pdy \wedge (z'_x dx + z'_y dy) + Q(z'_x dx + z'_y dy) \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

qui est égale à

$$(-Pz'_x - Qz'_y + R)dx \wedge dy.$$

D'où

$$\iint_S \Omega = \iint_\Delta (-Pz'_x - Qz'_y + R)dx \wedge dy = \iint_\Delta (-Pz'_x - Qz'_y + R)dxdy.$$

On obtient finalement

$$\iint_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\sigma} = \iint_S \Omega.$$

□

Remarque 5.4.3. En général, on peut diviser S en plusieurs morceaux qui sont des graphes au dessus de Oxy, Oyz ou Oyz. Le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S est toujours noté

$$\iint_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\sigma}$$

et est égal à

$$\iint_S \Omega$$

sans que la surface elle-même soit un graphe.

5.5 Formule de Stokes-Ampère

Supposons que la surface S est paramétrée par

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \quad (u,v) \in \Delta$$

où Δ est un domaine de $\mathbb{R}^2$. Supposons que le domaine Δ est limité par une courbe fermée L orientée dans le sens direct. La surface S est donc limitée par une courbe fermée C paramétrée par

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \quad (u,v) \in L.$$

Notons que puisque L est orientée dans le sens direct, la courbe C est aussi orientée. Le sens de parcours de C autour des vecteurs normaux, définis ci-dessus pour S, est direct. Soit ω une 1-forme différentielle définie sur un domaine de $\mathbb{R}^3$ contenant S. On admet la *formule de Green-Riemann généralisée* suivante.

Théorème 5.5.1. *On a*

$$\int_C \omega = \iint_S d\omega.$$

Corollaire 5.5.2. *Si la courbe fermée C est le bord de D et si ω est fermé alors*

$$\int_C \omega = 0.$$

Démonstration. Si ω est fermée, on a $d\omega = 0$. Le théorème 5.5.1 implique

$$\int_C \omega = \iint_S d\omega = 0.$$

□

On déduit de ce théorème la *formule de Stokes-Ampère* suivante.

Théorème 5.5.3. *On a*

$$\int_C \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dM} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot } \overrightarrow{V}} \cdot \overrightarrow{d\sigma}.$$

Cette formule dit que : *la circulation du champ $\overrightarrow{V}$ le long de la courbe fermée C est égale au flux du rotationnel de $\overrightarrow{V}$ à travers la surface S limitée par C.*

Démonstration. Soient P, Q, R les composantes de $\overrightarrow{V}$. La 1-forme associée à ce champ de vecteurs est $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. Donc

$$\int_C \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dM} = \int_C \omega.$$

D'autre part, la 2-forme associée à $d\omega$ est égale à $\overrightarrow{\text{rot } \overrightarrow{V}}$. Donc

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot } \overrightarrow{V}} \cdot \overrightarrow{d\sigma} = \iint_S d\omega.$$

Il est maintenant clair que le théorème 5.5.3 se déduit du théorème 5.5.1. □

Corollaire 5.5.4. *Si $C = bS$ et si $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradients alors*

$$\int_C \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dM} = 0.$$

Démonstration. Si $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradients, son rotationnel est nul. Le théorème 5.5.3 implique

$$\int_C \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dM} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot } \overrightarrow{V}} \cdot \overrightarrow{d\sigma} = 0.$$

□

5.6 Formule d'Ostrogradsky

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par une surface S. On suppose que la surface S est orientée de manière que les vecteurs normaux sont orientés vers l'extérieur du domaine D. Rappelons que si la surface S est paramétrée par

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Delta$$

il suffit de permuter u et v pour changer l'orientation de S.

Soit Ω une 2-forme différentielle sur D. On a *la formule de Stokes* suivante pour le cas de trois variables.

Théorème 5.6.1. *On a*

$$\iiint_D d\Omega = \iint_S \Omega.$$

Si $\overrightarrow{V}$ est un champ de vecteurs, on déduit du théorème précédent la formule d'Ostrogradsky.

Théorème 5.6.2.

$$\iint_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\sigma} = \iiint_D \text{div } \overrightarrow{V}\ dxdydz.$$

Ceci dit que *le flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ à travers le bord S d'un domaine D est égal à l'intégrale de la divergence de $\overrightarrow{V}$ sur le domaine D.*

5.7 Volume d'un domaine dans $\mathbb{R}^3$

Soit D un domaine dans $\mathbb{R}^3$ limité par une surface S. Supposons que la surface S est orientée de façon que les vecteurs normaux sont extérieurs à D.

Théorème 5.7.1. *On a*

$$\mathrm{vol}(D) = \iint_S x dy \wedge dz = \iint_S y dz \wedge dx = \iint_S z dx \wedge dy.$$

Démonstration. On a

$$\mathrm{vol}(D) = \iiint_D dxdydz = \iiint_D dx \wedge dy \wedge dz = \iiint_D d(xdy \wedge dz) = \iint_S xdy \wedge dz.$$

La dernière égalité utilise la formule de Stokes.

Les autres égalités se démontrent de la même manière. □

Nous allons appliquer ces formules pour calculer le volume de la boule B de centre 0 et de rayon R. Notons S la sphère qui limite B. On a

$$\mathrm{vol}(B) = \iint_S z dx \wedge dy.$$

Considérons d'abord la demi-sphère supérieure S_1. Soit Δ le disque de centre 0 et de rayon R dans $\mathbb{R}^2$. Considérons la paramétrisation suivante cette demi-sphère

$$x = x, \quad y = y, \quad z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in \Delta.$$

On doit d'abord déterminer son orientation. Notons M le point $(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$ de S_1. Calculons un vecteur normal de S_1 en un point M :

$$\overrightarrow{m_1} = \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial y}.$$

On a

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right), \quad \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{m_1} &= \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, 1\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}(x, y, z)
\end{aligned}$$

Ce vecteur, d'origine M, est extrérieur à B. La surface S_1 est orientée suivante la normale extérieure.

De la même manière, on paramètre la demi-sphère inférieure S_2 par

$$x = x, \quad y = y, \quad z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Les mêmes calculs donnent un vecteur normal au point général M

$$\overrightarrow{m_2} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}(-x, -y, -z).$$

Il est intérieur à B.

On obtient donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(B) &= \iint_{S_1} z dx \wedge dy - \iint_{S_2} z dx \wedge dy \\
&= \iint_{\Delta} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx \wedge dy - \iint_{\Delta} -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx \wedge dy \\
&= 2 \iint_{\Delta} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx \wedge dy \\
&= 2 \iint_{\Delta} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \\
&= \frac{4\pi R^3}{3}
\end{aligned}$$

(la dernière intégrale a été calculée au paragraphe 4.6).

Exercices

Exercice 5.1. *Soit S la partie de la surface d'équation $z = \frac{x^2+y^2}{4}$ déterminée par $0 \leq z \leq 2$ et orientée suivant la normale extérieure. Calculer l'intégrale de la surface $\iint_S \frac{dy \wedge dz}{x}$.*

Exercice 5.2. *Calculer l'aire de la surface d'équation $z = xy$ qui se projette horizontalement sur le disque $x^2 + y^2 \leq 4$ dans le plan Oxy.*

Exercice 5.3. *Calculer l'aire découpée sur le cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ par le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 4x$ et telle que $z \geq 0$.*

Exercice 5.4. *a) Soit S une partie de la sphère de centre 0 et de rayon R orientée suivant la normale extérieure. Montrer que*

$$\mathrm{aire}(S) = \frac{1}{R} \iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy.$$

b) Calculer l'aire découpée sur la demi-sphère supérieure par le cylindre $x^2 + y^2 - Rx = 0$.

Exercice 5.5. *Calculer l'intégrale de surface*

$$\iint_S yzd\sigma, \quad S \text{ la portion du plan } 3x+2y+z=6 \text{ dans le premier octant}$$

$$\iint_S xzd\sigma, \quad S \text{ le triangle de sommets } (2,0,0),(0,2,0),(0,0,2)$$

$$\iint_S -xd\sigma, \quad S \text{ la surface } y=x^2+4z, 0\le x\le 2, 0\le z\le 2$$

$$\iint_S yzd\sigma, \quad S \text{ la partie du plan } z=y+6 \text{ limitée par le cylindre } x^2+y^2=4$$

$$\iint_S xyd\sigma, \quad S \text{ limitée par les surfaces } x^2+y^2=4, y=0, x+y=4$$

$$\iint_S (x^2z+y^2z)d\sigma, \quad S \text{ la demi-sphère unité supérieure}$$

$$\iint_S xyzd\sigma, \quad S \text{ la partie de la sphère unité au-dessus du cône } z=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\iint_S (x^2y-z^2)d\sigma, \quad S \text{ la partie du cylindre } x^2+y^2=1 \text{ limitée par } z=0 \text{ et } z=3.$$

Exercice 5.6. *Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers la surface S où*

a) $\overrightarrow{V}=-e^y\overrightarrow{i}-ye^x\overrightarrow{j}-x^2y\overrightarrow{k}$, *$S$ la partie du paraboloide $z=x^2+y^2$ au-dessus le carrée $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ orientée vers le haut.*

b) $\overrightarrow{V}=-x^2y\overrightarrow{i}+3xy^2\overrightarrow{j}-4y^3\overrightarrow{k}$, *$S$ la partie du paraboloide $z=x^2+y^2-9$ au-dessous le rectangle $0\le x\le 2$, $0\le y\le 1$ orientée vers le bas.*

c) $\overrightarrow{V}=y\overrightarrow{i}-x\overrightarrow{j}-3z\overrightarrow{k}$, *$S$ la demi-sphère $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ orientée vers le bas.*

Exercice 5.7. *Considérons le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ de composantes yz, zx, xy.*

a) Calculer $\overrightarrow{\text{rot}\,\overrightarrow{V}}$.

b) Calculer la circulation de ce champ le long de la courbe intersection de la sphère et du cylindre de l'exercice 5.4.

c) Calculer la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long d'un arc joignant 2 points (a,b,c) et (a',b',c').

d) Calculer la divergence de $\overrightarrow{V}$.

e) Calculer le flux à travers la sphère de centre 0 et de rayon R orientée suivant la normale extérieure.

Exercice 5.8. *Calculer le travail de $\overrightarrow{V}$ le long de la courbe C, orientée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, vue d'en haut. Utiliser la formule de Stokes.*

a) $\overrightarrow{V}=xz\overrightarrow{i}+2xy\overrightarrow{j}+3xy\overrightarrow{k}$, *$C$ la frontière de la partie du plan $3x+y+z=6$ dans le premier octant.*

b) $\overrightarrow{V}=2z\overrightarrow{i}+4x\overrightarrow{j}+5y\overrightarrow{k}$, *$C$ la courbe d'intersection du plan $z=x+8$ et le cylindre $x^2+y^2=16$.*

c) $\overrightarrow{V}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+(x^2+y^2)\overrightarrow{k}$, *$C$ la frontière de la partie du paraboloide $z=1-x^2-y^2$ dans le premier octant.*

Exercice 5.9. *Considérons le champ* $\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$.

a) Calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}$ *et* $\text{div}\,\overrightarrow{V}$.

b) Calculer directement le flux de $\overrightarrow{V}$ *à travers la sphère unité orientée suivant la normale extérieure.*

c) Expliquer pourquoi le formule d'Ostrogradsky ne s'applique pas.

Exercice 5.10. *Soit* S *la sphère unité orientée suivant la normale extérieure. Calculer*

$$\iint_S x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dz.$$

Exercice 5.11. *Calculer le flux de* $\overrightarrow{V}$ *à travers la surface* S *en utilisant la formule d'Ostrogradski.*

a) $\overrightarrow{V} = 3x^2z^3\overrightarrow{i} + 9x^2yz^2\overrightarrow{j} - 4xy^2\overrightarrow{k}$, *S le bord du cube de sommets* $(\pm 1, \pm 1)$.

b) $\overrightarrow{V} = x^2y\overrightarrow{i} - x^2z\overrightarrow{j} + z^2y\overrightarrow{k}$, *S le bord du parallélipipède rectangle formé par les plans* $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$

c) $\overrightarrow{V} = xz\overrightarrow{i} + yz\overrightarrow{j} - z^2\overrightarrow{k}$, *S l'ellipsoide* $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$.

d) $\overrightarrow{V} = 2x^3\overrightarrow{i} + 2y^3\overrightarrow{j} + 2z^3\overrightarrow{k}$, *S la sphère unité.*

e) $\overrightarrow{V} = (x^3 + y\sin z)\overrightarrow{i} + (y^3 + z\sin x)\overrightarrow{j} + 3z\overrightarrow{k}$, *S le bord du domaine limité par les demi-sphères supérieures de centre 0 et de rayon 1, 2, et par le plan* $z = 0$.