Examen

Durée : 2 heures. Les téléphones, les calculatrices et tous les documents sont interdits.
Barème indicatif sur 20 points : environ 5 points pour chacun des trois premiers exercices, et 10 pour le dernier ; en particulier, il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir 20/20.

On rappelle la formule $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$.

Exercice 1.— Calculer les intégrales suivantes.

$$\textbf{1. } J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)dt.$$

$$\textbf{2. } J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(2t)dt.$$

$$\textbf{3. } J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)dt.$$

Les nombres J_1, J_2 et J_3 pourront être utilisés dans les exercices suivants.

Exercice 2.— *On pourra utiliser dans cet exercice les calculs de l'exercice 1.*

Etant donné une partie B de $\mathbb{R}^3$, on note $\mathrm{vol}(B)$ le volume de B. On rappelle que les coordonnées du centre de masse de B sont données par

$$(x_G, y_G, z_G) = \left(\frac{1}{\mathrm{vol}(B)}\iiint_B xdxdydz, \frac{1}{\mathrm{vol}(B)}\iiint_B ydxdydz, \frac{1}{\mathrm{vol}(B)}\iiint_B zdxdydz\right)$$

Dans la suite on considère le huitième de boule unité,

$$B = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}.$$

1. Rappeler les formules permettant de passer des coordonnées cartésiennes x, y, z aux coordonnées sphériques. Décrire ensuite le domaine B à l'aide des coordonnées sphériques (on pourra faire un dessin).

2. Retrouvez, à l'aide d'une intégrale multiple, que le volume de B vaut

$$\mathrm{vol}(B) = \frac{\pi}{6}.$$

3. Calculer l'abscisse x_G du centre de masse de B.

Exercice 3.— *On pourra utiliser dans cet exercice les calculs de l'exercice 1.*
On considère le champ de vecteurs

$$\vec{V}(x, y) = (y\cos(x), \sin(x) + 2y)$$

défini sur $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer la circulation de $\vec{V}$ (appelée aussi « travail de la force $\vec{V}$ ») le long de la courbe $t \mapsto (2t, t)$ pour t allant de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

2. Trouver une fonction f dont V est le champ de gradient (autrement dit, telle que $df = y\cos(x)dx + (\sin(x) + 2y)dy$).

3. Retrouver le résultat de la première question à l'aide de la deuxième.

Exercice 4.—
On considère la 1-forme différentielle $\alpha = y(z+1)dx$, définie sur l'espace $\mathbb{R}^3$. On note D le disque situé dans le plan horizontal $z = 0$, de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon 1, et orienté par la normale dirigée vers le haut. Un paramétrage de ce disque est donné par

$$M(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), 0), \quad r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi].$$

1. Intégrale de 1-forme
Donner un paramétrage du cercle ∂D qui est le bord du disque D, puis calculer à l'aide de ce paramétrage l'intégrale

$$I_1 = \int_{\partial D} \alpha.$$

2. Intégrale de 2-forme

a. Calculer les différentielles des fonctions $x(r, \theta) = r\cos(\theta)$ et de $y(r, \theta) = r\sin(\theta)$.

b. Calculer $\omega = d\alpha$.

c. Déterminer, de deux façons différentes, l'intégrale

$$I_2 = \int_D \omega.$$

3. Intégrale de 3-forme...

a. Calculer $d\omega$ par un calcul direct. Pouvait-on prévoir ce résultat sans calcul ?

b. En déduire la valeur de

$$I_3 = \int_S \omega$$

où S est la demi-sphère supérieure de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon 1,

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

orientée par la normale qui pointe vers le haut. *On pourra dessiner S.*

c. Comment interprète-t-on l'intégrale I_3 en termes de champ de vecteurs ?