Analyse de Fourier et distributions

Frédéric Paugam

Compléments de cours[1]

Module MAF S6 EPU

Année universitaire 2022-2023

1. Ce texte est complémentaire au polycopié [8] qui donne un résumé des résultats ensentiels du cours. D'autres références utiles sont disponibles en fin de document.

Table des matières

Chapitre 1

Motivations

Nous commençons ce polycopié en motivant l'introduction des nouvelles notions mathématiques qui seront présentées, et en expliquant le rôle fondamental qu'elles vont jouer dans la modélisation de situations physiques.

Un système physique se modélise souvent mathématiquement de la manière suivante :

1. L'*état du système* est une fonction. Par exemple :
   (a) La position $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$ d'un mobile dans un système de coordonnées dans l'espace en fonction du temps.
   (b) La température $T(t, \theta, \varphi)$ à la surface du globe en fonction du temps, de la lattitude et de la longitude.
   (c) L'amplitude de probabilité de présence $\psi(t, x, y, z)$ d'une particule au temps t dans l'espace de coordonnées (x, y, z).
   (d) La pression $p(x, y, z, t)$ de l'air en fonction de l'espace et du temps (propagation du son).
2. Les *observables du système* (quantités mesurables) sont des fonctionnelles (fonctions sur l'espace) des états :
   (a) La longueur $M \mapsto L_{t_0,t_1}(M)$ de la courbe parcourue par la trajectoire $M(t)$ quand $t \in [t_0, t_1]$, donnée par l'intégrale de la norme de la vitesse
   $$L_{t_0,t_1}(M) := \int_{t_0}^{t_1} \|M'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$
   (b) La température moyenne $\Theta_{moy,fr,t_0}(T(t, \theta, \varphi))$ au temps t_0 en France, donnée par une intégrale en $(\theta, \varphi) \in$ France et une évaluation en $t = t_0$.
   (c) La probabilité de présence de la particule donnée au temps t_0 dans la boite $B \subset \mathbb{R}^3$, donnée par une intégrale en $(x, y, z) \in B$ et une évaluation en $t = t_0$.
   (d) La mesure de la variation
   $$V(x_0, y_0, z_0, p)(t) := p(x_0, y_0, z_0, t)$$
   de pression de l'air en un point (x_0, y_0, z_0) fixé de l'espace. C'est une fonctionnelle à valeur dans l'espace des fonctions du temps $t \in [a, b]$.

3. Les états et les observables suivent une loi physique souvent donnée par une équation différentielle (resp. aux dérivées partielles) comme par exemple l'équation de la mécanique de Newton

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a},$$

avec $a = M^{(2)}(t) := M''(t)$, dont la résolution permet de relier le comportement infinitésimal du système à son comportement global.

Le but est de décrire les états et observables du système, et s'il y en a une, de résoudre l'équation différentielle. Certaines équation différentielles, comme celle de Newton, dites bien posées, possèdent une unique solution si on se fixe des conditions initiales convenables, mais d'autres peuvent en posséder plusieurs (comme par exemple l'équation $x'(t) = 2\sqrt{x(t)}$, avec pour solutions $x_a(t) = 0$ pour $t < a$ et $x_a(t) = (t-a)^2$ pour $t \geq a$, $a \in \mathbb{R}$). Nous nous cantonnerons dans ce cours à des équations bien posées.

On donne souvent une description des états/observables du système comme des "superpositions" linéaires d'états/observables plus simples, car ceci permet :

1. d'une part, de les encoder facilement au format numérique (traitement informatique d'un signal comme celui donné par les vibrations induites par les variation de pression de l'air données par une onde sonore, les variations de luminosité données par le capteur d'un appareil photo, ou le mouvement d'un aimant aux abords d'une bobine induit par une vibration sismique), et même de le compresser (format jpeg, mp3).
2. d'autre part, de simplifier la résolution de l'équation différentielle donnée par la loi physique.

Le premier exemple d'une telle décomposition d'un état/observable en une superposition d'états/observables plus simples est donné par la transformée et les séries de Fourier, dont les blocs de base sont l'exponentielle complexe et les fonctions trigonométriques [1].

Nous étudierons dans ce cours ces décompositions et leurs application à la résolution d'équations différentielles.

Dans ce texte, les états sont des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ infiniment continuement dérivables, les équations différentielles sont linéaires (ou affines), et les observables sont des fonctionnelles linéaires, i.e., vérifiant

$$F(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda F(\varphi) + \mu F(\psi)$$

aussi appelées distributions. Dans ce cadre linéaire, un état est aussi un observable car on peut lui associer la fonctionnelle

$$F_\varphi(\psi) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\psi(x)dx$$

définie en utilisant l'intégrale. Une équation différentielle portant sur les états se généralise aux observables et une solution observable est appelée "solution faible"

1. Il existe une théorie plus générale mais similaire aussi très utilisé en compression d'images et traitement du signal, dont les blocs de base sont appelés les "ondelettes".

ou “solution distributionnelle”. La transformée de Fourier, introduite en 1822 par Fourier dans [4] pour résoudre l’équation de la chaleur

$$\partial_t f(t,x) - \partial_x^2 f(t,x) = g(t,x),$$

sera définie pour des distributions assez générales, ce qui permet de donner une solution élégante au problème de résoudre n’importe quelle équation aux dérivées partielles à coefficients constants sur $\mathbb{R}^d$.

Chapitre 2

Préliminaires sur l'intégrale de Lebesgue

On va présenter succintement (voir le livre [3] pour la théorie complète, et le polycopié [5] pour un résumé détaillé, dont cette partie est directement inspirée) la définition de l'intégrale de Lebesgue en termes de théorie de la mesure.

L'intuition derrière cette construction de l'intégrale (surface sous le graphe) pour une fonction continue positive $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ peut être comprise en la comparant à celle de Riemann :

1. Pour la définition de Riemann, on découpe *l'intervalle des variables* de la fonction $[a, b]$ en N intervalles I_k de même longueur $\ell = (b - a)/N$, et on approche la surface sous le graphe de f par une union de petits pavés de base $I_k = [a + k\ell, a + (k + 1)\ell]$ et de hauteur $f(a + k\ell)$ (voir la Figure 2.1). La surface d'un tel pavé est donnée par le produit des longueurs de ses côtés, qui vaut $f(a+k\ell)\cdot\ell$. L'intégrale (surface sous le graphe) est donc proche de la somme des aires de ces pavés, appelée somme de Riemann
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(a + k\ell) \cdot \ell.$$

2. Pour la définition de Lebesgue, on découpe *l'intervalle des valeurs* de la fonction $[c, d] = f([a, b])$ en N intervalles de longueur $\ell' = (d - c)/N$, notés $J_k = [c + k\ell', c + (k + 1)\ell']$, et on obtient un découpage correspondant de l'intervalle $[a, b]$ en une union d' *ensembles mesurables* $B_k = f^{-1}(J_k)$ (voir la Figure 2.1). L'intégrale est alors proche de la somme de Lebesgue
$$\int_{[a,b]} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} (c + k\ell') \cdot \lambda(B_k)$$
avec λ la *mesure de Lebesgue*, qui est l'extension naturelle de la notion de longueur des intervalles aux ensembles mesurables.

Un intérêt théorique de cette approche à la théorie de l'intégration est qu'elle permet d'intégrer de manière flexible des fonctions plus générales que celles que l'on peut intégrer en utilisant l'intégrale de Riemann. Elle fournit aussi des espaces

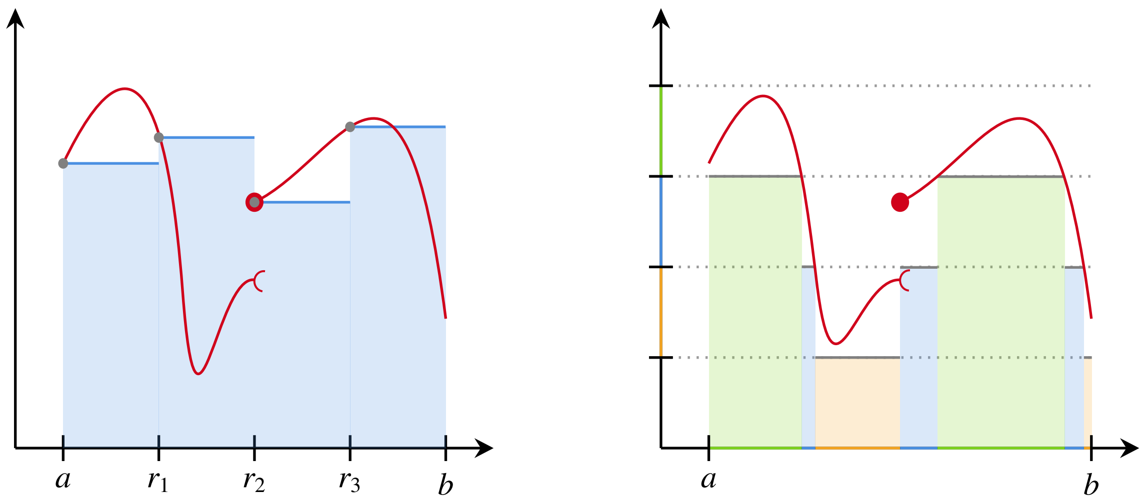

FIGURE 2.1 – La construction de l'intégrale de Riemann à gauche : on considère les valeurs de la fonction en les points $r_k = a + k(b-a)/N$, qui correspondent aux points gris ; à partir de ces points on forme les rectangles bleus ; l'aire de l'union de ces rectangles est une approximation de l'intégrale. La construction de l'intégrale de Lebesgue est à droite : on considère des intervalles de l'ensemble d'arrivée (ici en vert, bleu, orange), ainsi que leurs pré-images ; à partir de celles-ci on forme des rectangles ; l'aire de l'union de ces rectangles est une approximation de l'intégrale.

complets de fonctions intégrables, dans lesquels toute suite de Cauchy converge. Du point de vue pratique, Elle fournit en particulier un cadre naturel pour l'étude des intégrales à paramètre, de la convolution, de la transformée de Fourier, et donc, de la théorie des distributions.

2.1 Mesure de Lebesgue et fonctions mesurables

Définition 1 (Droite positive étendue). *On note $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ la droite positive étendue.*

On étend, quand c'est possible, de manière évidente, les opérations $+$, $\times$ et $\geq$ de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}_+$. Par convention, on pose $0 \cdot \infty = 0$. La définition usuelle

$$|x| = \max(x, -x)$$

de la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ définit une fonction $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Le module

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$

défini aussi une extension $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ de la valeur absolue sur $\mathbb{R}$.

Définition 2. *Soit X un ensemble. Une* tribu *sur X (appelée aussi une σ-algèbre) est un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de X vérifiant :*

1. *$\mathcal{A}$ contient $\emptyset$.*
2. *$\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire : si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$.*

3. *$\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

Le couple $(X, \mathcal{A})$ est appelé un espace mesurable. Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ entre deux espaces mesurables est dite mesurable *si elle vérifie que pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Il est clair sur la définition que la composée de deux fonctions mesurables est une fonction mesurable. On peut poser $A_n = \emptyset$ pour $n >> 0$ dans l'axiome de stabilité par union dénombrable, ce qui montre aussi la stabilité d'une tribu par union finie.

L'intersection d'une famille de tribus est clairement une tribu. Ceci implique que, si X est un ensemble et $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ est un ensemble de parties de X, il existe une plus petite tribu sur X contenant $\mathcal{T}$ appelée la tribu des engendrée par $\mathcal{T}$.

Définition 3. *Soit $d \geq 1$ un entier. Un pavé (qu'on appelera aussi un intervalle) de $\mathbb{R}^d$ est un produit $]a, b[=]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_d, b_d[$ de d intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ est une réunion arbitraire de pavés. Un fermé F de $\mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble tel que F^c soit ouvert.*

Définition 4. *Pour $d \geq 1$, la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$ est appelée la tribu des Boréliens de $\mathbb{R}^d$ et notée $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. De même, pour $K \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \overline{\mathbb{R}}_+\}$, on définit la tribu $\mathcal{B}(K)$ des Boréliens de K. Les fonctions mesurables $f : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \to (K, \mathcal{B}(K))$ sont dites Borel-mesurables.*

Exemple 1. *Les ouverts et les fermés sont Boréliens. Les fonctions continues sont Borel-mesurables.*

Définition 5. *Si X est un ensemble et $A \subset X$ est une partie de X, on note $\mathbb{1}_A$ la* fonction indicatrice *de A, définie par*

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A. \end{cases}$$

Exemple 2. *Un ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$ est Borélien si et seulement si sa fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ est Borel-mesurable.*

Définition 6. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une* mesure *sur $(X, \mathcal{A})$ est la donnée d'une fonction*

$$\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

vérifiant :

1. *$\mu(\emptyset) = 0$.*
2. *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'ensemble mesurables deux à deux disjoints (on écrit leur union $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ par le signe d'union disjointe $\coprod_{n\in\mathbb{N}} A_n$) alors on a*
$$\mu(\coprod_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé un espace mesuré.

Le théorème principal de la théorie de Lebesgue, qui sera admis dans ce cours (pour une preuve, on pourra se référer au livre [3]), est le suivant :

Théorème 1 (Existence et unicité de la mesure de Borel-Lebesgue)**.** *Il existe une unique mesure $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, appelée mesure de Borel-Lebesgue, qui :*

1. *est invariante par translation, i.e., vérifie $\lambda(a+B) = \lambda(B)$ pour tout Borelien B et*
2. *vérifie la normalisation*

$$\mathrm{vol}_\lambda(]a,b[) \equiv \lambda(]a_1,b_1[\times\cdots\times]a_d,b_d[) = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i).$$

Définition 7. *Soit $(X,\mathcal{A})$ un ensemble mesurable et μ une mesure sur $(X,\mathcal{A})$. Un sous-ensemble $N \subset X$ est dit négligeable s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$. L'ensemble des parties de X de la forme $A \cup N$ avec $A \in \mathcal{A}$ et N négligeable est une tribu appelée la tribu complétée de $\mathcal{A}$ et la mesure μ s'étend à cette tribu par $\mu(A \cup N) = \mu(A)$.*

Définition 8. *La tribu complétée de la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ pour la mesure de Borel-Lebesgue est appelée la tribu de Lebesgue et notée $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. La mesure λ étendue à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ est appelée la mesure de Lebesgue. Les fonctions mesurables*

$$f : (\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)) \to (K, \mathcal{B}(K))$$

pour $K \in \{\mathbb{R}_+, \overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ sont appelées Lebesgue-mesurables. Une propriété est vraie presque partout *(en abrégé « p.p. ») si elle est satisfaite en dehors d'un ensemble négligeable.*

Exemple 3. *Étant données deux fonctions $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, si $\lambda\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq g(x)\} = 0$, on dira que « $f = g$ presque partout ».*

Exemple 4. *Un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}^d$ est toujours négligeable, car il est une union dénombrable de singletons, et un singleton est de mesure nulle.*

2.2 Intégrale des fonctions mesurables positives

Définition 9. *Une fonction étagée sur un ensemble mesuré $(X,\mathcal{A},\mu)$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs d'indicatrices de mesurables*

$$f = \sum_{n=1}^{N} a_n \mathbb{1}_{A_n}$$

avec $a_n \in \mathbb{R}_+$. L'intégrale de f est définie par

$$\int f d\mu \equiv \int_X f(x) d\mu(x) := \sum_{n=1}^{N} a_n \mu(A_n).$$

On montre que cette définition ne dépend pas de l'écriture de f comme combinaison linéaire d'indicatrices de mesurables. Plus généralement, si $f : (X,\mathcal{A},\mu) \to (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ est mesurable positive, son intégrale est définie par

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int g d\mu,\ g \text{ étagée et } g \leq f\right\}.$$

Avec la définition précédente, il est clair qu'on a l'égalité

$$\mu(A) = \int \mathbb{1}_A d\mu$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Nous admettrons une partie des propriétés fondamentales de l'intégrale des fonctions mesurables positives (voir le livre [3] pour une preuve de ces résultats).

Théorème 2 (Propriétés de l'intégrale)**.** *Pour $K = \overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, On note $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d, K) \equiv \mathcal{M}((\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)), (K, \mathcal{B}(K))$ l'ensemble des fonctions Lebesgue-mesurables sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans K. L'intégrale*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathbb{R}^d, \overline{\mathbb{R}}_+) &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ f &\longmapsto \int f, \end{aligned}$$

que l'on peut aussi noter

$$\int_{\mathbb{R}^d} f, \ \textit{ou} \ \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

obéit aux propriétés suivantes :

1. ***Linéarité positive** : pour f et g mesurables positives, et pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$, on a*

$$\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g.$$

2. ***Croissance** : pour f et g mesurables positives telles que $f \leq g$, on a*

$$\int f \leq \int g.$$

3. ***Normalisation** : pour $a_1 \leq b_1, \cdots, a_d \leq b_d \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int \mathbb{1}_{]a_1,b_1[\times\cdots\times]a_d,b_d[} = (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_d - a_d).$$

4. ***Théorème de Beppo-Levi ou de convergence croissante** : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives, alors*

$$\int \lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \int f_n.$$

Cette application vérifie de plus une propriété d'approximation : pour toute fonction f mesurable positive telle que $\int f < +\infty$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+)$ nulle en dehors d'un compact, telle que

$$\int |f - \varphi| < \varepsilon.$$

2.3 Espaces de fonctions intégrables

Définition 10. *Soit $K \in \{\mathbb{R}_+, \overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Soit $f : \mathbb{R}^d \to K$ une fonction mesurable.*

1. *On dit que f est* intégrable *(ou sommable) si*
$$\int_{\mathbb{R}^d} |f| < +\infty.$$
2. *Plus généralement, pour $0 < p < +\infty$, on dit que f est p-sommable si*
$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p < +\infty.$$
3. *On dit que f est essentiellement bornée si elle est bornée en dehors d'un ensemble de mesure nulle.*
4. *On dit que f est* localement intégrable *si*
$$\int_{\mathbb{R}^d} |f| \mathbb{1}_{[a,b]} < +\infty$$
pour tout pavé borné $[a, b]$.

Pour $0 < p < \infty$, on note $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d, K)$ l'ensemble des fonctions p-sommables (resp. $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d, K)$ l'ensemble des fonctions essentiellement bornées, resp. $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d, K)$ l'ensemble de fonctions localement intégrables). Si $K = \mathbb{C}$, on omettra K de la notation. Pour $0 < p \leq \infty$, on note $L^p(\mathbb{R}^d, K)$ (resp. $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d, K)$) l'espace des classes d'équivalences de fontions p-sommables (resp. de fonctions localement intégrables) modulo la relation d'égalité presque partout.

On montre que $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, K)$ et $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ forment des K-espace vectoriels pour $K \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. En effet, la croissance de l'intégrale, la linéarité positive, et l'inégalité triangulaire fournissent la majoration
$$\int |\lambda f + \mu f| \leq |\lambda| \int |f| + |\mu| \int |g| < +\infty$$
si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, K)$ et $\lambda, \mu \in K$. Le même raisonnement fait de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \overline{\mathbb{R}}_+)$ un $\mathbb{R}_+$-espace vectoriel.

Exemple 5. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est mesurable, on peut approcher sa valeur absolue $|f|$ par la suite croissante de fonctions mesurables positives $f_n = \mathbb{1}_{[-n,n]}|f|$. Le théorème de Beppo-Levi permet donc de montrer que f est intégrable si et seulement si la limite*
$$\int |f| = \lim_n \int_{[-n,n]} |f|$$
est finie. Par exemple, la fonction constante $1 = \mathbb{1}_\mathbb{R}$ n'est pas intégrable car dans ce cas, cette limite vaut
$$\int \mathbb{1}_\mathbb{R} = \lim_n (2n) = \infty.$$

Pour f mesurable réelle, on note $f_+ = f\mathbb{1}_{\{f>0\}}$ et $f_- = -f\mathbb{1}_{\{f<0\}}$. On a $f = f_+ - f_-$ et $|f| = f_+ + f_-$.

Théorème 3. *Il existe une unique extension de l'intégrale*

$$\int : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$$

des fonctions intégrables positives en une application $\mathbb{C}$-linéaire

$$\int : L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$

donnée, si f est à valeurs réelles, par

$$\int f = \int f_+ - \int f_-$$

et si f est à valeurs complexes par

$$\int f = \int \mathrm{Re}(f) + i \int \mathrm{Im}(f).$$

Exemple 6.

1. *Toute fonction f continue sur $\mathbb{R}^d$ y est localement intégrable car elle est bornée sur tout pavé borné, donc*

$$\int_{[a,b]} |f(x)|dx \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \int_{[a,b]} dx = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|\mathrm{vol}([a,b]) < \infty.$$

2. *La fonction $f(x) = \cos(x)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ mais elle y est localement intégrable car elle est continue, et on a*

$$\int_{[a,b]} \cos(x)dx = [\sin(x)]_a^b = \sin(b) - \sin(a).$$

On peut aussi démontrer le théorème suivant (voir l'appendice A pour la notion d'espace vectoriel normé complet).

Théorème 4. *Pour $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $L^p(\mathbb{R}^d, K)$ est un espace vectoriel normé complet pour la norme*

$$\|f\|_p := \sqrt[p]{\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p(x)dx},$$

et on dispose d'une inclusion

$$L^p(\mathbb{R}^d) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^d).$$

Exemple 7. *Toute fonction localement (essentiellement) bornée est localement intégrable. En particulier, toute fonction continue est localement intégrable, donc on a une inclusion*

$$C^0(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}^d).$$

Exemple 8 (Critère de Riemann)**.** *Nous allons nous intéresser à l'intégrabilité de la puissance en 0 et en $+\infty$.*

1. *La fonction* $f(x) = \frac{\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)}{x^p}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$ *si et seulement si* $p > 1$. *En effet, par Beppo-Levi, il suffit de montrer que la limite quand n tend vers l'infini de* $\int_1^n \frac{dx}{x^p}$ *est finie. Si* $p = 1$, *on a*

$$\int_1^n \frac{dx}{x} = \ln(n) - \ln(1)$$

et la limite n'est pas finie. Si $p \neq 1$, *on a*

$$\int_1^n x^{-p} dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^n = \frac{n^{-p+1} - 1}{-p+1}$$

et la limite est finie si et seulement si $-p + 1 < 0$, *i.e.,* $p > 1$.

2. *De même, on démontre que* $f(x) = \frac{\mathbb{1}_{]0,1]}}{x^p}$ *est intégrable si et seulement si* $p < 1$.

En d'autres termes, la fonction $f(x) = \frac{\mathbb{1}_{]0,1]}}{x}$ *(resp.* $g(x) = \frac{\mathbb{1}_{[1,+\infty[}}{x}$*) est dans* L^p *si et seulement si* $p < 1$ *(resp.* $p > 1$*).*

Exemple 9. *La fonction* f *définie sur* $]0, 1]$ *par* $f(x) = \frac{\mathbb{1}_{]0,1]}}{x^{1/2}}$ *et prolongée à* $\mathbb{R}$ *par l'équation de périodicité* $f(x+n) = f(x)$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ *n'est pas continue, et n'est dans* L^p *pour aucun* $p \in [1, +\infty]$ *mais elle est localement intégrable, car elle est intégrable sur* $]0, 1]$ *et périodique.*

2.4 Enoncés des théorèmes principaux

Nous allons énoncer ici sans preuve les théorèmes principaux de la théorie de l'intégration de Lebesgue, qui nous seront utiles et nécessaires pour comprendre les constructions de la théorie des distributions. On se réfère au polycopié [5] pour les preuves de ces résultats.

Théorème 5 (Théorème de convergence dominée)**.** *Soit* $A \subset \mathbb{R}^d$ *un ensemble mesurable, et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions intégrables sur* A *telle que :*

- f_n *converge presque partout vers une fonction* f *;*
- *il existe une fonction mesurable, positive et* intégrable g *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on ait* $|f_n| \leq g$ *presque partout.*

Alors f *est intégrable et*

$$\int_A f = \lim_{n\to+\infty} \int_A f_n.$$

De plus, $\lim_{n\to+\infty} \int_A |f_n - f| = 0$.

Théorème 6 (Continuité sous domination)**.** *Sous les hypothèses suivantes :*

1. *pour tout* $t \in \Lambda$, *la fonction* $x \mapsto f(x, t)$ *est intégrable sur* A *;*
2. *pour presque tout* $x \in A$, *la fonction* $t \mapsto f(x, t)$ *est continue sur* Λ *;*
3. *il existe une fonction intégrable* $g : A \to \mathbb{R}_+$ *telle que pour tout* $t \in \Lambda$

$$|f(x, t)| \leq g(x) \quad \text{pour presque tout } x \in A;$$

la fonction $t \mapsto F(t) = \int_A f(x, t)dx$ *est continue sur* Λ.

Théorème 7 (Dérivabilité sous domination)**.** *Supposons que l'ensemble Λ soit un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Sous les hypothèses suivantes :*

1. *pour tout $t \in \Lambda$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur A ;*
2. *pour presque tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur Λ ;*
3. *il existe une fonction intégrable $g : A \to \mathbb{R}_+$ telle que pour presque tout $x \in A$ et tout $t \in \Lambda$,*
$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x);$$

la fonction F est dérivable, et

$$F'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

Le théorème suivant permet, en particulier, de se ramener à étudier l'intégrabilité de fonctions à une variable pour montrer l'intégrabilité de fonctions en plusieurs variables. .

Théorème 8 (Fubini-Tonelli pour les fonctions positives)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive. Alors les fonctions*

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy, \text{ et } y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dx,$$

sont mesurables et on a l'égalité suivante, dans $\overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f = \int_{\mathbb{R}^n} \left\{\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy\right\} dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left\{\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dx\right\} dy.$$

Le théorème suivant permet de calculer des intégrales multiples en se ramenant à des calculs d'intégrales simples.

Théorème 9 (Fubini pour les fonctions intégrables)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable (sur $\mathbb{R}^{n+m}$). Alors les fonctions*

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy, \text{ et } y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dx,$$

sont intégrables et on a l'égalité suivante,

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f = \int_{\mathbb{R}^n} \left\{\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy\right\} dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left\{\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dx\right\} dy.$$

Définition 11. *Soit $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ une fonction définie sur un domaine $\Delta \subset \mathbb{R}^n$. On dit que Φ est différentiable en x s'il existe une application linéaire $D\Phi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ appelée la différentielle de Φ en x telle qu'on ait le développement limité*

$$\Phi(x + \overrightarrow{h}) = \Phi(x) + D\Phi(x) \cdot \overrightarrow{h} + o(\overrightarrow{h}),$$

avec $o(h)$ une fonction de h telle que $\frac{o(\overrightarrow{h})}{\|\overrightarrow{h}\|}$ tende vers 0 quand $\|\overrightarrow{h}\|$ tend vers 0. On dit que Φ est C^1 si l'application $x \mapsto D\Phi(x)$ est continue de Δ dans $\mathbb{R}^m$. Un changement de variable $\Phi : \Delta \to D$ entre deux domaines de $\mathbb{R}^n$ est une application C^1, munie d'une application $\Psi : D \to \Delta$, qui est un inverse C^1 de Φ, i.e., qui vérifie

$$\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_D \text{ et } \Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_\Delta.$$

On admettra la caractérisation suivante des changements de variable.

Théorème 10 (d'inversion locale)**.** *Une application* $\Phi : \Delta \to D$ *qui est* C^1 *entre deux domaines ouverts de* $\mathbb{R}^d$ *est un changement de variables si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

1. *elle est bijective,*
2. *sa différentielle est inversible en tout point, i.e., on a* $\det(D\Phi(x)) \neq 0$ *pour tout* $x \in \Delta$.

Théorème 11 (Changement de variables)**.** *Soit* $\Phi : \Delta \to D$ *un changement de variable entre deux domaines de* $\mathbb{R}^d$. *Soit* $f : D \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable. Alors on a*

$$\int_D f(x)dx = \int_\Delta f(\Phi(u)) \cdot |\det(D\Phi(u))|du.$$

Voyons maintenant un exemple de calcul simple, qui nous sera utile par la suite, et qui utilise le théorème de changement de variable et le théorème de Fubini.

Exemple 10 (Intégrale Gaussienne)**.** *On souhaite calculer, pour* $t > 0$, *l'intégrale Gaussienne*

$$G_t = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t x^2} dx.$$

On utilise le théorème de Fubini pour ramener ce calcul à une celui d'une intégrale en dimension 2

$$\begin{array}{rcl} G_t^2 & = & \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t x^2 dx}\right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t y^2} dy\right) \\ & \overset{fubini}{=} & \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi t(x^2+y^2)} dxdy \end{array}$$

La formule $\Phi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ *définit un changement de variable*

$$]0, +\infty[\times[0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\},$$

appelé la paramétrisation polaire du plan (épointé). En effet, c'est une fonction qu'on sait bijective, car tout point du plan est uniquement déterminé par son angle par rapport à l'axe des abscisses et sa distance à l'origine. Le déterminant de la matrice jacobienne de cette application est

$$\det(D\Phi) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = r,$$

et est bien partout non nul, donc Φ *est un changement de variable. L'intégrale recherchée est donc donnée par*

$$\begin{array}{rcl} G_t^2 & = & \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi t(x^2+y^2)} dxdy \\ & \overset{chgt\ de\ variable}{=} & \int_{]0,+\infty[\times[0,2\pi[} e^{-\pi t r^2} r dr d\theta \\ & \overset{fubini}{=} & \int_0^{2\pi} (\int_0^\infty e^{-\pi t r^2} dr) d\theta \\ & = & -\frac{\pi}{\pi t} \int_0^\infty e^{-\pi t r^2} d(\pi t r^2) \\ & = & -\frac{1}{t} [e^{-u}]_0^\infty \\ & = & \frac{1}{t} \end{array}$$

On en conclut la valeur

$$G_t = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

pour l'intégrale Gaussienne.

2.5 Convolution et transformée de Fourier

Définition 12. *Soient f et g deux fonctions intégrables. La convolution $f * g$ est la fonction intégrable définie par*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy.$$

Définition 13. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ une fonction intégrable. Sa transformée de Fourier est la fonction*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) \equiv \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2i\pi x\xi}dx.$$

Théorème 12. *Si f et g sont des fonctions intégrables, on a*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g),$$

i.e., la tranformée de Fourier envoie la convolution sur le produit.

Démonstration. Ceci découle du théorème de Fubini. □

2.6 Mesures de Radon

On va maintenant définir les mesures de Radon, qui sont les distributions dites "d'ordre de régularité 0", et jouent le rôle de "fonctions continues généralisées".

Définition 14. *Un ouvert de $\mathbb{R}^d$ est une réunion d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}^d$. Un fermé F de $\mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble tel que F^c soit ouvert. Un compact K de $\mathbb{R}^d$ est un fermé qui est aussi borné (i.e., inclus dans un pavé borné).*

Si $[a,b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}^d$, on note $C^0([a,b])$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs complexes et $C^0_0([a,b])$ le sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions qui s'annulent au bord de l'intervalle. Pour $\varphi \in C^0([a,b])$, on note

$$\|\varphi\|_{\infty,[a,b]} := \sup_{x\in[a,b]} |\varphi(x)|.$$

C'est une norme sur l'espace vectoriel $C^0([a,b])$.

Définition 15. *Le support d'une fonction continue $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est défini par*

$$\mathrm{supp}(\varphi) := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \begin{array}{c} \textit{il n'existe pas d'intervalle ouvert }]a,b[\\ \textit{contenant } x \textit{ avec } \varphi_{|]a,b[} \equiv 0 \end{array} \right\}.$$

C'est aussi le plus petit fermé contenant l'ensemble des points x tels que $\varphi(x) \neq 0$. On note $C^0_c(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ à support compact, défini par

$$C^0_c(\mathbb{R}^d) := \left\{ \varphi \in C^0(\mathbb{R}^d) \;\middle|\; \begin{array}{c} \textit{il existe un intervalle compact } [a,b] \\ \textit{avec } f_{|[a,b]^c} \equiv 0 \end{array} \right\}.$$

On doit penser à $C^0_c(\mathbb{R}^d)$ comme à l'union des espaces $C^0_0([a,b])$ dans $C^0(\mathbb{R}^d)$, chacun étant muni de la seminorme $\|\cdot\|_{\infty,[a,b]}$.

Définition 16. *Une mesure (de Radon) sur $\mathbb{R}^d$ est une fonctionnelle linéaire continue*

$$\begin{array}{rccc} \mu : & C^0_c(\mathbb{R}^d) & \to & \mathbb{C} \\ & \varphi & \mapsto & \langle \mu, \varphi \rangle \end{array}$$

i.e., une application vérifiant les deux conditions suivantes :

1. *(linéarité)* $\langle \mu, a\varphi + b\psi \rangle = a\langle \mu, \varphi \rangle + b\langle \mu, \psi \rangle$ *pour tous* $a, b \in \mathbb{C}$, $\varphi, \psi \in C^0_c(\mathbb{R}^d)$.
2. *(continuité) Pour chaque intervalle compact* $[a, b]$, *il existe une constante* $C_{[a,b]} \geq 0$ *telle que si* φ *est à support dans* $[a, b]$, *on a*
$$|\langle \mu, \varphi \rangle| \leq C_{[a,b]} \cdot ||\varphi||_{\infty,[a,b]}.$$

On note $C^{-0}(\mathbb{R}^d)$ *l'espace vectoriel des mesures* [1] *(de Radon) sur* $\mathbb{R}^d$.

On peut voir les mesures comme des "fonctions continues généralisées", et même des "fonctions localement intégrables généralisées" sur $\mathbb{R}^d$, comme on va le voir dans la proposition suivante.

Proposition 1. *Une fonction localement intégrable* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ *définit une mesure*

$$[f] : C^0_c(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$$

par l'expression

$$\langle [f], \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx.$$

Ceci induit une inclusion d'espaces vectoriels complexes

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^{-0}(\mathbb{R}^d)$$

des fonctions localement intégrables dans les mesures, qui envoie la fonction constante 1 *sur la mesure définie par l'intégrale de Lebesgue* $\langle [1], \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx$.

Démonstration. L'application $[f]$ est bien définie car $x \mapsto f(x)\varphi(x)$ est intégrable et à support dans un intervalle contenant le support de φ (en effet, si $\varphi(x) = 0$ alors $f(x)\varphi(x) = 0$), et linéaire car l'intégrale et le produit par f le sont. La continuité découle de l'inégalité

$$|\langle [f], \varphi \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx \right| \leq \left(\int_{[a,b]} |f(x)|dx \right) \cdot ||\varphi||_{\infty,[a,b]} = C_{[a,b]} \cdot ||\varphi||_{\infty,[a,b]},$$

avec $C_{[a,b]} = \int_{[a,b]} |f(x)|dx$, inégalité qui est vraie quand φ est à support dans $[a, b]$. On peut montrer (admis) que cette inégalité est optimale, c'est à dire que $C_{[a,b]} = \int_{[a,b]} |f(x)|dx$ est la constante minimale la vérifiant pour toute fonction φ continue à support dans $[a, b]$. Ceci permet de montrer que $[f] = 0$ est équivalent au fait que $\int_{[a,b]} |f(x)|dx = 0$ pour tout $[a, b]$, ce qui revient à dire que $|f| = 0$ et donc $f = 0$ dans L^1_{loc}. Ainsi, le noyau de l'application $f \mapsto [f]$ est nul, ce qui montre que cette application est injective. □

On peut généraliser directement la notion de support d'une fonction continue aux mesures. Ce même procédé permet de définir le support de toutes les classes de fonctions généralisées considérées dans ce cours.

1. L'espace $C^{-0}(\mathbb{R}^d)$ est parfois noté $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 17. *Le support d'une mesure $\mu \in C^{-0}(\mathbb{R}^d)$ est donné par*

$$\operatorname{supp}(\mu) := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \begin{array}{c} \textit{il n'existe pas d'intervalle ouvert }]a,b[\\ \textit{contenant } x \textit{ avec } \langle \mu, \varphi \rangle = 0 \\ \textit{dès que le support de } \varphi \textit{ est inclus dans }]a,b[\end{array} \right\}.$$

Voici plusieurs exemples qui montrent que les mesures sont des objets plus généraux que les fonctions continues.

Exemple 11.

1. *La mesure de Lebesgue a pour support $\mathbb{R}^d$ tout entier.*
2. *La mesure de Dirac en $x \in \mathbb{R}$ est définie par*

   $$\langle \delta_x, \varphi \rangle := \varphi(x).$$

   Cette application est bien linéaire et continue car l'inégalité

   $$|\langle \delta_x, \varphi \rangle| = |\varphi(x)| \leq ||\varphi||_{\infty,[a,b]}$$

   est vraie pour $[a,b]$ contenant le support de φ. Elle a été pensée au départ[2] *comme une fonction f nulle en dehors de x, valant $+\infty$ en x, et vérifiant $\int_{\mathbb{R}^d} \delta_x(t)dt = 1$. Le support de cette mesure est x.*
3. *Le peigne de Dirac est défini par*

   $$\langle \text{Ш}, \varphi \rangle = \langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k).$$

   Remarquons que c'est bien une mesure de Radon car si φ est à support dans $[a,b]$, on a

   $$|\langle \text{Ш}, \varphi \rangle| = \left| \sum_{k \in \mathbb{Z} \cap [a,b]} \varphi(k) \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z} \cap [a,b]} ||\varphi||_{\infty,[a,b]} = \operatorname{card}(\mathbb{Z} \cap [a,b]) \cdot ||\varphi||_{\infty,[a,b]}.$$

4. *Dans la théorie des séries de Fourier et en traitement du signal numérique, on utilise souvent des généralisations du peigne de Dirac données par des mesures de Radon de la forme suivante. Fixons un réel $T > 0$, appelé l'écart, et une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes. Le Peigne de Dirac homogène d'écart T et de poids la suite (a_n) est défini par*

   $$\langle \text{Ш}_{T,(a_n)}, \varphi \rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \delta_{Tn}.$$

   C'est bien une mesure de Radon, car si φ est à support dans $[a,b]$, on a

   $$|\langle \text{Ш}_{T,(a_n)}, \varphi \rangle| \leq \operatorname{card}(T\mathbb{Z} \cap [a,b]) \cdot (\max_{n \in \mathbb{Z},\, Tn \in [a,b]} |a_n|) \cdot ||\varphi||_{\infty,[a,b]},$$

   avec $T\mathbb{Z} = \{Tn,\ n \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des multiples entiers de l'écart.

2. Paul Dirac fut un des précurseurs de la théorie des distributions, inventeur de l'équation qui porte son nom pour le mouvement de l'électron, et découvreur de son anti-particule, le positron.

5. *Si $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ est un ensemble mesurable, la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ définit une mesure $[\mathbb{1}_A]$. Un exemple fameux est la fonction d'Heaviside sur $\mathbb{R}$, définie par*
$$H(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}.$$
Une des motivations pour la théorie des distributions est de donner un sens au "calcul symbolique", inventé notamment par Heaviside entre 1880 et 1887, qui dit que la dérivée de sa fonction H devrait être
$$H' = \delta_0,$$
et dont le but est de résoudre les équations différentielles en les transformant en des équations algébriques. Comme pour Dirac, pratiquement toutes les idées étaient disponibles assez tôt sur ce problème, mais il a fallu les travaux de nombreux mathématiciens (pour en citer quelques-uns, Leray parle de solution faible des équations des liquides en 1933, Sobolev donne avant Schwartz la définition des distributions usuelles en 1935, puis Schwartz introduit en 1940 la transformée de Fourier des distributions tempérées, et après Schwartz, Sato introduit une version des distributions utilisant l'analyse complexe en 1958).

Chapitre 3

Distributions

On a vu qu'une mesure sur $\mathbb{R}^d$ pouvait être interprétée comme une fonction généralisée, car les mesures contiennent les fonctions L^p pour tout $p \geq 1$ et plus généralement, les fonctions localement intégrables. Cependant, il n'est pas possible de donner un sens direct aux dérivées partielles d'une mesure μ, sans restreindre son argument $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ à l'espace des fonctions continues à support compact dont les dérivées partielles à tous les ordres sont continues. Nous allons maintenant regarder ce que ce dernier point signifie sur un exemple.

3.1 Le calcul symbolique et la dérivée de la fonction de Heaviside

Le but originel de la théorie des distributions était de trouver des espaces de fonctions généralisées permettant de donner un sens à des résultats de calcul symbolique comme l'égalité (la plus simple, choisie parmi d'autres), découverte par le physicien Heaviside

$$[H]' = \delta_0$$

avec $H = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[1, +\infty[$, et δ_0 la "fonction delta" (qu'on peut maintenant décrire comme une mesure).

Un problème, dans cette égalité, est que même si les termes de gauche et de droite comportent des mesures, on doit pouvoir appliquer l'opérateur de dérivation $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ à une mesure pour pouvoir lui donner sens. Si H était une fonction dérivable de dérivée continue, on aurait, par intégration par parties, une égalité de mesures (qu'on vérifie pour chaque fonction $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$, i.e., chaque fonction φ continuement dérivable à support compact sur $\mathbb{R}$)

$$\begin{array}{rcl} \langle [H'], \varphi \rangle & := & \int_{\mathbb{R}} H'(x)\varphi(x)dx \\ & = & [H(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)dx \\ & = & -\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)dx \\ & = & -\langle [H], \varphi' \rangle \end{array}$$

car le premier terme de la deuxième égalité est nul, puisque le support du produit $H(x)\varphi(x)$ est borné (car inclus dans le support de φ), donc ce produit est nul à l'infini. On peut utiliser la dernière égalité pour *définir* la dérivée $[H]'$ de la mesure

$[H]$ à partir de $[H]$ par

$$\langle [H]', \varphi \rangle := -\langle [H], \varphi' \rangle.$$

On remarque que cette nouvelle définition fonctionne pour une fonction localement intégrable H quelconque, donc en particulier pour la fonction de Heaviside qui nous intéresse dans ce paragraphe. Ceci n'est plus une mesure mais une forme linéaire

$$[H]' : C_c^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$$

sur l'espace vectoriel des fonctions continuement dérivables à support compact $C_c^1(\mathbb{R})$, car on utilise la dérivée de φ, qui n'est à priori pas définie si φ n'est qu'une fonction continue. Par le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

$$\int_a^b \varphi'(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

qui fait le lien entre calcul différentiel et intégral en dimension 1, on obtient

$$\begin{array}{rcl} \langle [H]', \varphi \rangle & = & -\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)dx \\ & = & -\int_0^\infty \varphi'(x)dx \\ & = & -[\varphi(x)]_0^\infty \\ & = & \varphi(0) \\ & = & \langle \delta_0, \varphi \rangle \end{array}$$

car φ s'annule à l'infini d'où finalement l'égalité recherchée

$$[H]' = \delta_0,$$

une fois choisie la définition convenable pour la dérivée d'une mesure.

3.2 Fonctions lisses et opérateurs différentiels linéaires

Voyons maintenant plus précisément quel est le lien entre la théorie des équations différentielles (ou aux dérivées partielles) et l'introduction de l'espace des distributions.

On va noter les opérateurs de dérivations (partielles) à l'ordre 1 d'une fonction $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ de d variables sous la forme :

$$\partial_{x_i} f := \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Si on dérive plusieurs fois, par rapport à des variables différentes, on obtient quelquechose noté

$$\partial^{\langle i \rangle} f := \partial_{x_{i_1}} \cdots \partial_{x_{i_p}} f$$

avec $i := \langle i_1, \ldots, i_p \rangle$ une liste (arrangement) de p indices choisis dans l'ensemble $\{1, \ldots, d\}$.

Définition 18. *Une fonction lisse sur $\mathbb{R}^d$ est une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ dont les dérivées partielles à tous les ordres sont continues.*

Théorème 13 (Lemme de Schwarz). *Si f est une fonction lisse, alors on a l'égalité*

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j} f = \partial_{x_j}\partial_{x_i} f$$

pour tout $1 \leq i, j \leq n$, i.e., l'ordre d'application des dérivations partielles ne compte pas (on dit que les opérateurs de dérivation commutent).

Le lemme de Schwarz implique, par récurrence, que les dérivées partielles supérieures $\partial^{\langle i\rangle} f$ ne dépendent pas de l'ordre des éléments de la liste des indices de dérivation $i := \langle i_1, \ldots, i_p\rangle$. Ceci revient à dire que ces opérateurs peuvent être indexés par des familles $p = (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{N}^d$ d'entiers qui donnent l'ordre de dérivation en chacune des variables. On les notera donc

$$f^{(p)} \equiv \partial^{[p]} f := \partial_{x_1}^{p_1} \cdots \partial_{x_n}^{p_d} f$$

où par convention $\partial_{x_i}^0$ ne change rien (application identité de l'espace vectoriel des fonctions).

Pour $p = (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{N}^d$ un multi-indice de dérivation partielle, on notera $|p| = p_1 + \cdots + p_d$ et $p! = p_1! \cdots p_d!$.

Définition 19. *Un opérateur différentiel sur $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ est une combinaison linéaire (somme finie)*

$$\begin{array}{rcl} P(x,\partial) = \sum_{|p|\leq N} a_p(x)\partial^{[p]} : \quad C^\infty(\mathbb{R}^d) & \to & C^\infty(\mathbb{R}^d) \\ f(x) & \mapsto & \sum_{|p|\leq N} a_p(x)\partial^{[p]} f(x) \end{array}$$

d'opérateurs de dérivation partielle avec $a_p(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. On note $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ l'algèbre [1] *des opérateurs différentiels.*

Les opérateurs différentiels peuvent être considérés comme des matrices carrées de dimension infinie, car ce sont des endomorphismes linéaires de l'espace vectoriel $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, qui n'est pas de dimension finie [2].

Si $P(x,\partial) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est un opérateur différentiel, l'équation aux dérivées partielles linéaire associée (calcul de son noyau) est donnée par

$$P(x,\partial)f = 0,$$

et l'équation affine (avec second membre) correspondante est donnée, si g est une fonction (ou une "fonction généralisée") fixée, par

$$P(x,\partial)f = g.$$

Il est aussi naturel de se poser la question de la diagonalisation des opérateurs. On peut ainsi leur associer l'équation de diagonalisation

$$P(x,\partial)f(x) = \lambda(x)f(x)$$

pour $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Lorsque les valeurs propres $\lambda(x)$ sont constantes, cette équation s'appelle l'équation aux valeurs propres et leur ensemble est appelé le spectre.

1. La structure d'algèbre (addition, multiplication par un scalaire, loi de composition) vient de l'inclusion $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(C^\infty(\mathbb{R}^d))$ dans les endomorphismes de l'espace vectoriel des fonctions lisses.

2. En effet, l'espace des polynômes $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d]$ est inclus dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ est a pour base les monomes $x^{[p]} = x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_d}$.

Exemple 12. *Voici une liste d'opérateurs différentiels à coefficients constants en petite dimension :*

1. *L'opérateur Laplacien*
$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$
joue un rôle important dans de nombreux domaines de la physique. Son équation aux valeurs propres
$$\Delta f = \lambda f$$
donne par exemple de l'information sur la forme d'un tambour à partir des sons qu'il produit.
2. *L'opérateur de la chaleur, dont l'étude à motivé Fourier pour définir la transformée qui porte son nom est l'opérateur*
$$C = \partial_t - \Delta.$$
L'équation correspondante décrit la propagation de la chaleur dans un objet homogène (e.g., bloc métallique).
3. *L'opérateur des ondes (appelé aussi d'Alembertien), permet de décrire le comportement ondulatoire de la lumière, et est donné par*
$$\Box = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta$$
avec c la vitesse de la lumière dans le vide.

Voir les opérateurs différentiels comme des matrices peut parfois nous réserver quelques surprises, lors de la diagonalisation, comme on va le voir dans l'exemple qui suit.

Exemple 13. *L'opérateur ∂_x sur $C^\infty(\mathbb{R})$ a pour "fonctions propres" les fonctions exponentielles $e^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ car*
$$\partial_x e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}.$$
On dit que le spectre (espace des valeurs propres) de cet opérateur est continu, et s'identifie à l'ensemble $\mathbb{C}$ de tous les nombres complexes. C'est ce résultat de diagonalisation de l'opérateur ∂_x qui sous-tend l'introduction de la transformée de Fourier dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Dans le cas des fonctions 1-périodiques sur $\mathbb{R}$, i.e., vérifiant $f(x+1) = f(x)$, on obtiendra un spectre discret $2i\pi\mathbb{Z}$ donné par
$$\partial_x e^{2i\pi n x} = (2i\pi n)e^{2i\pi n x}$$
avec $n \in \mathbb{Z}$. C'est cette décomposition spectrale discrète qui sous-tend l'introduction des séries de Fourier dans l'analyse des fonctions périodiques.

Exemple 14. *L'exemple le plus simple d'opérateur différentiel à coefficient non constant est donné par l'opérateur*
$$P(x,\partial) := a_0(x)$$

de multiplication par la fonction $a_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Il est “diagonal”, car son équation de diagonalisation

$$P(x, \partial) f(x) = a_0(x) f(x) = \lambda(x) f(x)$$

est vérifiée par $\lambda(x) = a_0(x)$. Un des buts de la théorie de Fourier est de diagonaliser les opérateurs différentiels à coefficients constants $P(\partial) = \sum a_p \partial^{[p]}$, en les remplaçant (à peu de choses près) par la multiplication par le polynôme correspondant $P(x) = \sum a_p x^{[p]}$, qu'on appelle leur symbole total.

Proposition 2. *Pour faire agir l'algèbre $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ sur un espace de fonctions (généralisées), il suffit de se donner l'action de la multiplication par les fonctions lisses $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et une action* compatible *des dérivations partielles ∂_{x_i}, au sens où l'on doit avoir la formule de Leibniz*

$$\partial_{x_i}(f \cdot T) = f \cdot \partial_{x_i} T + \partial_{x_i} f \cdot T.$$

Une formulation possible du problème qu'on résoud en construisant les espaces de distributions est la suivante : on veut donner un sens à une classe de fonctions généralisées contenant l'espace $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions lisses, mais aussi l'espace $C^{-0}(\mathbb{R}^d)$ les mesures, et muni d'une action de l'algèbre des opérateurs différentiels $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ compatible à cette inclusion. Par la proposition ci-dessus, ceci revient à se donner une action des fonctions lisses et une action des dérivations partielles, les deux actions étant compatibles (formule de Leibniz).

3.3 Espaces de fonctions tests

Définition 20. *Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est dite lisse si toutes ses dérivées partielles sont continues. On note $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions lisses sur $\mathbb{R}^d$ et $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions lisses à support compact, aussi appelées fonctions test*[3].

Les espaces $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ sont munis de la famille (non dénombrable) de seminormes

$$p_{N,[a,b]}(\varphi) = \sum_{|m|\leq N} \|\varphi^{(m)}\|_{\infty,[a,b]} = \sum_{|m|\leq N} \sup_{x\in[a,b]} |\varphi^{(m)}(x)|$$

indexée par les entiers $N \geq 0$ et les intervalles compacts de $\mathbb{R}^d$. On peut penser à $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ comme à une réunion

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = \bigcup_{[a,b]} C_{[a,b]}^\infty(\mathbb{R}^d) \subset C^\infty(\mathbb{R}^d)$$

des espaces $C_{[a,b]}^\infty(\mathbb{R}^d)$ de fonctions lisses à support dans un intervalle compact, indexée par l'ensemble de tous les intervalles de $\mathbb{R}^d$, chacun des ses espaces étant muni de la famille de seminormes $p_{N,[a,b]}$ indexée par les entiers $N \in \mathbb{N}$.

Il n'est pas totalement évident que l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, c'est à dire qu'il existe des fonctions lisses à support compact non trivial, même si $n = 1$.

3. Dans les écrits originaux de Schwartz, l'espace $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ est noté $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ et l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est noté $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Pour éviter la confusion avec l'algèbre $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ des opérateurs différentiels, on évite d'utiliser ce système de notation.

Exemple 15. *Un exemple de fonction dans l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est construit de la manière suivante : on commence par montrer par récurrence que la fonction f définie par $f(t) = e^{1-\frac{1}{t}}$ si $t > 0$ et 0 pour $t \leq 0$ est lisse. Pour $m \geq 0$, on a $f^{(m)}(t) = 0$ si $t < 0$ et*

$$f^{(m)} = P_m(-1/t)e^{1-\frac{1}{t}}$$

avec P_m des polynômes si $t > 0$. Ceci implique la continuité de $f^{(m)}$ sur $\mathbb{R}$, donc f est lisse. Remarquons au passage que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et que sa valeur en 1 est 1. Ensuite, on pose

$$\varphi(x) = f(1 - x^2)$$

avec $x^2 := x \cdot x$ où $\cdot$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$. Cette fonction φ est clairement lisse et a pour support la boule euclidienne $B(0, 1)$ de $\mathbb{R}^d$. De plus, elle est positive et strictement inférieure à 1 sur $B(0, 1) - \{0\}$ et vaut 1 en 0. On peut normaliser cette fonction de manière à ce que son intégrale vaille 1 sur $\mathbb{R}^d$ en posant

$$\psi(x) := \frac{\varphi(x)}{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx}.$$

On peut montrer que la mesure de Dirac δ_0 est la limite (faire un dessin) de la suite de fonctions lisses ψ_k, vérifiant $\int_{\mathbb{R}^d} \psi_k(x)dx = 1$, et à supports respectifs dans les boules euclidiennes $B(0, \frac{1}{k})$, définie par

$$\psi_k(x) := \frac{\varphi(x/k)}{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x/k)dx}.$$

En fait, il y a beaucoup de fonctions dans cet espace, et notamment des analogues des fonctions "plateau" continues considérées dans la section précédente existent dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Lemme 1. *(fonctions plateau lisses) Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}^d$ et $\epsilon > 0$. Il existe une fonction $\varphi_{[a,b],\epsilon}$ dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, qu'on appelera fonction plateau pour $[a, b]$ de largeur ϵ, qui a les propriétés suivantes (dessin) :*

1. *elle vaut 1 sur $[a, b]$ et 0 en dehors de*

$$]a, b[_\epsilon =]a, b[+ \epsilon \cdot [-1, 1]^d = \{x + \lambda\epsilon, x \in]a, b[,\ \epsilon \in [-1, 1]^d\}.$$

2. *ses valeurs sur $]a, b[_\epsilon \backslash [a, b]$ sont dans $]0, 1[$ et elle y est strictement croissante* [4] *vers $[a, b]$ (pour $n > 1$, on parcourt les segments allant vers les points de $[a, b]$).*
3. *son support est $[a, b]_\epsilon$.*

Démonstration. Commençons par supposer que $n = 1$. La fonction f décrite dans l'exemple 15 ci-dessus est lisse, strictement croissante sur $[0, 1]$ et sa valeur en 1 est

4. On peut visualiser le graphe d'une telle fonction en dimension $n = 2$ comme une nappe en soie très légère qu'on a jeté sur une table rectangulaire, et qui repose sur le sol à distance ϵ du bas de la table de la manière la plus simple possible.

1. Ceci implique que la fonction $g(t) = e^{-\frac{1}{t}f(1-t)}$ est lisse, strictement croissante, et de valeur 0 en 0 et 1 en 1. Sa dérivée sur $]0,1[$ est donnée par

$$g'(t) = \left(\frac{1}{t^2}f(t-1) - \frac{1}{t}f'(1-t)\right)g(t).$$

Elle tend donc vers 0 en 0 et 0 en 1. On montre plus généralement par récurrence que pour $m > 0$,

$$g^{(m)}(t) = Q_m\left(\frac{1}{t}, f(1-t), \dots, f^{(m)}(1-t)\right)g(t),$$

avec $Q_m(t,,x_0,\dots,x_m)$ une fonction polynomiale dont tous les monomes sont de degré strictement positif en au moins une des variables x_i. Comme toutes les dérivée de f tendent vers 0 en 0, et que $g(t)$ tend vers 0 en 0, cette expression tend vers 0 en 0. Elle tend aussi vers 0 en 1 dès que $m \geq 1$ à cause de la propriété du polynôme Q_m donnée ci-dessus. On peut donc prolonger la fonction g en une fonction lisse sur $\mathbb{R}$, toujours notée g, en posant $g(t) = 0$ si $t \leq 0$ et $g(t) = 1$ si $t \geq 1$. Elle est positive et strictement croissante sur $[0,1]$ (faire un dessin). La fonction $h_\epsilon(t) = g(\frac{t}{\epsilon})$ s'annule pour $t \leq 0$ et vaut 1 pour $t \geq \epsilon$. La fonction $k_\epsilon(t) = h(t+\epsilon+1)$ vaut 1 pour $t \geq -1$ et 0 pour $t \leq -\epsilon - 1$. La fonction $l_\epsilon(t) = h_\epsilon(-t+\epsilon+1)$ vaut 1 pour $t \leq 1$ et 0 pour $t \geq \epsilon+1$. Le produit $\varphi_{[-1,1,\epsilon]}(t) := k_\epsilon(t)\cdot l_\epsilon(t)$ est une fonction lisse valant 1 sur $[-1,1]$ et 0 en dehors de $[-1-\epsilon, 1+\epsilon]$. En utilisant des translations et homothéties sur les arguments des fonctions utilisées pour construire $\varphi_{[-1,1],\epsilon}$, on construit facilement une fonction $\varphi_{[a,b],\epsilon}$ comme souhaitée pour tout intervalle compact de $\mathbb{R}$. Si $[a,b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}^d$, il suffit de prendre le produit des fonctions associées aux intervalles de $\mathbb{R}$ dont $[a,b]$ est le produit pour construire $\varphi_{[a,b],\epsilon}$. La condition sur les valeurs de $\varphi_{[a,b],\epsilon}$ sur $[a,b]_\epsilon \backslash [a,b]$ vient du fait que la fonction f est strictement croissante sur $[0,1]$ donc de valeurs comprises entre 0 et 1 sur cet intervalle. □

Lemme 2. *L'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est stable par dérivation, produit et convolution. La convolution induit une application (on dit qu'elle régularise les fonctions localement intégrables)*

$$* : C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \times L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \to C^\infty(\mathbb{R}^d)$$

qui se restreint en une application

$$* : C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \to C_c^\infty(\mathbb{R}^d),$$

et le produit induit une application

$$\cdot : C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \times C^\infty(\mathbb{R}^d) \to C_c^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Toute fonction de $C_c^\infty(\mathbb{R}^{p+q})$ à support dans $[a,b]\times[c,d]$ peut s'écrire comme une limite de combinaisons linéaires de fonctions (appelées "tenseurs élémentaires") de la forme $(f\otimes g)(x) := f(x)\cdot g(y)$ avec $f \in C^\infty_{[a,b]}(\mathbb{R}^p)$ et $g \in C^\infty_{[c,d]}(\mathbb{R}^q)$.

Démonstration. La stabilité par produit se démontre par récurrence sur le degré de dérivation, et découle du fait que le support du produit de deux fonctions est inclus dans l'intersection des deux supports. Si f et g sont continues à support compact, alors la convolution $f * g$ l'est aussi car son support est borné, puisqu'il vérifie

$$\mathrm{supp}(f*g) \subset \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g) = \{a+b,\ a \in \mathrm{supp}(f),\ b \in \mathrm{supp}(g)\}.$$

En effet, si $x \notin \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)$, pour chaque $y \in \mathrm{supp}(g)$, on a $x - y \notin \mathrm{supp}(f)$, car sinon, $x = (x - y) + y \in \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)$. Ainsi, $f * g(x) = 0$, ce qui démontre l'inclusion $\mathrm{supp}(f * g) \subset \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)$. La stabilité par convolution vient du théorème de dérivation dominée sous l'intégrale pour les fonctions C^∞ sur un compact qui montre que

$$(f * g)^{(m)} = f^{(m)} * g.$$

Cette même formule montre que la convolution régularise les fonctions localement intégrable, car on a pour toute paire de fonctions (f, g) avec g lisse à support compact dans un intervalle $[c, d]$ et f localement intégrable, l'estimation

$$\|f * g\|_{\infty,[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} \int_{\mathbb{R}} |f(y)g(x - y)|dy \leq \|g\|_{\infty,[c,d]} \cdot \|f\|_{1,[a,b]+[c,d]},$$

et plus généralement

$$\|(f * g)^{(m)}\|_{\infty,[a,b]} = \|f * g^{(m)}\|_{\infty,[a,b]} \leq \|g^{(m)}\|_{\infty,[c,d]} \cdot \|f\|_{1,[a,b]+[c,d]}.$$

L'approximation par des sommes de tenseurs élémentaires se démontre en utilisant les séries de Fourier (voir [6], 3.4.4). □

3.4 Définition des distributions

Rappelons que les espaces $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ sont munis de la famille (non dénombrable) de seminormes

$$p_{N,[a,b]}(\varphi) = \sum_{|m|\leq N} \|\varphi^{(m)}\|_{\infty,[a,b]} = \sum_{|m|\leq N} \sup_{x\in[a,b]} |\varphi^{(m)}(x)|$$

indexée par les entiers $N \geq 0$ et les intervalles compacts de $\mathbb{R}^d$.

Les espaces de distributions, de distributions à support compact, et de mesures, sont des duaux continus des (i.e., des espaces de formes linéaires continues sur les) espaces de fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ respectivement. On va maintenant en donner une description concrète, en termes des seminormes naturelles sur ces espaces.

Si on note $C^\infty_{[a,b]}(\mathbb{R}^d)$ les fonctions lisses à support inclus dans un intervalle $[a, b]$, on doit penser à l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ comme à l'union

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = \bigcup_{[a,b]} C^\infty_{[a,b]}(\mathbb{R}^d) \subset C^\infty(\mathbb{R}^d)$$

des espaces $C^\infty_{[a,b]}(\mathbb{R}^d)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (chacun d'eux étant muni de la famille dénombrable de seminormes $p_{N,[a,b]}$ indexée par $N \in \mathbb{N}$) quand $[a, b]$ parcourt les intervalles de $\mathbb{R}^d$. Par contre, l'espace $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ est muni de toutes les seminormes $p_{N,[a,b]}$ en même temps (ceci revient en fait à le munir seulement de la famille dénombrable des p_{N,I_k} avec $I_k = [-k, k]^d$ et $k \in \mathbb{N}_{>0}$). Ceci permet d'expliquer les notions de continuité utilisées dans la définition qui suit.

Définition 21. *Une distribution est une fonctionnelle linéaire continue*

$$T : C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C},$$

i.e., une application vérifiant les deux conditions suivantes :

1. *(linéarité)* $\langle T, a\varphi+b\psi\rangle = a\langle T,\varphi\rangle+b\langle T,\psi\rangle$ *pour tous* $a,b\in\mathbb{C}$, $\varphi,\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.
2. *(continuité) Pour tout intervalle compact* $[a,b]\subset\mathbb{R}^d$, *il existe une constante* $C_{[a,b]}\geq 0$ *et un entier* $N_{[a,b]}$, *appelé ordre (de régularité) de* T *sur* $[a,b]$, *tel que*
$$|\langle T,\varphi\rangle| \leq C_{[a,b]}\cdot p_{[a,b],N_{[a,b]}}(\varphi) = C_{[a,b]}\cdot\sum_{|m|\leq N_{[a,b]}}\|\varphi^{(m)}\|_{\infty,[a,b]}.$$
dès que φ *a un support inclus dans* $[a,b]$.

Une distribution à support compact est une fonctionnelle linéaire continue
$$T: C^\infty(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{C},$$
i.e., une application vérifiant les deux conditions suivantes :

1. *(linéarité)* $\langle T, a\varphi+b\psi\rangle = a\langle T,\varphi\rangle+b\langle T,\psi\rangle$ *pour tous* $a,b\in\mathbb{C}$, $\varphi,\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.
2. *(continuité) Il existe une constante* $C\geq 0$, *un entier* N, *appelé ordre (de régularité) de* T, *et un intervalle* $[a,b]$ *tels que*
$$|T(\varphi)| \leq C\cdot p_{[a,b],N}(\varphi) = C\cdot\sum_{|m|\leq N}\|\varphi^{(m)}\|_{\infty,[a,b]}$$
pour tout $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

On note $C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)\equiv C_c^\infty(\mathbb{R}^d)'$ *l'espace des distributions et* $C_c^{-\infty}(\mathbb{R}^d)\equiv C^\infty(\mathbb{R}^d)'$ *celui des distributions à support compact. On notera aussi parfois la valeur de* T *en* φ *par* $T(\varphi)\equiv\langle T,\varphi\rangle$.

Il est clair sur la définition qu'une mesure induit, par restriction à $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)\subset C_c^0(\mathbb{R}^d)$, une distribution d'ordre 0 sur tout intervalle, i.e., qu'on a une application
$$C^{-0}(\mathbb{R}^d)\to C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$$
de l'espace des mesures dans l'espace des distributions.

Exemple 16. *La mesure de Dirac en* $x\in\mathbb{R}^d$ *est définie par*
$$\langle\delta_x,\varphi\rangle\equiv\delta_x(\varphi)=\varphi(x).$$
C'est une distribution d'ordre 0 *et de support compact (réduit à* $\{0\}$*) et le peigne de Dirac*
$$Ш = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\delta_k$$
est une distributions d'ordre 0 *et de support discret mais non compact* $\mathbb{Z}^d$. *Ceci découle de la majoration*
$$|\langle Ш,\varphi\rangle| \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}^d\cap[a,b]}|\varphi(m)| \leq \mathrm{card}\{\mathbb{Z}^d\cap[a,b]\}\cdot\|\varphi\|_{\infty,[a,b]}$$
pour φ *à support dans* $[a,b]$.

Exemple 17. *La dérivée de la mesure de Dirac, définie explicitement par la formule*

$$\langle \delta'_x, \varphi \rangle := -\varphi'(x)$$

est une distribution d'ordre 1 *car on a*

$$|\langle \delta'_x, \varphi \rangle| \leq \|\varphi'\|_{[a,b],\infty} \leq \|\varphi\|_{[a,b],\infty} + \|\varphi'\|_{[a,b],\infty}$$

pour φ *à support dans* $[a, b]$.

Les entiers N et $N_{[a,b]}$ qui apparaissent dans les définitions ci-dessus s'appelent "ordres de régularité" car ils correspondent en un certain sens au degré de régularité des distributions, comme on peut le voir dans le lemme suivant.

Lemme 3. *Si* $f \in C^N(\mathbb{R})$ *est une fonction* N *fois continuement différentiable pour* $N \geq 0$*, la mesure associée*

$$\langle [f], \varphi \rangle \equiv [f](\varphi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx$$

est une distribution d'ordre N *sur tout intervalle* $[a, b]$*. Si* f *est de plus à support compact,* $[f]$ *est dans* $C_c^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ *et d'ordre* N.

Démonstration. La première partie de l'énoncé se démontre en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, qui est vraie sur de petits intervalles autour de tous points, qu'on peut choisir en nombre fini pour recouvrir un intervalle compact $[a, b]$, ce qui permet de borner $|\langle [f], \varphi \rangle|$ par une expression de la forme $C_{[a,b]} \cdot \sum_{|m| \leq N} \|\varphi^{(m)}\|_{\infty,[a,b]}$ quand le support de φ est contenu dans $[a, b]$. Si de plus f est à support compact, on peut fixer un intervalle $[a, b]$ contenant son support, et la majoration précédente montre que $[f]$ est une distribution à support compact d'ordre N. □

Proposition 3. *Les inclusions* $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *et* $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset C_c^0(\mathbb{R}^d)$ *induisent des inclusions*

$$C^{-0}(\mathbb{R}^d) \subset C^{-\infty}(\mathbb{R}^d) \text{ et } C_c^{-\infty}(\mathbb{R}^d) \subset C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$$

des mesures et des distributions à support compact dans les distributions. L'image de l'inclusion $C^{-0}(\mathbb{R}^d) \subset C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ *des mesures dans les distributions est donnée par les distributions qui sont d'ordre* 0 *sur tout intervalle. L'image de l'inclusion* $C_c^{-\infty}(\mathbb{R}^d) \subset C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ *est donnée par les distributions* T *dont le support, défini par*

$$\mathrm{supp}(T) := \left\{ x \in \mathbb{R}^d, \quad \begin{array}{l} \textit{il n'existe pas d'intervalle ouvert }]a, b[\textit{ contenant } x \textit{ tel que} \\ \textit{si } \varphi \textit{ est à support inclus dans }]a, b[, \ \langle T, \varphi \rangle = 0. \end{array} \right\},$$

est compact.

Démonstration. Il est clair, si on regarde les définitions, qu'une mesure μ induit une distribution par restriction à $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, qui est d'ordre 0 sur tout intervalle $[a, b]$. De même, on voit sur les définitions qu'une distribution T à support compact induit, par restriction à $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, une distribution. L'injectivité des applications obtenues est dûe au fait, qu'on peut démontrer, en utilisant, d'une part des convolutions par les fonctions (ψ_k) de l'exemple 15 (qui approchent la mesure de Dirac en 0), et d'autre part le produit par les fonctions plateau lisses $\varphi_{[-k,k]^d,2^k}$ du lemme 1, que tout élément de $C^0_c(\mathbb{R}^d)$ (resp. $C^\infty(\mathbb{R}^d)$) est une limite d'un élément de $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$. Ceci implique aussi que l'image de $C^{-0}(\mathbb{R}^d) \subset C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ est donnée exactement par les distributions d'ordre 0. Une distribution T dans $C^{-\infty}_c(\mathbb{R}^d) \subset C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ est à support compact inclus dans l'intervalle $[a,b]$ donné par la définition de la continuité de T, car si φ est à support dans le complémentaire de $[a,b]$, l'inégalité correspondante implique que $T(\varphi) = 0$. Réciproquement, une distribution T dans $C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ dont le support est compact inclus dans $[a,b]$, peut être évaluée sur une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ de la manière suivant : on considère une fonction plateau lisse $\varphi_{[a,b],\epsilon}$ sur l'intervalle $[a,b]_\epsilon$ construite dans le lemme 1, avec ϵ petit, et on écrit

$$\langle \tilde{T}, \varphi\rangle := \langle T, \varphi_{[a,b],\epsilon} \cdot \varphi\rangle.$$

Ceci définit bien un élément $\tilde{T}$ de $C^{-\infty}_c(\mathbb{R}^d)$ car T est dans $C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$, et l'image de $\tilde{T}$ dans $C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ est T car

$$T = (1 - \varphi_{[a,b],\epsilon}) \cdot T + \varphi_{[a,b],\epsilon} \cdot T = 0 + T$$

puisque T est à support dans $[a,b]$. □

Exemple 18. 1. *Le support de la distribution δ_x, pour $x \in \mathbb{R}^d$, est donné par le singleton $\{x\}$. En effet, si le support d'une fonction φ est inclus dans $\mathbb{R}^d - \{x\}$, on a*

$$\langle \delta_x, \varphi\rangle = \varphi(x) = 0,$$

et pour tout intervalle ouvert contenant x, il existe une fonction test dont le support est inclus dans cet intervalle et qui est non nulle en x.

2. *De même, le support de la distribution δ'_x sur $\mathbb{R}$ est restreint à $\{x\}$.*

3. *Le support de la distribution $[\mathbb{1}_{[a,b]}]$ associée à l'indicatrice d'un intervalle compact $[a,b]$ est donné par l'intervalle lui-même.*

Définition 22. *Une distribution de la forme*

$$\langle [f], \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx$$

avec $f \in L^1_{loc}$ est appelée une distribution de type fonction.

Proposition 4. *L'application $f \mapsto [f]$ induit une inclusion*

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^{-\infty}(\mathbb{R}^d).$$

Démonstration. Comme l'application est linéaire, il suffit de montrer que son noyau est nul. Ceci revient à dire que si $[f]$ est une distribution de type fonction, alors $[f] = 0$ dans $C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ est équivalent à $f = 0$ dans L^1_{loc}. On peut en fait utiliser que $[f]$ est dans l'image de l'inclusion $C^{-0}(\mathbb{R}^d) \subset C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ des mesures dans les distributions, et que $[f] = 0$ implique $f = 0$. □

3.5 Opérations sur les distributions

Les opérations sur les distributions sont définies par prolongement des opérations usuelles sur les fonctions de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, de manière compatible à l'application $f \mapsto [f]$ qui envoie une fonction sur la distribution associée. Par exemple, si f' est la dérivée d'une fonction lisse (et même simplement C^1) sur $\mathbb{R}$, l'intégration par parties donne

$$\langle [f'], \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)dx = [f(x)\varphi'(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = -\langle [f], \varphi'\rangle.$$

De même, le produit d'une fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ par une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et on a trivialement

$$\langle [fg], \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\varphi(x)dx = \langle [f], g\cdot\varphi\rangle.$$

Le produit tensoriel $(f\otimes g)(x,y) := f(x)\cdot g(y)$ d'une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et d'une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ est dans $C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$, et le théorème de Fubini donne

$$\begin{array}{rcl} \langle [f\otimes g], \varphi\rangle & = & \int_{\mathbb{R}^{n+m}} (f\otimes g)(x,y)\varphi(x,y)dxdy \\ & \overset{\text{fubini}}{=} & \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \int_{\mathbb{R}^m} g(y)\varphi(x,y)dy\right)dx \\ & \overset{\text{definition}}{=} & \langle [f]_x, \langle [g]_y, \varphi(x,y)\rangle\rangle. \end{array}$$

En particulier, si $\varphi = \varphi_1\otimes\varphi_2$, on obtient

$$\langle [f\otimes g], \varphi_1\otimes\varphi_2\rangle = \langle [f], \varphi_1\rangle\cdot\langle [g], \varphi_2\rangle.$$

Enfin, la convolution d'une fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ par une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, et le théorème de Fubini et l'invariance par translation (changement de variable $[x-y\mapsto x,\ x\mapsto x+y]$) de l'intégrale de Riemann donnent

$$\begin{array}{rcl} \langle [f*g], \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x)\varphi(x)dx & \overset{\text{definition}}{=} & \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy\right)\varphi(x)dx \\ & \overset{\text{fubini}}{=} & \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\varphi(x)dx\right)dy \\ & \overset{\text{linéarité}}{=} & \int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}} g(x-y)\varphi(x)dx\right)dy \\ & \overset{\text{chgt de variables}}{=} & \int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x+y)dx\right)dy \\ & \overset{\text{fubini}}{=} & \int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)\varphi(x+y)dxdy \\ & \overset{\text{definition}}{=} & \int_{\mathbb{R}^2} (f\otimes g)(x,y)\varphi(x+y)dxdy \\ & = & \langle [f\otimes g], \varphi(x+y)\rangle \end{array}$$

Une généralisation directe des résultats des calculs ci-dessus aux distributions quelconques nous donne la définition suivante.

Définition 23. *Les opérations sur les distributions sont définies pour $S, T \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$, par*

1. *(combinaisons linéaires)*

$$\langle \lambda T + \mu S, \varphi\rangle := \lambda\cdot\langle T, \varphi\rangle + \mu\cdot\langle S, \varphi\rangle.$$

2. *(dérivation) Pour $m \in \mathbb{N}^d$, on a*

$$\langle \partial^{[m]} T, \varphi \rangle := (-1)^{|m|} \langle T, \partial^{[m]} \varphi \rangle.$$

3. *(multiplication) Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $T \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$, on note*

$$\langle f \cdot T, \varphi \rangle := \langle T, f \cdot \varphi \rangle.$$

   Plus généralement, si $T \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ et $S \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$, on note

$$\langle S \cdot T, \varphi \rangle := \langle T, \varphi \cdot S \rangle,$$

   si cela fait sens.

4. *(produit tensoriel) Le produit tensoriel de deux distributions $S \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ et $T \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^m)$ est la distribution $S \otimes T \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^{n+m})$ définie par*

$$\langle S \otimes T, \varphi \rangle := \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle T_y, \langle S_x, \varphi(x, y) \rangle \rangle.$$

   Il vaut en particulier

$$\langle S \otimes T, \varphi \otimes \psi \rangle := \langle S, \varphi \rangle \cdot \langle T, \psi \rangle$$

   sur les tenseurs simples.

5. *(convolution) Le produit de convolution de deux distributions $S \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ et $T \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ est défini par la formule*

$$\langle S * T, \varphi \rangle := \langle S \otimes T, \varphi(x + y) \rangle = \langle S, \varphi_T \rangle = \langle T, \varphi_S \rangle,$$

   avec $\varphi_T(x) := \langle T, \varphi(x + \cdot) \rangle$, si la formule fait sens (c'est le cas si le support de S ou T est compact).

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que les distributions fournissent une classe de "fonctions généralisées" munie d'une action naturelle des opérateurs différentiels.

Proposition 5. *Si $P(x, \partial) = \sum_{|p| \leq N} a_p(x) \partial^{[p]} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est un opérateur différentiel, et $T \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$, on peut lui associer une distribution $P(x, \partial)T$ par*

$$\langle P(x, \partial) T, \varphi \rangle := \left\langle T, \sum_{|p| \leq N} (-1)^{|p|} \partial^{[p]} (a_p(x) \varphi(x)) \right\rangle,$$

et ceci donne une action de l'algèbre $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ des opérateurs différentiels sur $C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ compatible à l'inclusion $C^\infty(\mathbb{R}^d) \subset C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Ceci découle du fait qu'une action des opérateurs différentiels est déterminée par une action des dérivations et une action compatible de la multiplication par les fonctions lisses, toutes deux définies ci-dessus. La compatibilité (formule de Leibniz) découle de la formule de Leibniz appliquée aux fonctions test. □

Exemple 19. *1. La dérivée de la mesure de Dirac δ_0 sur $\mathbb{R}$ est donnée par*

$$\langle \delta_0', \varphi \rangle = -\varphi'(0).$$

2. *La dérivée d'une distribution* $[f]$ *de type fonction, avec* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$*, est donnée par*
$$\langle [f]', \varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx.$$
Elle n'est pas toujours donnée par une distribution de type fonction. En effet, la dérivée de la fonction de Heaviside $H = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ *est donnée par la mesure de Dirac* δ_0 *car*
$$\langle [H]', \varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\varphi'(x)dx = \int_0^\infty \varphi'(x)dx = [\varphi(x)]_0^{+\infty} = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle.$$

Remarque 1. 1. *Le fait que la dérivée à l'ordre* p *d'une distribution* T *soit toujours une distribution découle des définitions : si elle est d'ordre* N *sur* $[a,b]$*, on voit que sa dérivée est d'ordre* $N + |p|$ *en écrivant les inégalités donnant la continuité de la forme linéaire* T*. En effet, si on a pour* φ *à support dans* $[a,b]$*,*
$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C_{[a,b]} \cdot \sum_{|k|\leq N} \|\varphi^{(k)}\|_{\infty,[a,b]},$$
alors
$$|\langle T^{(p)}, \varphi\rangle| = |\langle T, (-1)^{|p|}\varphi^{(p)}\rangle| \leq C_{[a,b]} \cdot \sum_{|k|\leq N} \|\varphi^{(k+p)}\|_{\infty,[a,b]} \leq C_{[a,b]} \cdot \sum_{|i|\leq N+|p|} \|\varphi^{(i)}\|_{\infty,[a,b]}.$$

2. *On ne peut pas multiplier deux distributions quelconques, mais le théorème de Fubini implique que la distribution associée au produit d'une fonction* L^p *par une fonction* L^q *(qui est dans* L^1 *quand* $1/p + 1/q = 1$*) est égale à la distribution produit définie ci-dessus. La définition est faite pour que cela fonctionne aussi pour les fonctions lisses.*

3. *On a*
$$\varphi\delta_0 = \varphi(0)\delta_0$$
pour tout $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$*. En particulier, ceci donne*
$$x\delta_0 = 0\delta_0 = 0.$$

4. *Le lemme 2 nous dit que toute fonction dans* $C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$ *est limite d'une suite de combinaisons linéaire de tenseurs simple, donc le produit tensoriel de deux distributions est uniquement défini par ses valeurs sur les tenseurs simples. On peut montrer assez facilement qu'il fait toujours sens.*

Lemme 4. *Le produit de convolution des distributions vérifie des propriétés similaires à celles du produit des nombres : il est linéaire en chaque argument, associatif et commutatif. De plus, il possède un élément neutre donné par* δ_0*, i.e., on a*
$$T * \delta_0 = \delta_0 * T = T$$
pour tout $T \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$*. De plus, il est compatible à la dérivation, au sens ou on a*
$$(S * T)^{(p)} = S^{(p)} * T = S * T^{(p)}$$
quand ces expressions ont un sens (en particulier si le support de S *ou* T *est compact).*

Démonstration. Les premières propriétés découlent des propriétés analogues pour la somme des nombres réels et pour le produit tensoriel, qui découlent des définitions. Si $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a $\varphi_{\delta_0}(x) := \langle \delta_0, \varphi(x + \cdot)\rangle = \varphi(x + 0) = \varphi(x)$, donc

$$\langle \delta_0 * T, \varphi\rangle = \langle T, \varphi_{\delta_0}(x)\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

□

On va maintenant voir comment calculer explicitement les dérivées distributions de fonctions C^m par morceaux.

Proposition 6. *(formule des sauts) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 sur $D = \mathbb{R} - \{x_1, \ldots, x_p\}$, de dérivée $f' \in L^1_{loc}$, et supposons que les limites*

$$f(x_i^+) := \lim_{t \to x_i^+} f(t) \text{ et } f(x_i^-) := \lim_{t \to x_i^-} f(t)$$

existent. Alors on a

$$[f]' = [f'] + \sum_{i=1}^{p} [f(x_i^+) - f(x_i^-)] \cdot \delta_{x_i}.$$

Plus généralement, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^m sur $D = \mathbb{R} - \{x_1, \ldots, x_p\}$ dont les dérivées $f^{(k)}$ sont dans L^1_{loc} pour $0 \leq k \leq m$, et supposons que les limites

$$f^{(k)}(x_i^+) := \lim_{t \to x_i^+} f^{(k)}(t) \text{ et } f^{(k)}(x_i^-) := \lim_{t \to x_i^-} f^{(k)}(t)$$

existent pour $0 \leq k \leq m$. Alors on a

$$[f]^{(m)} = [f^{(m)}] + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{p} [f^{(m-1-k)}(x_i^+) - f^{(m-1-k)}(x_i^-)] \cdot \delta_{x_i}^{(k)}.$$

Démonstration. On décompose $D = \mathbb{R} - \{x_1, \ldots, x_n\}$ en une réunion d'intervalles disjoints :

$$\mathbb{R} =]-\infty, x_1[\cup]x_1, x_2[\cup \cdots \cup]x_{n-1}, x_n[\cup]x_n, +\infty[.$$

En appliquant une intégration par parties sur chacun de ces intervalles, avec la convention $x_0 = -\infty$ et $x_{n+1} = +\infty$, on obtient

$$\begin{array}{rcl}
\langle [f]', \varphi\rangle & = & -\langle [f], \varphi'\rangle \\
& = & -\sum_{i=0}^{n+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi'(x)dx \\
& = & -\sum_{i=0}^{n+1} \left([f(x)\varphi(x)]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x)\varphi(x)dx \right) \\
& = & -\sum_{i=0}^{n+1} (f(x_{i+1}^+)\varphi(x_{i+1}) - f(x_i^-)\varphi(x_i)) + \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)dx \\
& = & \langle [f'], \varphi\rangle + \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^+) - f(x_i^-)] \cdot \langle \delta_{x_i}, \varphi\rangle
\end{array}$$

On a ainsi obtenu le premier résultat. Le deuxième s'obtient par récurrence simplement en dérivant $m - 1$ fois le premier. □

Exemple 20. *La fonction valeur absolue $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R} - \{0\}$, avec pour dérivée la fonction localement intégrable $f' = -\mathbb{1}_{]-\infty,0[} + \mathbb{1}_{]0,+\infty[}$ sur cet intervalle. La formule des sauts donne*

$$\begin{array}{rcl}
\langle [|x|]', \varphi\rangle & = & \langle [-\mathbb{1}_{]-\infty,0[} + \mathbb{1}_{]0,+\infty[}], \varphi\rangle + (0 - 0) \cdot \langle \delta_0, \varphi\rangle \\
& = & -\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx + \int_0^\infty \varphi(x)dx
\end{array}$$

La continuité de la fonction f permet d'annuler les multiples des distributions de Dirac dans la formule des sauts. Le même type de résultat est obtenu si on considère une fonction continue affine par morceaux.

Exemple 21. *La fonction* $\ln(|x|)$ *est* C^1 *sur* $\mathbb{R}-\{0\}$*, avec pour dérivée la fonction* $\frac{1}{x}$*. Elle est aussi localement intégrable : une intégration par parties montre que* $F(x) = x\ln(|x|)-x$ *en est une primitive, et cette fonction est prolongeable par continuité par* 0 *en* 0*. En utilisant ce prolongement, toujours noté* F*, on peut calculer l'intégrale de* $\ln(|x|)$ *sur tout intervalle borné en utilisant le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral. Ceci nous permet de définir la distribution* $[\ln|x|]$*, et on va noter*

$$\mathrm{vp}(1/x) := [\ln|x|]'$$

sa dérivée, appelée la valeur principale de $1/x$*. Pour la calculer explicitement, on aimerait faire une intégration par parties directe en effectuant le calcul*

$$\begin{array}{rcl} \langle[\ln|x|]',\varphi\rangle &=& -\langle[\ln|x|],\varphi'\rangle \\ &=& -\int_{\mathbb{R}}\ln|x|\varphi'(x)dx \\ &=& -[\ln|x|\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)}{x}dx \\ &=& \int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)}{x}dx \end{array}$$

mais le dernier terme ne fait pas sens car la fonction $1/x$ *n'est pas localement intégrable en* 0*. On doit donc faire une "troncation" en* 0 *et une série d'intégrations par parties pour décrire précisément la valeur principale de* $1/x$*. Pour* φ *à support compact, on a*

$$\begin{array}{rcl} \langle[\ln|x|]',\varphi\rangle &=& -\langle[\ln|x|],\varphi'\rangle \\ &=& -\int_{\mathbb{R}}(\ln|x|)\varphi'(x)dx \\ &=& -[F\varphi']_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}}F(x)\varphi''(x)dx \\ &=& 0 + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|\geq\epsilon}F(x)\varphi''(x)dx \end{array}$$

En réintégrant deux fois par parties dans l'autre sens, on trouve

$$\int_{|x|\geq\epsilon}F(x)\varphi''(x)dx = F(-\epsilon)\varphi'(-\epsilon)-F(\epsilon)\varphi(\epsilon)-f(-\epsilon)\varphi(-\epsilon)+f(\epsilon)\varphi(\epsilon)+\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

On montre que tout ceci sauf le dernier terme tend vers 0 *quand* ϵ *tend vers* 0 *en utilisant les développements limités de* φ *et* φ' *en* 0 *à l'ordre* 1*. La distribution* $\mathrm{vp}(1/x) = [\ln|x|]'$ *est donc donnée par la limite* [5]

$$\langle\mathrm{vp}(1/x),\varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx,$$

on a ainsi montré que $\ln(|x|)$ *définit une distribution et que sa dérivée est donnée par*

$$[\ln(|x|)]' = \mathrm{vp}(1/x).$$

Remarquons qu'on voit clairement sur la description explicite de $\mathrm{vp}(1/x) \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ *que c'est un inverse distributionnel de x, au sens où*

$$x\cdot\mathrm{vp}(x) = [1],$$

5. Une distribution T est dite limite d'une famille de distribution T_ϵ pour $\epsilon > 0$ tendant vers 0 si pour toute fonction test φ, on a $\lim_{\epsilon\to 0}\langle T_\epsilon,\varphi\rangle = \langle T,\varphi\rangle$.

car

$$\langle x \cdot \mathrm{vp}(x), \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{x \cdot \varphi(x)}{x} dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \langle [1], \varphi \rangle.$$

3.6 Solutions faibles des opérateurs différentiels linéaires

Définition 24. *Soit $P(x, \partial) = \sum_{|m| \leq N} a_m(x) \partial^{[m]} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ un opérateur différentiel avec $a_m \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Le polynôme*

$$P(x, \xi) = \sum_{|m| \leq N} a_m(x) \xi^{[m]}$$

en $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est appelé le symbole (total) de l'opérateur. Une solution faible de l'équation différentielle linéaire

$$P(x, \partial) f = 0$$

est une distribution $f \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ telle que $P(x, \partial) f = 0$, i.e., telle que pour toute fonction test φ, on ait

$$\langle P(x, \partial) f, \varphi \rangle = \left\langle f, \sum_{|m| \leq N} (-1)^{|m|} \partial^{[m]} (a_m(x) \varphi(x)) \right\rangle = 0.$$

Une solution faible de l'équation différentielle avec second membre $g \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ est une solution $f \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ de l'équation

$$P(x, \partial) f = g$$

Les physiciens ont pensé depuis longtemps (par exemple Heisenberg et Schrödinger en 1926, puis Green en 1928) aux opérateurs différentiels comme à des matrices dont les indices ne sont pas des entiers (i, j), mais des coordonnées (x, y). Ceci prend un sens mathématique précis dans le cadre de la théorie des distributions, si on voit un tel opérateur comme une application linéaire continue

$$\begin{array}{rccc} P = P(x, \partial) : & C^{-\infty}(\mathbb{R}^d) & \to & C^{-\infty}(\mathbb{R}^d) \\ & \varphi & \mapsto & P(x, \partial) \varphi \end{array}$$

Dans ce contexte, il est naturel (si on pense aux opérateurs comme à des matrices) de chercher un inverse à gauche $G : C^{-\infty}(\mathbb{R}^d) \to C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ tel que $PG(g) = g$. En effet, on peut alors résoudre l'équation avec second membre $g \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ en posant $f = G(g)$ car on a alors $Pf = PG(g) = g$. On se réfère à l'annexe B pour plus de détails sur ce point de vue qui permet de comprendre la notion de fonction de Green, i.e., de solution fondamentale pour une équation dont les coefficients ne sont pas constants. Dans le cas des coefficients constants, on sait définir en général un inverse à gauche $G : C_c^{-\infty}(\mathbb{R}^d) \to C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ seulement sur les distributions à support compact, et il est donné par la convolution par une distribution dans $C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$, qu'on appelle la solution fondamentale.

Définition 25. *Soit $P = P(\partial)$ un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^d$ à coefficients constants. Une solution fondamentale pour P est une distribution E dans $C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$P(\partial)E = \delta_0.$$

Remarque 2. *Les solutions fondamentales des équations différentielles, si elles existent, ne sont en général pas uniques, et on doit fixer des conditions supplémentaires, dites conditions aux limites, pour s'assurer de leur unicité. On verra dans la section 3.7 en quoi cela consiste précisément.*

Exemple 22.

1. *Une solution lisse $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ d'une équation différentielle en est aussi une solution faible. Par exemple, $f(x) = e^x$ est solution de l'équation $f' = f$ qui correspond à l'opérateur $P(\partial_x) = \partial_x - 1$.*
2. *La fonction de Heaviside $H = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ est solution fondamentale de l'opérateur ∂_x car on a l'équation $\partial_x[H] = \delta_0$.*
3. *La fonction $x \cdot H$ est solution faible de l'équation avec second membre $f' = [H]$. En effet, pour toute fonction test, une intégration part parties nous donne*
$$\begin{aligned}\langle [x\cdot H]', \varphi\rangle := -\langle [x\cdot H], \varphi'\rangle := -\langle [H], x\varphi'\rangle &:= -\int_0^\infty x\varphi'(x)dx\\ &= -[x\varphi(x)]_0^{+\infty} + \int_0^\infty \varphi(x)dx\\ &= \langle [H], \varphi\rangle\end{aligned}$$
On aurait aussi pu faire un calcul plus formel, en utilisant la formule de Leibniz pour la dérivée d'un produit, qui donne
$$\partial_x[x\cdot H] = (\partial_x x)\cdot[H] + x\cdot\partial_x[H] = [H] + x\delta_0 = [H].$$
4. *On déduit des deux exemples ci-dessus que xH est solution fondamentale de l'opérateur laplacien $\Delta = \partial_x^2$ sur $\mathbb{R}$ car on a l'équation*
$$\partial_x^2(xH) = \delta_0.$$
5. *On peut montrer (calcul élémentaire mais fastidieux) que la fonction localement intégrable*
$$E(t,x) = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)$$
(la notation $\|\cdot\|$ désigne ici la norme euclidienne) est une solution fondamentale de l'opérateur de la chaleur
$$C = \partial_t - \Delta \text{ avec } \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$
sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, i.e., qu'on a
$$C\cdot E = \delta_0.$$
6. *Une solution fondamentale du Laplacien Δ sur $\mathbb{R}^d$ est donnée par la fonction localement intégrable*
$$E(x) = \begin{cases} c_1|x| \text{ si } n = 1,\\ c_2\ln\|x\| \text{ si } n = 2,\\ c_n\frac{1}{\|x\|^{n-2}} \text{ si } n > 2\end{cases}$$
avec c_n une constante fixée par l'équation fondamentale $\Delta E = \delta_0$ (on a $c_1 = \frac{1}{2}$ et $c_2 = \frac{1}{2\pi}$).

7. *Une solution fondamentale de l'opérateur des ondes* $\square = \partial_t^2 - \partial_x^2$ *sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *peut être obtenue en factorisant cette opérateur en* $\square = (\partial_t + \partial_x) \cdot (\partial_t - \partial_x)$ *et par un changement de variable* $t - x \mapsto t$ *et* $t + x \mapsto x$*. Elle est donnée par la fonction localement intégrable*

$$E(t, x) = \frac{1}{2\pi} \frac{H(t - |x|)}{\sqrt{t^2 - x^2}}.$$

8. *Si* $d\sigma_t$ *est la mesure sur* $\mathbb{R}^d$ *de support la sphère* S_t^{n-1} *de centre* 0 *et de rayon* t*, qui permet de calculer la surface de la sphère (mesure uniforme, décrite explicitement en coordonnées sphériques), une solution fondamentale de l'opérateur des ondes* $\square = \partial_t^2 - \Delta$ *sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *est donnée par*

$$E(t, x) = \frac{H(t) d\sigma_t(x)}{4\pi t}.$$

L'intérêt de la notion de solution fondamentale réside dans le résultat suivant.

Proposition 7. *Soit* $P(\partial)$ *un opérateur différentiel à coefficients constants sur* $\mathbb{R}^d$ *et* E *une solution fondamentale de* $P(\partial)$*. Alors pour tout* $g \in C_c^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$*, la distribution* $f = E * g$ *est solution de l'équation*

$$P(\partial) f = g.$$

Démonstration. Ceci découle du fait que

$$(E * g)^{(m)} = E^{(m)} * g,$$

ce qui implique

$$P(\partial)[E * g] = [P(\partial)E] * g = \delta_0 * g = g.$$

$\square$

L'opérateur $P(\partial) : C^{-\infty}(\mathbb{R}^d) \to C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ admet pour inverse à gauche l'opérateur $G : C_c^{-\infty}(\mathbb{R}^d) \to C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ donné par la convolution $G(g) = E * g$ par une solution fondamentale E, i.e., la composition

$$P(\partial) G : C_c^{-\infty}(\mathbb{R}^d) \to C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$$

est l'inclusion canonique $C_c^{-\infty}(\mathbb{R}^d) \subset C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$.

3.7 Equations différentielles et problèmes bien posés

Le mathématicien Jacques Hadamard a introduit en 1902 la notion suivante.

Définition 26 (Problème bien posé)**.** *Un problème* (P) *formé d'une ou plusieurs équations* (E) *différentielles ou intégrales et de conditions additionnelles* (I) *(dites conditions aux bords, aux limites ou initiales, selon le contexte) est dit* bien posé *dans un espace de "fonctions"* $\mathcal{F}$ *s'il y admet une unique solution.*

En pratique, il est parfois utile de se poser séparément la question de l'existence et celle de l'unicité d'une solution à un problème donné, sauf si on est dans la situation du théorème suivant.

Théorème 14 (meta-théorème du point fixe)**.** *Dans un espace complet pour une famille de seminormes, tout problème qui peut se formuler comme un problème du point fixe contractant est bien posé.*

Le lemme suivant nous sera bien utile pour aborder les questions d'unicité de solutions à des problèmes dans des espaces de distributions.

Lemme 5. *Une distribution $T \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ est de dérivées nulles si et seulement si elle est constante, i.e., $T = [c]$ avec $c \in \mathbb{C}$. Plus généralement, une distribution $T \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ vérifie $T^{(m)} = 0$ pour $|m| = N$ si et seulement si il existe un polynôme $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ de degré N tel que*

$$T = [P].$$

Démonstration. Si $T = [c]$, on a

$$\langle [T]^{(m)}, \varphi\rangle = -\langle [T], \varphi^{(m)}\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} c\varphi^{(m)}(x)dx = 0.$$

Réciproquement, supposons qu'on a $T^{(m)} = 0$ pour $|m| = 1$. On démontre que $T = [c]$ avec c constante en deux étapes :

— Soit $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) = 0$ et notons

$$\Psi_i(x_1, \dots, x_n) := \int_{[-\infty, x_i]} \psi(x)dx_i$$

sa primitive en x_i qui s'annule en $-\infty$. Elle est dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ par le théorème de dérivation sous l'intégrale. On a alors

$$\langle T, \psi\rangle = -\langle T, \partial_{x_i}\Psi_i, \varphi\rangle = \langle \partial_{x_i}T, \Psi_i\rangle = 0$$

par l'hypothèse d'annulation des dérivée de T.

— Soit $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \theta(x)dx = 1$. On pose $c = \langle T, \theta\rangle$, et soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et posons

$$\psi := \varphi - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx\right)\theta.$$

On a par définition $\varphi(x) = \psi(x) + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx\right)\theta(x)$ donc

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi\rangle &= \langle T, \psi + \left(\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx\right)\theta\rangle \\ &= \langle T, \psi\rangle + \left(\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx\right)\langle T, \theta\rangle \\ &= 0 + \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} c\varphi(x)dx \\ &= \langle [c], \varphi\rangle. \end{aligned}$$

Ceci démontre que $T = [c]$. Supposons maintenant que $S^{(m)} = 0$ pour $|m| = N$ si et seulement si $S = [P]$ est un polynôme de degré $N - 1$. On se donne une distribution T telle que $T^{(m)} = 0$ pour $|m| = N+1$. Alors, pour $|m'| = N$, les dérivées de $T^{(m')}$ sont toutes nulles, donc $T^{(m')} = [c_{m'}]$ est constante. On note P_N le polynôme de degré N donné par[6]

$$P_N := \sum_{|m'|=N+1} \frac{c_{m'}}{m'!}x^{m'}.$$

6. Rappelons qu'enn dimension $n \geq 1$, pour $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^d$, on note $m! := m_1! \cdots m_n!$.

Toutes les dérivées de P_N à l'ordre m' avec $|m'| = N + 1$ sont nulles, et on a en plus

$$(T - [P_N])^{(m)} = 0$$

pour $|m| = N$ essentiellement par construction, donc par l'hypothèse de récurrence, on obtient que

$$T - [P_N] = [P]$$

est un polynôme de degré $N-1$ donc $T = [P+P_N]$ est un polynôme de degré N. □

Un premier exemple de problème bien posé dans lequel on peut donner une solution totalement explicite, basée sur l'utilisation de l'exponentielle des matrices, est donné par la proposition suivante.

Proposition 8 (Equations différentielles à valeurs vectorielles)**.** *Soit $b \in C^{-\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$ une distribution à valeurs dans $\mathbb{C}^m$, et $a : \mathbb{R} \to M_m(\mathbb{C})$ une fonction lisse à valeurs dans les matrices carrées, dont les valeurs commutent, i.e., qui vérifie*

$$a(x_1)a(x_2) = a(x_2)a(x_1)$$

pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (ceci est en particulier vrai si la matrice a est constante en x ou si $m = 1$). L'espace des solutions v dans $C^{-\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$ de l'équation différentielle

$$\partial_x v(x) - a(x)v(x) = 0$$

est de dimension m, et donné par les fonctions lisses

$$v(x) = e^{A(x)}v_0$$

avec $A(x) := \int_0^y a(y)dy$ la primitive de $a(x)$ nulle en 0 (en particulier $A(x) = xa$ si la matrice a est constante en x), et $v_0 \in \mathbb{C}^m$ arbitraire. Plus généralement, si la distribution $e^{-A(x)}b(x)$ a une primitive $c \in C^{-\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$, l'équation avec second membre

$$\partial_x v(x) - a(x)v(x) = b(x)$$

a une solution particulière explicite de la forme

$$v_0(x) = e^{A(x)}c(x),$$

et ses solutions arbitraires dans $C^{-\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$ sont de la forme

$$v(x) = e^{A(x)}[c(x) + v_0]$$

avec $v_0 \in \mathbb{C}^m$.

Démonstration. Rappelons que la fonction $A(x) := \int_0^y a(y)dy$ est l'unique primitive de la fonction $a(x)$ qui s'annule en 0 (ceci découle du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, et du fait qu'une fonction de dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ est constante). En particulier, si la fonction a est constante, on a $A(x) = xa$. L'hypothèse de commutation des valeurs de $a(x)$ implique la commutation des valeurs de $A(x)$. Multiplions l'équation

$$\partial_x v(x) - a(x)v(x) = b(x)$$

par la fonction partout non nulle $e^{-A(x)}$. On obtient

$$e^{-A(x)}\partial_x v(x) - e^{-A(x)}a(x)v(x) = e^{-A(x)}b(x).$$

Remarquons alors que le terme de gauche de cette équation s'identifie à la dérivée $\partial_x(e^{-A(x)}v(x))$ (on utilise ici que toutes les valeurs de a, et donc aussi celles de A, commutent). Ainsi, notre équation de départ se ramène à l'équation

$$\partial_x(e^{-A(x)}v(x)) = e^{-A(x)}b(x),$$

qui correspond à la recherche d'une primitive $c(x) = e^{-A(x)}v(x)$ de la distribution $e^{-A(x)}b(x)$, i.e., à une distribution vérifiant

$$\partial_x(c(x)) = e^{-A(x)}b(x).$$

Si on se donne une telle distribution c, on obtient une solution $v(x) = e^{A(x)}c(x)$ de l'équation avec second membre

$$\partial_x v(x) - a(x)v(x) = b(x).$$

Si $b = 0$, le lemme 5 (ou plus exactement sa version pour les distributions à valeurs vectorielles) permet de conclure que la distribution primitive c ci-dessus est en fait la distribution associée à une constante $v_0 \in \mathbb{C}^m$, puisqu'elle est de dérivée nulle. Les solutions distributionnelles de l'équation de départ sont donc toutes des fonctions lisses de la forme

$$v(x) = e^{A(x)}v_0,$$

avec $v_0 \in \mathbb{C}^m$ fixé. Si v_1 et v_2 sont deux solutions de l'équation générale avec second membre $b \in C^{-\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$, leur différence est solution de l'équation homogène, donc les solutions quelconques $v \in C^{-\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$ de l'équation avec second membre

$$\partial_x v(x) - a(x)v(x) = b(x)$$

sont toutes de la forme

$$v(x) = e^{A(x)}c(x) + e^{A(x)}v_0$$

avec $v_0 \in \mathbb{C}^m$ et $c(x)$ la primitive sus-citée. □

Remarque 3. 1. *L'énoncé ci-dessus implique en particulier que l'équation différentielle*

$$\partial_x v(x) - a(x)v(x) = b(x)$$

avec la condition initiale $v(0) = v_0 \in \mathbb{C}^m$ est un problème bien posé dans l'espace de fonctions $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$ quand le second membre b est une fonction lisse.

2. *La démonstration ci-dessus donne une explication conceptuelle à la méthode usuelle utilisée pour résoudre des équations du premier ordre à coefficients variables, appelée "méthode de variation de la constante".*

Corollaire 1. *Soit $(f_0, \ldots, f_{m-1}) \in \mathbb{C}^{m-1}$. Le problème de résoudre une équation différentielle linéaire*

$$P(\partial)f = a_m f^{(m)} + a_{m-1}f^{(m-1)} + \cdots + a_0 f = 0$$

avec $P(\partial) = \sum_{i=0}^{m} a_i \partial_x^i$ *un opérateur différentiel à coefficients constants* ($a_m = 1$) *sur* $\mathbb{R}$ *avec la condition initiale*

$$f^{(i)}(0) = f_i$$

est bien posé dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$*. De plus, la solution générale (de l'équation sans conditions initiales) s'écrit sous la forme*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^{r_i x}$$

où les nombres $r_i \in \mathbb{C}$ *désignent les zéros du* polynôme caractéristique $P(r) = \sum_{i=0}^{m} a_r r^i$*, si ces derniers sont distincts, et plus généralement sous la forme*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x) e^{r_i x}$$

avec

$$f_i(x) = c_{i,1} + c_{i,2}x + \cdots c_{i,k_i} x^{k_i - 1}$$

un polynôme arbitraire de degré strictement inférieur à l'ordre k_i *du zéro* r_i *de* $P(r)$*, i.e., au nombre entier maximal tel que* $(r - r_i)^{k_i}$ *divise* $P(r)$*.*

Démonstration. Si on pose $v(x) = (f^{(i)}(x))_{i=0,\ldots,m-1} \in \mathbb{R}^m$, l'équation $P(\partial)f = 0$ est équivalente à l'équation

$$\partial_x v(x) = av(x)$$

avec a la matrice constante

$$a = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{m-1} & \\ 0 & & & \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Le résultat d'existence et d'unicité de la solution découle donc de la proposition 8. Le reste du corollaire découle du fait que la matrice a a pour polynôme caractéristique le polynôme $P(r)$, ce qui permet de calculer explicitement son exponentielle. Une autre démonstration de cette deuxième partie peut aussi se faire en recherchant des solutions de la forme $f(x) = e^{rx}$, ce qui amène à factoriser le polynôme caractéristique sous la forme

$$P(r) = \prod_{i=1}^{k} (r - r_i)^{k_i}$$

avec les r_i tous distincts. Ceci permet de décomposer l'opérateur différentiel en un produit

$$P(\partial) = \prod_{i=1}^{k} (\partial_x - r_i)^{k_i}$$

d'opérateurs qui commutent entre eux de la forme $P_i(\partial) = (\partial_x - r_i)^{k_i}$, qu'on peut résoudre chacun séparément. Si on a une racine (multiple ou non) r_0 d'ordre $k_0 \geq 1$, la fonction $f_0(x) = e^{r_0 x}$ est toujours solution et les autres solutions sont de la forme $f(x) = c(x)e^{r_0 x}$ (méthode de variation de la constante) avec $c(x)$ une fonction lisse arbitraire. On montre que ceci implique que $c(x)$ est un polynôme d'ordre au plus $k_0 - 1$. □

Théorème 15. *Tout opérateur linéaire $P(\partial) = \sum_{i=0}^{m} a_i \partial_x^i$ non nul sur $\mathbb{R}$ à coefficients constants admet une solution fondamentale E.*

Démonstration. Il suffit de poser

$$E := \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) f_1(x)$$

avec $f_1(x)$ l'unique solution de $P(\partial)f_1 = 0$ vérifiant $f_1^{(m-1)}(0) = 1$ et $f_1^{(k)} = 0$ pour tout $k < m-1$. En effet, comme les limites à gauche de $f_1^{(k)}$ sont égales sauf pour $k = m-1$ ou leur différence vaut 1, la formule des sauts de la proposition 6 montre que

$$[E]^{(k)} = [E^{(k)}]$$

pour $k < m$ et $E^{(m)} = [E^{(m)}] + \delta_0$, ce qui permet de conclure que

$$P(\partial)[E] = [P(\partial)E] + \delta_0 = \delta_0.$$

□

Nous verrons dans la section 5 une autre méthode pour démontrer ce résultat en utilisant la transformée de Fourier, et dont l'approche générale a l'avantage de pouvoir se généraliser à la dimension $n \geq 1$, comme on le verra dans le théorème 20.

Exemple 23. *La fonction $f_1(x) \equiv 1$ est solution de l'équation $\partial_x f_1 = 0$ et vérifie $f_1^{(0)} = 1$. La solution fondamentale de ∂_x associée à f_1 par le théorème 15 est simplement la fonction de Heaviside*

$$E := \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) f_1(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) = H(x),$$

et on retrouve ainsi l'égalité

$$\partial_x[H] = \delta_0.$$

De même, la fonction $f_1(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ vérifie

$$\partial_x^n f_1 = 0,$$

$\partial_x^{n-1} f_1(0) = 1$, et $\partial_x^k f_1(0) = 0$ pour $k < n-1$, donc la fonction

$$E(x) := H(x) f_1(x)$$

est solution fondamentale de l'opérateur ∂_x^n. En particulier, on retrouve le fait que

$$E(x) := xH(x)$$

est solution fondamentale de l'opérateur ∂_x^2.

Corollaire 2. *Soit $P(\partial)$ un opérateur différentiel non nul à coefficients constants sur $\mathbb{R}$ et $g \in C_c^{-\infty}(\mathbb{R})$. Il existe une solution à l'équation*

$$P(\partial) f = g.$$

Démonstration. L'opérateur $P(\partial)$ admet une solution fondamentale, qui vérifie

$$P(\partial)E = \delta_0,$$

et est convolable par la distribution à support compact g. La distribution $f = E * g$ vérifie

$$P(\partial)f = (P(\partial)E) * g = \delta_0 * g = g.$$

□

Pour les équations linéaires à coefficients variables générales, on a un théorème plus général, qui montre que le problème avec conditions initiales est toujours bien posé, sans en donner une solution explicite.

Théorème 16. *(de Cauchy-Lipschitz) Soit $P(x, \partial) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x)\partial_x^k$ un opérateur différentiel d'ordre m, vérifiant $a_m = 1$, à coefficients variables sur $\mathbb{R}$ et $(f_0, \dots, f_{m-1}) \in \mathbb{C}^m$ des nombres complexes. Alors le problème de résoudre le système*

$$P(x, \partial)f = 0$$

avec les conditions initiales $f^{(k)}(0) = f_k$ pour $k = 0, \dots, m-1$ sur $\mathbb{R}$ est bien posé dans $C^\infty(\mathbb{R})$.

Démonstration. (Indication) On procède comme dans le cas où les coefficients sont constants pour se ramener à une équation différentielle du premier ordre à coefficients matriciels de la forme

$$x'(t) = a(t)x(t)$$

avec $a(t)$ une matrice à coefficients variables. On ne peut par contre pas résoudre ce système en utilisant l'exponentielle car ceci nécessiterait que des matrices $a(t_1)$ et $a(t_2)$ commutent ce qui n'est pas le cas en général (si a n'est pas constante). Par contre, on peut résoudre ce système par une méthode du point fixe (voir Section 1.3) en utilisant que l'espace $C^\infty([0, b])$ des fonctions lisses sur l'intervalle $[0, b]$ est complet. □

Chapitre 4

Distributions tempérées et transformée de Fourier

4.1 Transformée de Fourier et espace de Schwartz

Rappelons d'abord la définition de la transformée de Fourier des fonctions. Pour x et ξ deux vecteurs de $\mathbb{R}^d$, on note $x\xi := \sum_{i=1}^d x_i \cdot \xi_i$ leur produit scalaire.

Définition 27. *Si $\varphi(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, sa transformée de Fourier est la fonction dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ définie par*

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) \equiv \hat{\varphi}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-2i\pi x\xi} dx.$$

Plus généralement, si $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, sa transformée de Fourier est la fonction dans $C^0(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$\mathcal{F}f(\xi) \equiv \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2i\pi x\xi} dx.$$

La transformée de Fourier inverse d'une fonction $g(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est la fonction dans $C^0(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$\mathcal{F}^{-1}(g) := \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi.$$

Lemme 6. *Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) = 0.$$

Démonstration. La preuve est basée sur le fait que les fonctions dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ sont denses dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. On montre ce fait en approchant toute fonction dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ par sa convolution avec une famille convenable (u_n) de fonction dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, dont la limite dans les distributions est la distribution δ_0 (une telle famille de fonctions est appelée une approximation de l'unité, et peut être par exemple construite en utilisant des fonctions plateau lisses). Ceci permet de se ramener au cas d'une fonction φ continuement différentiable et à support dans un intervalle compact $[a, b]$. Le théorème de Fubini permet de se ramener au cas de la dimension $n = 1$ et une intégration par parties sur l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ permet de montrer que la transformée de Fourier est une somme de termes tendant vers 0 quand $|\xi|$ tend vers l'infini. □

On commence par calculer la transformée de Fourier d'une fonction Gaussienne, car cette fonction joue un rôle particulier dans la théorie. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note $x^2 := x \cdot x$ le produit scalaire de x avec lui-même.

Lemme 7 (Transformée de Fourier d'une Gaussienne)**.** *Pour $t > 0$ une constante réelle fixée, la fonction Gaussienne $G_t(x) := e^{-\pi t x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^d$ a pour transformée de Fourier la fonction Gaussienne*

$$\mathcal{F}(G_t)(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{t})^d} e^{-\frac{\pi \xi^2}{t}}.$$

Démonstration. Par le théorème de Fubini et le fait que $e^{a+b} = e^a e^b$ pour tous nombres complexes a et b, on se ramène à étudier le cas $n = 1$. On note

$$K_t(\xi) := \mathcal{F}(G_t)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t x^2} e^{-2i\pi x\xi} dx.$$

Par convergence dominée, on peut dériver sous le signe intégrale pour obtenir

$$\partial_\xi K_t(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (-2i\pi x) e^{-\pi t x^2} e^{-2i\pi x\xi} dx.$$

Par intégration par parties, on obtient

$$\partial_\xi K_t(\xi) = \frac{i}{t} \left[e^{-\pi t x^2} e^{-2i\pi x\xi} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{2\pi\xi}{t} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t x^2} e^{-2i\pi x\xi} dx = -\frac{2\pi\xi}{t} K_t(\xi).$$

On obtient que $K_t(\xi)$ vérifie une équation différentielle d'ordre 1 dont on peut expliciter la solution

$$K_t(\xi) = K_t(0) e^{-\frac{\pi\xi^2}{t}}.$$

La constante

$$K_t(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t x^2} dx$$

est une intégrale Gaussienne, qu'on peut calculer en passant en coordonnées polaires (voir l'exemple 10). On obtient

$$K_t(0) = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

□

Définition 28. *On note $C_b^0(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^d$.*

Théorème 17. *On a*

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f \text{ et } \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(g)) = g$$

dès que les fonctions f, $\mathcal{F}(f)$ et g, $\mathcal{F}^{-1}(g)$ sont dans $C_b^0(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. On utilise le Lemme 7 qui montre que la transformée de Fourier de la Gaussienne $G_t(\xi) = e^{-\pi t\xi^2}$ est la fonction

$$K_t(x) := \mathcal{F}(G_t)(x) = \frac{1}{(\sqrt{t})^d} e^{-\frac{\pi x^2}{t}}.$$

On va ensuite calculer de deux manières l'intégrale du produit de la transformée de Fourier de f par cette Gaussienne. Par le théorème de Fubini, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} G_t(\xi)\mathcal{F}(f)(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} K_t(x)f(x)dx.$$

On passe ensuite à la limite pour t tendant vers 0. Le terme de gauche tend, par convergence dominée par $\mathcal{F}(f)$ (qui est dans L^1 par hypothèse), vers l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f)(\xi)d\xi = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(0)$. Pour le terme de droite, on fait un changement d'échelle

$$\int_{\mathbb{R}^d} K_t(x)f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\frac{1}{(\sqrt{t})^d} e^{-\frac{\pi x^2}{t}} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(y\sqrt{t})e^{-\pi y^2} dy.$$

Par convergence dominée par $\|f\|_\infty e^{-\pi y^2} \in L^1$, ce terme tend vers

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^d} f(0)e^{-\pi y^2} dy$$

quand t tend vers 0. On obtient donc

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi)d\xi = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(0).$$

Ensuite, par translation en $x \in \mathbb{R}^d$, i.e., en posant $g(y) = f(x + y)$, on obtient

$$f(x) = g(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(g)(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x + y)e^{-2i\pi y\xi} dy \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f)(\xi)e^{2i\pi x\xi} d\xi$$

par le changement de variable $u = x + y$. □

Pour avoir une transformation de Fourier sur un espace de distributions, on a besoin d'un espace de fonctions test inclus dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (pour pouvoir dériver à tous les ordres), et sur lequel la transformée de Fourier est une bijection. La transformée de Fourier d'une fonction à support compact n'est pas à support compact en général, donc $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ne convient pas. On pourrait se restreindre à l'espace des fonctions φ telles que $\varphi, \hat{\varphi} \in L^1 \cap C_b^\infty$, mais il n'est pas nécessairement stable par dérivation. On va donc étudier plus en détails l'action de la transformée de Fourier sur les dérivations et produits de fonctions lisses.

Pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ et $m \in \mathbb{N}^d$, on va noter $\xi^m := \xi_1^{m_1} \cdots \xi_n^{m_d}$.

Proposition 9. *Les transformées de Fourier des dérivées partielles d'une fonction test $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ sont données par*

$$\mathcal{F}(\varphi^{(m)})(\xi) \equiv \mathcal{F}(\partial^{[m]}\varphi)(\xi) = (2i\pi\xi)^m \mathcal{F}(\varphi)(\xi).$$

La transformée de Fourier envoie la convolution de deux fonctions f et g dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ sur le produit

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

de leurs transformées de Fourier (et le produit sur la convolution). Plus généralement, si

$$P(x, \partial) := \sum_{|m| \leq N} a_m(x) \partial^{[m]}$$

est un opérateur différentiel linéaire, on a

$$\mathcal{F}(P(x, \partial) f)(\xi) = \sum_{|m| \leq N} \mathcal{F}(a_m)(\xi) * [(2i\pi\xi)^m \cdot \mathcal{F}(f)(\xi)]$$

quand ceci fait sens. En particulier, si les coefficients a_m sont constants, on obtient

$$\mathcal{F}(P(\partial) f)(\xi) = P(2i\pi\xi) \cdot \mathcal{F}(f)(\xi),$$

donc la transformée de Fourier remplace un opérateur différentiel à coefficients constants par la multiplication par un polynôme.

Démonstration. Le premier résultat découle d'une intégration par parties, de la dérivation sous l'intégrale et du calcul de la dérivée de l'exponentielle $e^{-2i\pi x\xi}$. Plus précisément, lorsqu'on calcule la transformée de Fourier d'une dérivée partielle, on obtient, par intégration par parties par rapport à la variable correspondante, l'égalité

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}(\partial_{x_i}\varphi)(\xi) & = & \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_{x_i}\varphi)(x) e^{-2ix\xi} dx \\ & = & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [\varphi(x) e^{2i\pi x\xi}]_{x_i=-\infty}^{\infty} dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)(\partial_{x_i} e^{-2i\pi x\xi}) dx \\ & = & 0 - (-2i\pi\xi_i) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-2i\pi x\xi} dx \\ & = & (2i\pi\xi_i)\mathcal{F}(\varphi)(\xi) \end{array}$$

L'action des dérivées partielles plus générales $\partial^{[m]}$ s'obtient en itérant ce résultat. Le fait que la transformée de Fourier échange la convolution et la multiplication découle du théorème de Fubini et de l'invariance par translation de l'intégrale. Plus précisément, lorsqu'on calcul la transformée de Fourier d'une convolution et qu'on utilise le changement de variable $[y - x \mapsto x]$, $[x \mapsto x + y]$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}(f * g)(\xi) & = & \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x) e^{-2i\pi x\xi} dx \\ & = & \int_{\mathbb{R}^d} (\int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(y - x) dy) e^{-2i\pi x\xi} dx \\ & \overset{\text{fubini}}{=} & \int_{\mathbb{R}^d} (\int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(y - x) e^{-2i\pi x\xi} dx) dy \\ & \overset{\text{linearité}}{=} & \int_{\mathbb{R}^d} f(y) (\int_{\mathbb{R}^d} g(y - x) e^{-2i\pi x\xi} dx) dy \\ & \overset{\text{chgt var}}{=} & \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{-2i\pi(x+y)\xi} dx) dy \\ & \overset{\text{fubini}}{=} & \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2i\pi y\xi} dy\right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{-2i\pi x\xi} dx\right) \\ & = & \mathcal{F}(f)(\xi) \cdot \mathcal{F}(g)(\xi) \end{array}$$

Les résultats suivants sont des conséquences directes des deux premiers et de la linéarité de l'intégrale, qui implique celle de la transformée de Fourier. □

Les formules de la proposition 9 montrent que pour avoir un sous-espace de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ stable par Fourier, par dérivation, et par produit (donc par convolution), on doit imposer $x^m f^{(m')} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $m, m' \in \mathbb{N}^d$. Ceci nous amène à la définition suivante.

Définition 29 (Fonctions à décroissance intégrale rapide)**.** *L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est le sous-espace de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions φ à décroissance (intégrale) rapide, i.e., des fonctions vérifiant*

$$x^m f^{(m')} \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

pour tout $m, m' \in \mathbb{N}^d$. Il est muni de la famille de normes

$$p_{1,N,N'}(\varphi) := \sum_{|m|\leq N} \sum_{|m'|\leq N'} \left\| x^m f^{(m')} \right\|_1 .$$

Il est clair qu'on a des inclusions $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset C^\infty(\mathbb{R}^d)$. La proposition 9 et le raisonnement ci-dessus impliquent le résultat suivant.

Théorème 18. *La transformée de Fourier induit une bijection bicontinue*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \leftrightarrows \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) : \mathcal{F}^{-1}.$$

L'espace de Schwartz est stable par dérivation et par multiplication par des polynômes.

Démonstration. Le fait que la transformée de Fourier soit une bijection découle directement de la proposition 9, qui dit que la transformée de Fourier échange dérivation et multiplication par un monome. Ceci implique aussi les inégalités suivantes (dues au fait que la norme d'une exponentielle complexe est 1)

$$\begin{aligned} p_{1,N,N'}(\mathcal{F}(f)) &\leq ?(2\pi)^{N'} \cdot p_{1,N',N}(f) \\ p_{1,N',N}(\mathcal{F}^{-1}(g)) &\leq ?(2\pi)^{d} \cdot p_{1,N,N'}(g) \end{aligned}$$

(attention, il faut corriger ces inégalités car elles ne sont pas correctes puisqu'on a pas $\|\mathcal{F}(f)\|_1 \leq \|f\|_1$, mais elles peuvent être modifiées convenablement pour montrer la bicontinuité) qui garantissent que la bijection est bicontinue. La stabilité par dérivation et par multiplication par des polynômes découle de la définition. □

Lemme 8. *Une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dans l'espace de Schwartz si et seulement si elle est à décroissance rapide, i.e., on a*

$$\|x^m f^{(m')}\|_\infty < \infty$$

pour tous $m, m' \in \mathbb{N}^d$.

Démonstration. Supposons que f soit à décroissance rapide. On peut majorer $x^m f^{(m)}$ en dehors de $[-1, 1]^d$ par $\frac{C}{|x^{\underline{2}}|}$ pour C la constante $\left\| x^{m+\underline{2}} f^{(m')} \right\|_\infty$ et $\underline{2} = (2, \ldots, 2)$, et cette dernière fonction est intégrable et bornée en dehors de $[-1, 1]^d$. Sur $[-1, 1]^d$, la fonction est continue donc aussi intégrable et bornée. Ceci implique que f est à décroissance intégrale rapide. Inversement, si f n'est pas à décroissance rapide, il existe m et m' dans $\mathbb{N}^d$ tels que

$$\|x^m f^{(m')}\|_\infty = \infty.$$

Dans ce cas, la fonction en question étant continue, elle ne peut être intégrable (car elle n'est pas bornée). Ceci implique que f n'est pas à décroissance intégrale rapide, d'où l'équivalence entre les deux conditions. □

On retrouve ainsi la définition plus classique de l'espace de Schwartz.

Définition 30 (Fonctions à décroissance rapide). *L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est le sous-espace de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions φ à décroissance rapide, i.e., des fonctions vérifiant*

$$\|x^m f^{(m')}\|_\infty < \infty$$

pour tous $m, m' \in \mathbb{N}^d$. Il est muni de la famille de normes [1]

$$p_{N,N'}(\varphi) := \sum_{|m|\leq N} \sum_{|m'|\leq N'} \|x^m f^{(m')}\|_\infty.$$

Exemple 24. *La Gaussienne e^{-x^2} est à décroissance rapide.*

Proposition 10. *L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par multiplication et par convolution.*

Démonstration. Puisque la transformée de Fourier transforme la convolution en produit et le produit en convolution, et qu'elle stabilise l'espace de Schwartz, il suffit de montrer le résultat pour le produit. Il découle alors de la formule de Leibniz pour la dérivée d'un produit de fonctions. En effet, celle-ci implique par récurrence qu'il existe des constantes $a_{k,l} \in \mathbb{C}$ telles que

$$(f \cdot g)^{(m')}(x) = \sum_{|k|\leq|m'|,|l|\leq|m'|} a_{k,l} \cdot f^{(k)}(x) \cdot g^{(l)}(x).$$

On en déduit que

$$\left\|x^m (f \cdot g)^{(m')}(x)\right\|_\infty \leq \sum_{k,l} |a_{k,l}| \cdot \|x^m f^{(k)}(x)\|_\infty \cdot \|g^{(l)}(x)\|_\infty < \infty,$$

donc le produit de deux fonctions de Schwartz est bien dans l'espace de Schwartz. □

4.2 Les distributions tempérées et leur transformée de Fourier

Définition 31. *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ des distributions tempérées est le dual continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, i.e., l'espace des fonctionnelles linéaires $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe une constante C et deux entiers N et N' tels que*

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \cdot p_{N,N'}(\varphi) = C \cdot \sum_{|m|\leq N} \sum_{|m'|\leq N'} \|x^m \varphi^{(m')}\|_\infty$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. L'entier N' est appelé l'ordre de régularité de la distribution, et l'entier N, son ordre de croissance à l'infini.

1. On peut montrer que cette famille de norme est équivalente à la précédente, par un raisonnement directement inspiré de celui utilisé dans le Lemme 8.

Proposition 11. *La transformée de Fourier induit une bijection*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)' \leftrightarrows \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)' : \mathcal{F}^{-1}$$

définie par

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi)\rangle \text{ et } \langle \mathcal{F}^{-1}(T), \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\varphi)\rangle.$$

Les inclusions $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset C^\infty(\mathbb{R}^d)$ induisent des inclusions

$$C_c^{-\infty}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)' \subset C^{-\infty}(\mathbb{R}^d).$$

des distributions à support compact dans les distributions de Schwartz, et des distributions de Schwartz dans les distributions.

Démonstration. L'énoncé sur la transformée de Fourier découle du théorème 18. Le fait que toute distribution à support compact induise une distribution tempérée découle des définitions : il suffit de prendre $N = 0$. Soit $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ une distribution tempérée. Comme la fonction $x \mapsto x^m$ est continue, elle est bornée sur tout intervalle compact $[a, b]$. Ceci permet d'écrire

$$\|x^m f^{(m')}\|_{\infty,[a,b]} \leq C_m \cdot \|f^{(m')}\|_{\infty,[a,b]}$$

avec

$$C_m = \|x^m\|_{\infty,[a,b]}.$$

On obtient la majoration

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|m|\leq N} \sum_{|m'|\leq N'} \|x^m f^{(m')}\|_\infty \leq C \sum_{|m|\leq N} \sum_{|m'|\leq N'} C_m \|f^{(m')}\|_\infty \leq C' \cdot \sum_{|m'|\leq N'} \|f^{(m')}\|_\infty$$

qui montre que T est une distribution d'ordre de régularité N' sur $[a, b]$. On a ainsi une suite d'applications

$$C_c^{-\infty}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)' \to C^{-\infty}(\mathbb{R}^d).$$

Le fait qu'on ait des inclusions vient du fait que toute fonction φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est limite d'une suite de fonctions dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ (donnée par les produits $\varphi\psi_{[-k,k]^d,1}$ de φ par des fonctions plateau lisses sur des intervalles croissants ; la différence est majorée par la valeur de φ en dehors de $[-k, k]^d$, qui tend uniformément vers 0), ce qui montre que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)' \subset C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$, et comme on a aussi une inclusion $C_c^{-\infty}(\mathbb{R}^d) \subset C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ d'après la proposition 3, on obtient que $C_c^{-\infty}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$. □

Exemple 25. *On se réfère à l'ancien polycopié ou à [6] pour une preuve des résultats suivants, quand ils ne sont pas démontrés.*

1. *Le peigne de Dirac $Ш = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \delta_k$ est une distribution tempérée car pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et pour $N > 0$, on a $\lim_{|k|\to\infty} |\underline{k^{2+N}}\varphi(x)| = 0$ donc il existe une constante finie, donnée par exemple par la série $C = 1 + \sum_{k\neq 0} \frac{1}{\underline{k^{2+N}}}$, qui converge pour N assez grand, telle que*

$$|Ш(\varphi)| \leq C \cdot \|\underline{x^{2+N}}\varphi(x)\|_\infty.$$

2. *La transformée de Fourier d'une distribution à support compact $T \in C_c^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ est donnée par la distribution de type fonction*

$$\mathcal{F}(T) = [\langle T, e^{-2i\pi x\xi}\rangle],$$

qui fait sens car T est définie sur $C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

3. *En particulier, la transformée de Fourier de la distribution δ_{x_0} est la distribution de type fonction*

$$\mathcal{F}(\delta_{x_0}) = [\langle \delta_{x_0}, e^{-2i\pi x\xi}\rangle] = [e^{-2i\pi x_0\xi}].$$

Définition 32. *Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ localement intégrable est dite à croissance polynomiale à l'infini si elle est dominée à l'infini par un polynôme $P(x) \in \mathbb{R}_+[x]$, i.e., si on a pour $|x|$ en dehors de $[-M, M]^d$ avec M assez grand*

$$|f(x)| \leq P(|x|).$$

On note $L^1_{loc,cp}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions localement intégrables à croissance polynomiale à l'infini, $C^\infty_{cp}(\mathbb{R}^d) \subset C^\infty(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions lisses dont toutes les dérivées sont à croissance polynomiale à l'infini et $\mathcal{D}_{cp}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ l'algèbre des opérateurs différentiels à croissance polynomiale, i.e., dont les coefficients sont dans $C^\infty_{cp}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 12. *On a une inclusion*

$$L^1_{loc,cp}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$$

des fonctions localement intégrables à croissance polynomiale dans les distributions tempérées. De même, pour $p \geq 1$, on a une inclusion

$$L^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

des fonctions L^p dans les distributions tempérées. De plus, dans ce cas, la transformée de Fourier est de type fonction et donnée par la formule

$$\mathcal{F}([f]) = \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2i\pi x\xi}dx\right].$$

Le produit scalaire (et donc la norme) L^2 est conservé par la transformée de Fourier, i.e., on a

$$\langle F, G\rangle_2 := \int_{\mathbb{R}^d} F(x)\bar{G}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\bar{g}(x)dx = \langle f, g\rangle_2$$

et la transformée de Fourier induit une isométrie

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \leftrightarrows L^2(\mathbb{R}^d) : \mathcal{F}^{-1}.$$

Enfin, l'algèbre $\mathcal{D}_{cp}(\mathbb{R}^d)$ des opérateurs différentiels à croissance polynomiale agit sur l'espace des distributions tempérées.

Démonstration. Le fait que $[f]$ soit tempérée découle du fait que $P(|x|)$ soit tempérée. Ce dernier point se démontre en utilisant deux estimations : sur $[-M, M]^d$, on a, pour $P(x) = \sum_{|n|\leq N} a_n x^d$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$, les inégalités

$$\left|\int_{[-M,M]} P(|x|)\varphi(x)dx\right| \leq \sum_{|n|\leq N} |a_n| \cdot \|x^d\varphi(x)\|_\infty,$$

et sur $\mathbb{R}^d - [-M, M]^d$, on a les inégalités

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d-[-M,M]^d} P(|x|)\varphi(x)dx\right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d-[-M,M]^d} \frac{1}{x^{\underline{2}}}dx\right) \cdot \sum_{|n|\leq N} |a_n| \cdot \|x^{n+\underline{2}}\varphi(x)\|_\infty,$$

avec $\underline{2} = (2, \ldots, 2)$ de degré $|\underline{2}| = 2n$. Ainsi, il existe une constante C, construite en sommant les deux inégalités ci-dessus, telle que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} P(|x|)\varphi(x)dx\right| \leq C \sum_{m\leq N+2n} \|x^m\varphi(x)\|_\infty$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. L'inclusion des fonctions L^p dans les fonctions tempérées découle de l'inégalité

$$|\langle [f], \varphi\rangle| \leq \|f\varphi\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|\varphi\|_q,$$

pour $1/p + 1/q = 1$, et de l'inégalité

$$\|\varphi\|_q = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi^q(x)dx\right)^{1/q} \leq \mathrm{vol}([-1, 1]^d) \cdot \|\varphi\|_\infty + \left(\int_{\mathbb{R}^d-[-1,1]^d} \frac{1}{|x^{\underline{2N}}|^q}\right)^{1/q} \cdot \|x^{\underline{2N}}\varphi(x)\|_\infty,$$

dont le terme de droite est fini pour $N > 0$ suffisamment grand. Le fait que le produit scalaire L^2 soit respecté par la transformée de Fourier découle du théorème de Fubini. Le fait qu'on ait une isométrie découle du fait que $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, et donc aussi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ (tout élément de $L^2(\mathbb{R}^d)$ peut être représenté comme une limite d'une suite de Cauchy pour la norme L^2 de fonctions de Schwartz), et que la transformée de Fourier est (clairement) une isométrie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si on sait qu'elle respecte le produit scalaire L^2, puisqu'elle donne une bijection. Le fait que les opérateurs dans $\mathcal{D}_{cp}(\mathbb{R}^d)$ agissent sur les distributions de Schwartz découle du fait que le produit $f\varphi$ d'une fonction $f \in C_{cp}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et d'une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est une fonction de Schwartz. □

4.3 Application à l'équation de la chaleur

On va commencer par présenter la construction (qui est une reformulation distributionnelle du résultat obtenu par Fourier dans son texte original [4]) de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur en dimension $n + 1$. La même méthode (utilisation de la transformée de Fourier partielle pour transformer une équation aux dérivées partielles en une équation différentielle ordinaire) s'applique aussi directement à l'équation de Schrödinger et à l'équation des ondes (voir le polycopié de Lerner [6] pour des calculs complets sur ces exemples).

On cherche une solution fondamentale à l'opérateur $C = \partial_t - \Delta$, avec $\Delta = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2$ le Laplacien sur $\mathbb{R}^d$, i.e., une distribution $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ telle que

$$CE(t,x) = \partial_t E(t,x) - \Delta E(t,x) = \delta_0(t,x) = \delta_0(t) \otimes \delta_0(x).$$

On applique la transformée de Fourier partielle $\mathcal{F}_x$ par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}^d$, ce qui nous donne l'équation différentielle ordinaire en la variable t, portant sur la distribution $\mathcal{F}_x(E)(t,\xi)$, donnée par

$$\partial_t \mathcal{F}_x(E) - (2i\pi\xi)^2 \mathcal{F}_x(E) = \mathcal{F}_x(\delta_0).$$

La transformée de Fourier partielle de la distribution $\delta_0(t,x)$ est donnée par

$$\mathcal{F}_x(\delta_0(t,x)) = \delta_0(t) \otimes \mathcal{F}_x(\delta_0(x)) = \delta_0(t) \otimes [1](\xi),$$

i.e., on a

$$\langle \mathcal{F}_x(\delta_0), \varphi \rangle = \langle \delta_{t=0} \otimes [1]_\xi, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(0,\xi) d\xi.$$

On remarque que c'est la dérivée en t de la distribution

$$\langle [H] \otimes [1], \varphi(t,x) \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} H(t)\varphi(t,x) dt dx$$

avec $H(t) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$, à cause de la formule de Leibniz

$$\partial_t([H] \otimes [1]) = \partial_t [H] \otimes [1] + [H] \otimes \partial_t [1] = \delta_{t=0} \otimes [1] + 0.$$

Une solution de l'équation homogène (sans second membre) associée à l'équation différentielle ordinaire ci-dessus est donnée par la fonction Gaussienne

$$G(t,\xi) = e^{-4\pi^2 \xi^2 t}.$$

Comme $G(0,\xi) = 1$, la solution fondamentale correspondante de l'équation différentielle ordinaire est

$$F(t,\xi) = H(t) \cdot G(t,\xi) = H(t) e^{-4\pi x^2 \xi^2 t}.$$

En effet, la formule de Leibniz donne

$$\partial_t (H \cdot G) = (\partial_t H) \cdot G + H \cdot \partial_t G = \delta_0(t) \cdot G(t,\xi) + H \cdot 0 = \delta_0(t) \otimes [1]$$

car $G(0,\xi) = 1$. Par le lemme 7 (on utilise un changement de variable $t \mapsto 4\pi t$), sa transformée de Fourier partielle inverse

$$E = \mathcal{F}_x^{-1}(F) = \frac{H(t)}{(\sqrt{4\pi t})^d} e^{-\pi \frac{x^2}{4\pi t}}$$

est une solution fondamentale de l'opérateur C, i.e., vérifie

$$CE = \partial_t E - \Delta E = \delta_0.$$

4.4 Calculs de transformées de Fourier

Proposition 13. *Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $F = \mathcal{F}(f)$, $G = \mathcal{F}(g)$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $v \in \mathbb{R}^d$, on a les propriété suivantes :*

$$\begin{cases} f(ax) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \frac{1}{|a|^d} F\left(\frac{\xi}{a}\right) & \textit{(changement d'échelle)} \\ f(x-v) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & e^{-2i\pi v\xi} F(\xi) & \textit{(translation} \Rightarrow \textit{modulation)} \\ e^{2i\pi vx} f(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & F(\xi - v) & \textit{(modulation} \Rightarrow \textit{translation)} \\ \bar{f}(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \bar{F}(-\xi) & \textit{(conjugaison)} \end{cases}$$

Démonstration. Ces résultats sont des applications directes des définitions et de changements de variables appropriés. On démontre ici le cas du changement d'échelle. La multiplication par $1/a$ dans $\mathbb{R}^d$ est une application linéaire dont la matrice dans la base canonique est donnée par la matrice diagonale $(1/a)\mathrm{id}$. C'est un changement de variable d'inverse la multiplication par a et qui est égal à sa jacobienne (car il est linéaire). Le module du déterminant de la matrice $(1/a)\mathrm{id}$ est $\frac{1}{|a|^d}$. Le théorème de changement de variable dans l'intégrale nous donne alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(ax))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(ax) e^{-2i\pi x\xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2i\pi x \frac{\xi}{a}} \frac{dx}{|a|^d} \\ &= \frac{1}{|a|^d} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\xi}{a}\right). \end{aligned}$$

□

Remarque 4. *Le résultat ci-dessus a une généralisation directe aux distributions de Schwartz, si on remplace le changement d'échelle $m_a : f(x) \mapsto f(ax)$ par l'opérateur correspondant sur les distributions obtenu par l'identification*

$$\langle m_a f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(ax)\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(u)\varphi(u/a) \frac{dx}{|a|^d} = \left\langle f, \frac{1}{|a|^d} \varphi(\cdot/a) \right\rangle,$$

et la translation $\tau_a : f(x) \mapsto f(x-a)$ par l'opérateur correspondant sur les distributions donné par l'identification

$$\langle \tau_a f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-a)\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(u)\varphi(u+a) du = \langle f, \varphi(\cdot + a) \rangle.$$

Donnons maintenant quelques exemples simples de transformées de Fourier de fonctions et distributions définies sur $\mathbb{R}$.

Proposition 14. *Fixons $a \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$. On a les transformées de Fourier suivantes :*

$$\begin{array}{ccc} \delta_0 & \xrightarrow{\mathcal{F}} & 1 \\ 1 & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \delta_0 \\ \mathbb{1}_{[-a,a]}(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \frac{\sin(2\pi a\xi)}{\pi\xi} \\ (1-|x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^2 \\ e^{-|x|} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \frac{2}{1+(2\pi\xi)^2} \\ x^n e^{-x} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \frac{n!}{(1+2i\pi\xi)^{n+1}} \\ e^{-\pi x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & e^{-\pi\xi^2} \end{array}$$

Démonstration. La transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$ est

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-1,1]})(\xi) = \int_{-1}^{1} e^{-2i\pi x\xi} dx = \left[\frac{e^{-2i\pi x\xi}}{-2i\pi\xi}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi\xi}\frac{e^{2i\pi\xi} - e^{-2i\pi\xi}}{2i} = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}.$$

L'application du changement d'échelle $x \mapsto x/a$ pour la fonction $\mathbb{1}_{[-1,1]}$ permet d'obtenir la formule pour la transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$ qui est

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-a,a]})(\xi) = a\frac{\sin(2\pi a\xi)}{\pi a\xi}.$$

Le troisième exemple découle du fait que la transformée de Fourier transforme convolution en produit, du calcul précédent, et de l'égalité

$$(1 - |x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) = \mathbb{1}^{*2}_{[-1/2,1/2]}(x)$$

qui dit que la fonction en question est le carré de convolution de l'indicatrice de $[-1/2, 1/2]$ (on peut démontrer ce dernier point par un dessin). Le cas de $e^{-|x|}$ se traite par un calcul direct. On a les égalités

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}(e^{-|x|})(\xi) & = & \int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-2i\pi x\xi}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-2i\pi x\xi}dx \\ & = & \left[\frac{e^{x-2i\pi x\xi}}{1-2i\pi\xi}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-x-2i\pi x\xi}}{-1-2i\pi\xi}\right]_{0}^{\infty} \\ & = & \frac{1}{1-2i\pi\xi} + \frac{1}{1+2i\pi\xi} \\ & = & \frac{2}{1-(2i\pi\xi)^2} = \frac{2}{1+(2\pi\xi)^2} \end{array}$$

On remarque au passage que ceci implique en particulier que $e^{-|x|}$ est solution fondamentale de l'opérateur différentiel $P(\partial) = \frac{1}{2}(1-\partial_x^2)$. La fonction $f_0(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ a pour dérivée distributionnelle (intégration par parties)

$$\langle \partial_x[f_0], \varphi\rangle = -\langle [f_0], \varphi'\rangle = -[e^{-x}\varphi(x)]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x}\varphi(x)dx = \langle \delta_0 - [f_0], \varphi\rangle.$$

On en déduit que $[f_0]$ est solution fondamentale de l'opérateur $P(\partial) = \partial_x + 1$. Donc $\mathcal{F}([f_0])$ est un inverse distributionnel de $1 + 2i\pi\xi$, mais comme c'est aussi une fonction continue (car f_0 est intégrable) qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on obtient forcément

$$\mathcal{F}(f_0)(\xi) = \frac{1}{1 + 2i\pi\xi}.$$

On montre maintenant par récurrence que pour $f_n(x) = x^n f_0(x)$, on a

$$P(\partial)^{n+1} f_n = n!\delta_0,$$

ce qui implique le dernier résultat par transformée de Fourier. Supposons le résultat vrai au rang n. On a alors

$$P(\partial)^{n+2} f_{n+1} = P(\partial)^{n+1} P(\partial) f_{n+1}.$$

Or, il se trouve que

$$\begin{array}{rcl} P(\partial)f_{n+1}(x) & = & (\partial_x + 1)(x^{n+1} f_0(x)) \\ & = & (n + 1)x^n f_0(x) + x^{n+1}\partial_x f_0(x) + x^{n+1} f_0(x) \\ & = & (n + 1)f_n(x) + x^{n+1}P(\partial)f_0(x) \\ & = & (n + 1)f_n(x) + x^{n+1}\delta_0(x) \\ & = & (n + 1)f_n(x), \end{array}$$

donc

$$P(\partial)^{n+2} f_{n+1} = (n+1)!\delta_0$$

par l'hypothèse de récurrence. La transformée de Fourier de la Gaussienne a été calculée dans le lemme 7. □

Chapitre 5

Solutions fondamentales des opérateurs différentiels arbitraires à coefficients constants

5.1 Transformée de Fourier et solutions fondamentales

On a vu dans la section 3.6 que la résolution d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants

$$P(\partial)f = g$$

dont le second membre est une distribution g à support compact, se ramenait, par convolution, au problème de trouver une solution fondamentale, i.e., une distribution $E \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$P(\partial)E = \delta_0.$$

On peut chercher $E \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$, et appliquer la transformée de Fourier à cette équation pour obtenir

$$\mathcal{F}(P(\partial)E) = P(2i\pi\xi) \cdot \mathcal{F}(E) = \mathcal{F}(\delta_0) = 1.$$

Le problème de trouver des solutions fondamentales pour les opérateurs à coefficients constants revient alors à trouver, pour tout polynôme $P(x)$ à coefficients complexes, un inverse distributionnel de P, i.e., une distribution de Schwartz f telle que

$$P(x) \cdot f = 1.$$

On peut supposer de surcroit, en remplaçant P par $Q = |P|^2 = P \cdot \overline{P}$, que le polynôme en question est à valeurs réelles et positif ou nul sur $\mathbb{R}^d$. En effet, si g est un inverse distributionnel de $Q = P\bar{P}$, on peut le multiplier par le polynôme $\bar{P}$, pour obtenir un inverse distributionnel $f = \bar{P} \cdot g$ du polynôme P.

5.2 Quelques exemples élémentaires

Un premier résultat assez général et relativement élémentaire est qu'un polynôme sans zéros sur $\mathbb{R}^d$ a un inverse distributionnel.

Proposition 15. *Soit $P \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ un polynôme qui n'a pas de zéro sur $\mathbb{R}^d$. Alors, P a un inverse distributionnel (qui est de Schwartz).*

Démonstration. Si le polynôme est constant, i.e., $P \equiv c \in \mathbb{R} - \{0\}$, la distribution $[1/c]$ en est un inverse distributionnel, qui est de Schwartz. Supposons que P n'est pas constant. On peut supposer que P est strictement positif sur $\mathbb{R}^d$ (le cas strictement négatif se traite de manière analogue). La distribution $[1/P]$ associée à la fonction continue (donc localement intégrable) $1/P$ sur $\mathbb{R}^d$ est un inverse distributionnel de P. On va montrer qu'elle est de Schwartz. Comme P est équivalent lorsque $\max(|x_i|)$ tend vers l'infini à son terme de plus haut degré, il tend forcément vers $+\infty$. Comme P est minoré par 0, il a une borne inférieure $m \geq 0$ sur $\mathbb{R}$. Comme il tend vers $+\infty$ à l'infini, il existe un intervalle $[-M, M]$ tel que $P(x) \geq m + 1$ pour tout x en dehors de $[-M, M]$. Ceci signifie que l'infimum m est atteint sur l'intervalle $[-M, M]$ qui est compact, car P y est continue. Il existe donc $x_0 \in [-M, M]$ tel que $P(x_0) = m$ donc $m > 0$. On en déduit qu'il existe un minorant $m > 0$ tel que $P(x) \geq m$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Ceci implique que $1/P$ est une fonction bornée par $1/m$, et qu'elle est donc à croissance polynomiale à l'infini. On en déduit que la distribution associée $[1/P]$ est de Schwartz. □

Corollaire 3. *Soit $P(\partial) = \sum a_n \partial^{[n]}$ un opérateur différentiel à coefficients constants tel que le polynôme $P(2i\pi\xi)$ n'aie pas de zéro réel. Alors, $P(\partial)$ a une solution fondamentale, i.e., il existe $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$P(\partial)E = \delta_0.$$

Voyons maintenant les exemples les plus simples, en dimension 1, d'inverses distributionnels de polynômes ayant des zéros.

Exemple 26.

1. *On a déjà vu que* $\mathrm{vp}(1/x)$ *était un inverse distributionnel de x, i.e., qu'on a*

$$x \cdot \mathrm{vp}(1/x) = 1.$$

   On sait aussi qu'elle est tempérée car c'est la dérivée de la distribution de type fonction associée à la fonction localement intégrable $\ln(|x|)$, *qui est majorée par $|x|$ en $\pm\infty$, donc à croissance polynomiale à l'infini.*

2. *La dérivation de cette relation donne*

$$x \cdot \mathrm{vp}(1/x)' + 1 \cdot \mathrm{vp}(1/x) = 0$$

   donc par multiplication par x, on obtient

$$x^2 \cdot \mathrm{vp}'(1/x) + x \cdot \mathrm{vp}(1/x) = x^2 \cdot \mathrm{vp}'(1/x) + 1 = 0.$$

   Si on note $\mathrm{pf}(1/x^2) := -\mathrm{vp}'(1/x)$, *on obtient*

$$x^2 \mathrm{pf}(1/x^2) = 1$$

   donc $\mathrm{pf}(1/x^2)$ *est un inverse distributionnel de x^2, qui est clairement tempéré puisque* $\mathrm{vp}(1/x)$ *l'est.*

3. *En dérivant à nouveau cette relation, on construit par récurrence des inverses distributionnels pour toutes les puissances de x, qui sont donnés par*

$$\mathrm{pf}(1/x^{n+1}) := (-1)^n \partial_x^n \mathrm{vp}(1/x) := (-1)^n \partial_x^{n+1} [\ln(|x|)].$$

En combinant les résultats simples de l'exemple 26 et la proposition 15, on redémontre le théorème suivant (voir le théorème 15 pour une solution plus explicite n'utilisant pas la transformée de Fourier). Nous donnerons dans le théorème 21 une autre preuve du même résultat qui a l'avantage de se généraliser directement à la dimension $n \geq 1$.

Théorème 19. *Tout opérateur différentiel sur $\mathbb{R}$ à coefficients constants admet une solution fondamentale.*

Démonstration. On s'est déjà ramené au problème de définir l'inverse distributionnel d'un polynôme f à valeurs réelles et positif sur $\mathbb{R}$. La décomposition en éléments simples des fractions rationnelles donne que $\frac{1}{f}$ est une somme de termes qui sont, soit de la forme $\frac{h}{k}$ avec h, k polynômes, k strictement positif, soit de la forme $\frac{a}{(x-b)^n}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$. On construit une distribution tempérée correspondant à chacun de ces termes en utilisant la proposition 15 et les inverses distributionnels construits dans l'exemple 26, et le fait que les distributions tempérées sont stables par produit par un polynôme, car les fonctions de Schwartz le sont. La somme des distributions ainsi obtenues donne une distribution tempérée g telle que

$$f \cdot g = 1.$$

$\square$

5.3 Le théorème de Malgrange-Ehrenpreis

La présente section est basée sur l'article de Bernstein [1], qui donne une preuve originale du résultat principal de cette section. Pour traiter des opérateurs différentiels à coefficients constants arbitraires (i.e., dont le polynôme transformé de Fourier s'annule sur $\mathbb{R}^d$ et n'a donc pas un inverse localement intégrable), on utilise le résultat suivant, qui semble abstrait mais peut être vérifié en pratique sur les opérateurs différentiels qui nous intéressent en cherchant des relations entre les dérivées de $f(x)^{s+1}$ par rapport à la variable x et la fonction $f(x)^s$.

Théorème 20. *(polynôme de Bernstein-Sato) Si f est un polynôme positif ou nul non trivial sur $\mathbb{R}^d$, la fonction*

$$\begin{array}{rccl} f(x)^s : & \{s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(s) > 0\} & \to & \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \\ & s & \mapsto & [f(x)^s] \end{array}$$

est bien définie et il existe un polynôme $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ et un opérateur différentiel $P(s, x, \partial_x)$ à coefficients polynomiaux en x tel que

$$P(s, \partial_x) f(x)^{s+1} = b(s) f(x)^s.$$

La démonstration du théorème ci-dessus est hors de portée de ce cours, mais elle n'est pas nécessaire pour appliquer son résultat sur des opérateurs simples donnés, comme on va le voir dans les exemples qui suivent.

Exemple 27. *1. Le polynôme $f(x) = x^2$ correspond (à une constante près) à l'opérateur Laplacien $\Delta = \partial_x^2$. Si on dérive $f(x)^{s+1} = x^{2(s+1)}$ par rapport à x, on obtient $2(s+1)x^{2(s+1)-1}$. En dérivant à nouveau, on obtient*

$$\partial_x^2 f(x)^{s+1} = 2(s+1)(2s+1)x^{2s} = 2(s+1)(2s+1)f(x)^s.$$

On peut donc poser $b(s) = 2(s+1)(2s+1)$ et $P(s, \partial_x) = \Delta$, et les zéros de $b(s)$ sont $\{-1, -1/2\}$. La même formule fonctionne en dimension $n > 1$ avec $P(x, \partial_x) = \Delta$ et $b(s) = 2(s+1)(2s+n)$.

2. *De même, le polynôme $f(t, x) = t^2 - x^2$ correspond (à une constante près) à l'opérateur d'Alembertien*

$$\square = \partial_t^2 - \partial_x^2$$

(équation des ondes). On monte qu'on a toujours

$$\square f(t, x)^{s+1} = 2(s+1)(2s+1)f(t, x)^s$$

ce qui donne $b(s) = 2(s+1)(2s+n)$ et $P(s, \partial_x) = \square$ et les zéros de $b(s)$ sont $\{-1, -1/2\}$.

3. *Le polynôme $f(x, y) = xy$ correspond (à une constante près) à l'opérateur $P(\partial) = \partial_x \partial_y$. On a $P(\partial)f(x)^{s+1} = \partial_x[(s+1)x(xy)^s] = (s+1)[(xy)^s + sx(x^{s-1})y^s] = (s+1)^2 f(x)^s$ donc on peut poser $b(s) = (s+1)^2$ et $b(s)$ a pour zéro -1.*

4. *Le polynôme $f(t, x) = t - x^2$ correspond à l'opérateur de la chaleur $C = \partial_t - \partial_x^2 = \partial_t - \Delta$. On a les égalités*

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x)^{s+1} = (s+1)(t - x^2)^s \\ \partial_x f(t, x)^{s+1} = (s+1)(-2x)(t - x^2)^s \end{cases}$$

donc on peut poser $P(x, \partial_x) := -2x\partial_t + \partial_x$ et $b(s) = s+1$ et $b(s)$ a pour zéro -1.

Théorème 21. *(Malgrange-Ehrenpreis) Tout opérateur différentiel non trivial à coefficients constants sur $\mathbb{R}^d$ a une solution fondamentale.*

Démonstration. On s'est ramené, par transformée de Fourier, à trouver un inverse distributionnel d'un polynôme non trivial $f(x) \in \mathbb{C}[x]$. En faisant le produit $f\bar{f}$ du polynôme et de son conjugué complexe, on se ramène au problème de trouver un inverse d'un polynôme positif ou nul non trivial sur $\mathbb{R}^d$. Le polynôme de Berstein-Sato, dont le théorème 20 nous garantit l'existence, permet de prolonger la fonction analytique

$$\begin{array}{rccc} f(x)^s : & \{s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(s) > 0\} & \longrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)' \\ & s & \longmapsto & [f(x)^s] := [e^{s \ln(f(x))}] \end{array}$$

de proche en proche au plan complexe (duquel on a ôté les zéros du polynôme b) par la formule

$$f(x)^s := \frac{1}{b(s)} P(s, x, \partial) f(x)^{s+1}.$$

Le terme constant du développement en série en s de cette fonction $s \mapsto f(x)^s$ en -1 donne un inverse distributionnel de f, ce qui permet de conclure. □

Chapitre 6

Séries de Fourier

Les fonctions périodiques ont une transformée de Fourier qu'on peut décrire sous forme de séries, dont les coefficients sont des nombres qu'on peut voir (si on en prend qu'un nombre fini, donné en choisissant les plus pertinents, i.e., ceux de plus grande amplitude/valeur absolue) comme un encodage numérique d'un signal (son, vibration sismique, onde électromagnétique/lumineuse) analogique.

6.1 Définition

Soit $T \in (\mathbb{R}_+^*)^d$ un vecteur dont aucune coordonnée n'est nulle, qu'on appelera le vecteur des périodes, et soit $k \in \mathbb{Z}^d$. On note $|T|_* := T_1 \dots T_n$ le produit de ses coordonnées. On définit l'opérateur de translation $\tau_{k*T} : C^\infty(\mathbb{R}^d) \to C^\infty(\mathbb{R}^d)$ par

$$\tau_{k*T}(\varphi)(x) = \varphi(x - k * T)$$

avec $k * T$ le vecteur dont les coordonnées sont les produits des coordonnées de k et de celles de T. Ceci induit des opérateurs τ_{k*T} sur l'espace $C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ des distributions.

Définition 33. *Une distribution $f \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ est dite T-périodique si elle vérifie*

$$\tau_{k*T}(f) = f$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$. On note $C^{-\infty}_{T\text{-}per}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des distributions T-périodiques. Le T minimal pour lequel f est T-périodique est appelé la période principale de f, et le nombre $\omega = \frac{2\pi}{T} \in (\mathbb{R}_+^*)^d$ est appelé la fréquence principale de f.

Exemple 28. *La distribution $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$ est 1-périodique sur $\mathbb{R}$.*

Exemple 29. *Une fonction $f_{[0,T]} \in L^1([0,T])$ définit une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ invariante par les translations $x \mapsto x + k \cdot T$ avec $k \in \mathbb{N}^d$ par*

$$f(x + k \cdot T) = f(x).$$

Une fonction obtenue par la construction ci-dessus est appelée fonction localement intégrable T-périodique.

Exemple 30. *Les fonctions* $\cos(n\omega x)$*,* $\sin(n\omega x)$ *et* $e^{in\omega x}$ *sont* T*-périodiques pour* $T = \frac{\omega}{2\pi}$*. Ce sont en fait les blocs de base à partir desquels on peut reconstruire toutes les fonctions* T*-périodiques* $f(x)$ *suffisamment régulières, comme sommes de leur série de Fourier*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k(f)e^{i(k\omega)\cdot x}.$$

Définissons maintenant les classes de fonction test adaptées à l'étude systématique de la transformée de Fourier des distributions T-périodiques.

Définition 34. *On note* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d/T\mathbb{Z}^d)$ *l'espace des fonctions lisses* $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *qui sont* T*-périodiques, i.e., qui vérifient*

$$\tau_{k*T}(\varphi) = \varphi$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$*. On note* $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$ *l'espace des fonctions*

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{Z}^d & \to & \mathbb{C} \\ & k & \mapsto & a_k \end{array}$$

qui vérifient

$$\|k^m a_k\|_\infty < \infty$$

pour tout $m \in \mathbb{N}^d$*. On munit l'espace* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d/T\mathbb{Z}^d)$ *de la famille de seminormes*

$$p_m(\varphi) := \|\varphi^{(m)}(x)\|_{\infty,[0,T]}$$

et $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$ *de la famille de seminormes*

$$p_m((a_k)) = \|k^m a_k\|_\infty.$$

On peut envoyer $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$ dans $C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ par l'application

$$(a_k) \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k\delta_{\frac{k}{T}}.$$

Théorème 22. *Les distributions associées aux fonctions dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d/T\mathbb{Z}^d)$ *et dans* $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$ *sont tempérées et la transformée de Fourier induit un isomorphisme*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d/T\mathbb{Z}^d) \leftrightarrows \mathcal{S}(\mathbb{Z}^d) : \mathcal{F}^{-1}$$

donné par

$$\mathcal{F}(\varphi) = (a_k(\varphi))$$

avec

$$a_k(\varphi) = \frac{1}{|T|_*}\int_{[0,T]} \varphi(x)e^{-2i\pi k\frac{x}{T}}dx,$$

et

$$\mathcal{F}^{-1}((a_k)_k)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k e^{2i\pi\frac{kx}{T}}.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d/T\mathbb{Z}^d)$. C'est une fonction localement intégrable, donc elle définit une distribution. On démontre que cette distribution est tempérée en utilisant la suite d'estimations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \langle [f], \varphi \rangle & \leq & \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)\varphi(x)| dx \\ & \leq & \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{[0,T]} |f(x)\varphi(x+kT)| dx \\ & \leq & \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{[0,T]} |f(x)| \frac{1+(x+kT)^{2N}}{\min_{x \in [0,T]}(1+(x+kT)^{2N})} |\varphi(x+kT)| dx \\ & \leq & \|(1+x^{2N})\varphi(x)\|_\infty \cdot \left(\int_{[0,T]} f(x)dx\right) \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{1+\min_{x \in [0,T]}(1+(x+kT)^{2N})} \end{array}$$

et le fait que la série de droite est convergente (pour N nettement plus grand que n, disons) pour conclure que

$$\langle [f], \varphi \rangle \leq C \cdot \|(1+x^{2N})\varphi(x)\|_\infty.$$

Un calcul similaire nous donne que la transformée de Fourier de $[f]$ est donnée par

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle = \int_{[0,T]} f(x) \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}(\varphi)(x-kT) dt.$$

La formule de sommation de Poisson de la proposition 16, qui s'écrit, après modulation, sous la forme

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}(\varphi)(x-kT) = \frac{1}{|T|_*} \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \varphi\left(\frac{m}{T}\right) e^{-im\frac{2\pi x}{T}},$$

nous donne

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{m}{T}\right) \left[\frac{1}{|T|_*} \int_{[0,T]} f(x) e^{-2i\pi m \frac{x}{T}} dx\right] = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} a_m(f) \delta_{\frac{m}{T}}(\varphi).$$

Le fait que la distribution associée à $(a_k) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$, donnée par

$$\sum a_k \delta_{\frac{k}{T}},$$

soit de Schwartz, découle essentiellement de la définition de $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$. La formule pour la transformée de Fourier inverse découle directement de la continuité de la transformée de Fourier, qui permet d'écrire

$$\mathcal{F}^{-1}((a_k)_k)(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \mathcal{F}^{-1}(\delta_{\frac{k}{T}})(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k e^{2i\pi \frac{kx}{T}}.$$

La continuité des deux applications par rapport aux seminormes qu'on s'est donné découle, comme dans le cas général, du fait que la dérivation est remplacée par la multiplication par une variable par transformation de Fourier. □

Corollaire 4. *Si on définit par dualité continue les espaces de distributions de Schwartz $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d/T\mathbb{Z}^d)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$, on a un isomorphisme*

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d/T\mathbb{Z}^d) \xrightarrow{\sim} C^{-\infty}_{T\text{-}per}(\mathbb{R}^d)$$

entre le dual des fonctions lisses T-périodiques et les distributions T-périodiques (qui sont forcément de Schwartz). La transformée de Fourier induit un isomorphisme

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d/T\mathbb{Z}^d) \leftrightarrows \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d) : \mathcal{F}^{-1}.$$

La transformée de Fourier d'une distribution T-périodique $f \in C^{-\infty}_{T\text{-}per}(\mathbb{R}^d)$ est donnée par

$$\langle \mathcal{F}(f), \varphi\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle f_T, e^{-2i\pi k\frac{x}{T}}\rangle \delta_{\frac{k}{T}}$$

avec f_T associée à f par l'isomorphisme ci-dessus.

Démonstration. Pour montrer qu'une distribution T-périodique f (au sens de la définition 33) peut être évaluée sur une fonction test T-périodique, on a besoin de définir une fonction lisse auxiliaire $\alpha_T \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$, dite *unitaire*, i.e., vérifiant

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \tau_{k*T}\alpha_T = 1.$$

On définira alors un élément f_T du dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d/T\mathbb{Z}^d)$ par

$$\langle f_T, \varphi\rangle := \langle f, \alpha_T\varphi\rangle.$$

Inversement, si g est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d/T\mathbb{Z}^d)$, on définit une distribution T-périodique dans $C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\langle \tilde{g}, \varphi\rangle := \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle g, (\tau_{k*T}\alpha_T)\cdot\varphi\rangle,$$

et ces deux applications sont inverses l'une de l'autre. Il est possible de montrer que cette construction ne dépend pas du choix de la fonction unitaire α_T. Pour construire α en dimension $n = 1$, on choisit $\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\beta(x) = 0$ si $x \leq 0$, $\beta(x) = 1$ si $x \geq T$, et $0 \leq \beta(x) \leq 1$ pour $x \in [0, T]$. Ce type de fonction a été construite lors de la construction d'une fonction test non triviale dans l'exemple 15. On pose ensuite

$$\alpha(x) = \beta(x)(1 - \beta(x - T)) = \begin{cases} 0 \text{ pour } x \leq 0 \\ 1 \text{ pour } x = T \\ 0 \text{ pour } 2T \leq x \end{cases}$$

Le cas de la dimension $n > 1$ s'obtient en prenant un produit α des fonctions construites pour chacun des intervalles $[0, T_i]$ dont l'intervalle de période $[0, T]$ est le produit. La deuxième partie de l'énoncé découle de la continuité de la transformée de Fourier périodique du théorème 22. □

Exemple 31. *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ est une fonction T-périodique, on lui associe la distribution $[f]_T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d/T\mathbb{Z}^d)$ définie sur une fonction test T-périodique $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d/T\mathbb{Z}^d)$ par*

$$\langle [f]_T, \varphi\rangle := \frac{1}{|T|_*}\int_{[0,T]} f(x)\varphi(x)dx.$$

Alors la formule d'inversion de Fourier pour la distribution associée $[f] \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ s'écrit

$$[f] = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k\delta_{\frac{k}{T}}$$

avec

$$a_k = \langle [f]_T, e^{-2i\pi k\frac{x}{T}}\rangle = \frac{1}{|T|_*}\int_{[0,T]} f(x)e^{-2i\pi k\frac{x}{T}}dx.$$

6.2 Convergence et régularité des séries de Fourier

On peut ainsi décrire f comme la transformée de Fourier inverse de $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$ de sa série de Fourier. Dans certains cas, cette série est convergente comme série de fonctions, et pas seulement dans les distributions.

Théorème 23. *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique localement intégrable.*

1. *Si $f_{|[0,T]} \in L^2([0,T])$, alors la série de Fourier de f converge et on a*
$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(f)e^{ik\omega x}$$
dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

2. *(Parseval) De plus, toujours si $f_{|[0,T]} \in L^2([0,T])$, la fonction*
$$\begin{array}{cccc} a(f): & \mathbb{Z}^d & \to & \mathbb{C} \\ & k & \mapsto & a_k(f) \end{array}$$
est dans $L^2(\mathbb{Z}^d)$, et on a
$$\|a(f)\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |a_k(f)|^2 = \int_{[0,T]} |f(x)|^2 dx = \|f_{|[0,T]}\|_2^2,$$
i.e., la transformée de Fourier périodique induit un isomorphisme
$$c : L^2_{T-per}(\mathbb{R}^d) \leftrightarrows L^2(\mathbb{Z}^d) : c^{-1}$$
d'espaces de Hilbert [1].

3. *(Dirichlet) Si $n = 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable (donc continue) au point t, alors on a une égalité de nombres complexes*
$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(f)e^{ik\omega x}.$$
Plus généralement, si f est dérivable et continue à gauche et à droite en x, alors on a
$$\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(f)e^{ik\omega x}.$$

Proposition 16. *(Formule de sommation de Poisson) La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac. Plus précisément, on a*
$$\mathcal{F}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \delta_{\frac{k}{T}}\right) = |T|_* \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{kT}.$$

1. On aura pris soin de définir $L^2_{T-per}(\mathbb{R}^d)$ comme la completion de l'espace $C^0_{T-per}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues T-périodiques sur $\mathbb{R}^d$, pour la norme $\|f\|_{2,T} := \sqrt{\int_0^T |f|^2(x)dx}$. Cet espace s'identifie à l'espace de Hilbert $L^2([0,T])$.

Démonstration. On se ramène au cas de la dimension $n = 1$ en utilisant qu'un produit tensoriel de Dirac est un Dirac. Considérons la fonction T-périodique "en dents de scie" définie par $f(x) = \frac{T}{2} - x$ si $0 < x < T$, et $f(0) = 0$. Les coefficients de Fourier de f sont $a_0 = 0$, $a_n = \frac{-i}{n\omega}$ pour $n \neq 0$. Cette fonction satisfait les hypothèses du théorème 23 et la somme de sa série de Fourier vaut, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\omega} \sin(n\omega x).$$

En dérivant cette identité en en utilisant la formule des sauts, on obtient

$$-1 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} T\delta_{kT} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\cos(n\omega x).$$

Ceci implique l'égalité

$$T\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{kT} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-in\omega x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}\left(\delta_{\frac{n}{T}}\right),$$

qui implique le résultat souhaité, à cause de la continuité de la transformée de Fourier (qui permet de la faire commuter avec une somme convergente de distributions). □

Proposition 17. *Soit*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ik\omega x}.$$

1. *Si* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|$ *converge, alors la série de Fourier converge et* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *Si* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |ka_k|$ *converge, alors* $f \in C^1(\mathbb{R})$ *et*

$$f'(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (ik\omega) a_k e^{ik\omega x}$$

   pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. *Si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la série* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k^n c_k|$ *converge, alors* $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, *et*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (ik\omega)^n a_k e^{ik\omega x}$$

   pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6.3 Equations différentielles avec conditions aux limites périodiques

Les séries de Fourier permettent de résoudre des équations différentielles avec des conditions aux limites et second membres périodiques. Plus précisément, on se donne un opérateur différentiel à coefficients constants

$$P(\partial) = \sum_{n\leq m} a_n \partial^n,$$

avec $a_m \neq 0$ et on chercher une solution de l'équation

$$P(\partial)f = g$$

avec g périodique de période T et les conditions $\partial^k f(0) = \partial^k f(T)$ pour $0 \leq k < m$. Dans les bons cas, on montre que ce type de problème est bien posé et on le résoud en utilisant la proposition suivante.

Proposition 18. *Si f est C^k et T-périodique, les coefficients de Fourier de ses dérivées sont donnés par*

$$c_k(f^{(n)}) = (ik\omega)^n c_k(f).$$

On peut ensuite écrire $f = \sum c_k(f)e^{ik\omega x}$ et $g = \sum c_k(g)e^{ik\omega x}$ et l'équation différentielle donne une relation entre les $c_k(f)$ et les $c_k(g)$ qui est

$$P(ik\omega)c_k(f) = c_k(g).$$

Chapitre 7

Applications au traitement du signal

Le but de ce chapitre est, d'une part, de fournit un lexique qui nous permettra de traduire ce que l'on a appris sur les distributions dans le langage du traitement du signal, et d'autre part de présenter les notions de base de ce domaine.

Pour un traitement détaillé des notions abordées dans ce chapitre, on se réfère au polycopié [7], dont il est largement inspiré.

Notation : Il est fréquent, en physique comme en traitement du signal, de traiter la distribution de Dirac δ_τ comme si c'était une fonction, et de l'écrire $\delta(t-\tau)$.

De nombreux algorithmes de traitement du signal (appelés aussi *filtres*) tels que la transmission par modulation d'amplitude, le débruitage de signaux stationnaires ou le codage par prédiction, s'implémentent par des opérateurs linéaires continus

$$L : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

(éventuellement définis seulement sur des sous-espaces).

L'intérêt de ce point de vue distributionnel sur le traitement du signal est qu'il permet de composer les filtres et les différentes opérations sur le signal (filtrage analogique, échantillonnage et filtrage numérique) en composant simplement les opérateurs linéaires correspondants sur les distributions.

7.1 Filtres généraux

Nous proposons ici un lexique permettant de faire le lien entre la théorie des distributions et le langage du traitement du signal.

Définition 35 (Terminologie)**.** *Commençons par fixer la terminologie du domaine.*

1. *Un* signal *est une distribution f dans $C^{-\infty}(\mathbb{R})$ (souvent supposée tempérée).*
2. *Un* filtre *est un opérateur linéaire*

$$L : C^{-\infty}(\mathbb{R}) \to C^{-\infty}(\mathbb{R})$$

(éventuellement seulement défini sur un sous-espace de $C^{-\infty}(\mathbb{R})$) continu et homogène dans le temps i.e., de la forme

$$L(f) = h * f$$

pour un certain $h \in C^{-\infty}(\mathbb{R})$.

3. *On dit que le signal (resp. le filtre) est* analogique *s'il est donné par une fonction localement intégrable f (souvent supposée continue).*
4. *On dit que le signal (resp. le filtre) est* discret *s'il est à support dans un sous-ensemble discret $D \subset \mathbb{R}$. Il est de plus dit* discret uniforme *s'il existe $T > 0$ tel que son support soit $D = T\mathbb{Z}$. (il est alors souvent donné sous la forme d'un peigne de Dirac*
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\delta_{Tn},$$
pour $(f(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de valeurs complexes).
5. *On dit que le signal (resp. le filtre) est* fini *s'il est à support fini (et, s'il est discret et uniforme, souvent donné sur un intervalle de support $[0, TN[$ sous la forme*
$$\sum_{n=0}^{N-1} f(n)\delta_{Tn}$$
pour N un entier positif et $(f(n))_{0\leq n<N}$ une suite finie de nombres complexes).
6. *Un* échantillonnage *est un opérateur linéaire de passage d'un signal analogique à un signal discret (resp. fini). Il est uniforme s'il est donné sur un signal f par l'opérateur linéaire de multiplication par le peigne de Dirac $Ш_T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{nT}$ (resp. le peigne de Dirac tronqué $\sum_{n=0}^{N-1} \delta_{nT}$).*
7. *La distribution $h = L\delta_0$ est appelée la* réponse impulsionnelle du filtre.
8. *Un filtre est dit*
   (a) causal *si le support de sa réponse impulsionnelle h est inclus dans $\mathbb{R}_+$ (ceci revient à dire que $Lf(t)$ ne dépend que des valeurs $f(u)$ pour $u < t$),*
   (b) stable *s'il envoie les fonctions bornées sur les fonctions bornées.*

Exemple 32. *Voyons d'abord quelques filtres analogiques.*

1. *Un système d'amplification par λ et de délai τ est défini par*
$$L(f(t)) = \lambda f(t - \lambda).$$
La réponse impulsionnelle de ce filtre est $h(t) = \lambda\delta(t - \lambda) = \lambda\delta_\tau$.
2. *La moyenne uniforme de $f(t)$ dans un voisinage de taille T est*
$$L[f(t)] = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} f(u)du.$$
Sa réponse impulsionnelle est donnée par $h(t) = \frac{1}{T}\mathbb{1}_{|t|\leq T/2}$.
3. *Une moyenne pondérée correspond à une réponse impulsionnelle $h(t)$ telle que*
$$\int_{\mathbb{R}} h(u)du = 1.$$
L'intégrale
$$L[f(t)] = \int_{\mathbb{R}} h(u)f(t - u)du$$
peut être interprétée comme une moyenne pondérée par $h(u)$ de $f(u)$ ou voisinage de t.

7.2 Fonction de transfert et filtres passe-bande

Dans cette section, et dans la suite de ce chapitre, on supposera que les filtres et les signaux sont des distributions tempérées, i.e., dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, afin de pouvoir prendre leur transformée de Fourier.

Définition 36. *La* fonction de transfert *du filtre $f \mapsto h * f$ est la transformée de Fourier $\hat{h} = \mathcal{F}(h)$.*

Lorsque cela fait sens, on peut calculer la transformée de Fourier d'un filtrage

$$\mathcal{F}(h * f) = \mathcal{F}(h) \cdot \mathcal{F}(f)$$

et la formule d'inversion nous redonne le filtre à partir de sa fonction de transfert par

$$h * f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(h * f)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(h) \cdot \mathcal{F}(f)).$$

Cette dernière expression joue un rôle essentiel en traitement du signal, puisqu'elle permet, en choisissant convenablement la fonction de transfert $\mathcal{F}(h)$, d'isoler les composantes du signal dans différentes bandes de fréquences.

Exemple 33. *L'isolation des composantes du signal dans certaines bandes de fréquences est illustrée par les deux exemples suivants.*

1. *Un* filtre passe-bas idéal *a une fonction de transfert définie par*

   $$\mathcal{F}(h_0) = \mathbb{1}_{|\omega| \leq \omega_c}.$$

   Il élimine toutes les fréquences au-delà de ω_c. La réponse impulsionnelle de ce filtre est

   $$h_0(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}.$$

   La fonction h_0 n'étant ni intégrable ni à support dans $\mathbb{R}_+$, le filtre n'est ni causal ni stable.

2. *Un* filtre passe-bande idéal *a une fonction de transfert qui supprime toute composante fréquentielle en dehors de deux intervalles symétriques par rapport à $\omega = 0$, donné par*

   $$\mathcal{F}(h_1) = \mathbb{1}_{\omega_0 - \omega_c < |\omega| < \omega_0 + \omega_c}.$$

   On peut déduire un tel filtre d'un filtre passe-bas par

   $$\mathcal{F}(h_1)(\omega) = \mathcal{F}(h_0)(\omega - \omega_0) + \mathcal{F}(h_0)(\omega + \omega_0),$$

   et on en déduit

   $$h_1 = 2\cos(\omega_0 t)\frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}.$$

7.3 Filtrage analogique par circuits electroniques

Un filtrage linéaire analogique est le plus souvent implémenté avec un circuit électronique, le signal $f(t)$ étant la différence de potentiel à l'entrée du circuit et le signal $g(t) = L(f(t))$ la différence de potentiel à la sortie. Ce type de circuit (VLSI) relie les différences de potentiels à l'entrée et à la sortie par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$a_N \partial_t^N g(t) + \cdots + a_0 g(t) = b_M \partial_t^M f(t) + \cdots + b_0 f(t).$$

On suppose que $f(t)$ est causal, i.e., à support dans $\mathbb{R}_+$.

Par transformée de Fourier dans l'équation, on obtient

$$\hat{h}(\omega) = \frac{\hat{g}(\omega)}{\hat{f}(\omega)} = \frac{b_M (i\omega)^M + \cdots + b_0}{a_N (i\omega)^N + \cdots + a_0}.$$

Cette fonction de transfert est aussi appelée impédance du circuit.

L'idée est alors d'approcher le filtre passe-bas idéal, dont la fonction de transfert est la fonction indicatrice $\hat{h}_0(\omega) = \mathbb{1}_{|\omega| \leq \omega_c}$, par une suite $\hat{h}_n(\omega)$ de fractions rationnelles correspondant à des circuits électroniques. Pour un n assez grand, le circuit éléctronique correspondant implémentera donc relativement bien le filtre passe-bas idéal.

7.4 Modulation d'amplitude et superposition de signaux

Pour transmettre plusieurs signaux simultanément sur un unique canal de transmission, on se donne N signaux f_n, et on suppose qu'ils sont déjà passés dans un filtre passe bande (qui a découpé les fréquences pertinentes, e.g., audibles, du spectre), i.e., que leur transformées de Fourier sont toutes à support dans $[-b, b]$. Par translation en Fourier par nb (modulation de fréquence), on peut tranformer chacun des signaux f_n en une fonction f_n^t à support dans $[-b + nb, b + nb]$. En recollant tous ces intervalles et en additionnant les signaux, on obtient un nouveau signal F à support dans $[0, b + Nb]$ qu'on peut recentrer par modulation.

On retrouve alors chaque f_n^t par filtrage passe-bande, puis chaque f_n par démodulation (translation inverse en Fourier).

7.5 Echantillonnages

L'approche la plus simple pour discrétiser une fonction $f(t)$ est d'éffectuer un échantillonnage avec un intervalle T uniforme, en enregistrant les valeurs $\{f(nT)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Pour retrouver f à partir de sa discrétisation, on interpolle les valeurs enregistrées.

Définition 37. *Un* échantillonnage *est un opérateur linéaire (partiellement défini sur les signaux analogiques)*

$$E : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

à valeurs dans les signaux dont le support est discret. L'échantillonnage uniforme d'un signal analogique correspond à la distribution

$$E_T(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\delta_{nT} = f\cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{nT},$$

qu'on obtient en multipliant f par un peigne de Dirac $Ш_T := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{nT}$ de période T. L'échantillonnage uniforme fini de longueur N d'un signal analogique est donné par

$$E_{T,N}(f) = f\cdot \sum_{n=0}^{N-1} \delta_{nT} = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT)\delta_{nT}.$$

Il est souvent remplacé par la donnée équivalente de l'échantillonnage discret périodisé correspondant

$$E_{T,N,per}(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_{kNT} E_{T,N}(f),$$

qu'on utilisera pour définir les filtres et la transformée de Fourier finis.

Si f est bornée, $f_d = E_T(f)$ est une distribution tempérée, dont la transformée de Fourier est la série de Fourier $\frac{2\pi}{T}$-périodique

$$\hat{f}_d(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)e^{-inT\omega}.$$

La formule de sommation de Poisson permet de montrer que la transformée de Fourier

$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right)$$

de l'échantillonnage d'un signal est obtenue par périodisation de sa transformée de Fourier.

Théorème 24 (Nyquist)**.** *Si la transformée de Fourier du signal $f(t)$ est à support dans $[-\pi/T, \pi/T]$, le signal $f(t)$ peut être reconstruit par la formule*

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)h_T(t-nT)$$

avec

$$h_T(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{(\pi t/T)}.$$

Une variante de ce théorème est utilisée dans l'encodage des mp3 : on retire les fréquences inaudibles d'un signal décrit sur un intervalle borné de temps (qu'on appelera un extrait du signal) par un filtre passe bande et l'extrait est alors retrouvé à partir de cette discrétisation tronquée grâce au théorème. Comme un filtre passe-bande idéal n'est pas implémentable électroniquement, il est cependant nécessaire d'étudier l'erreur introduite par une approximation électronique de ce dernier (voir [7], 3.1.2 pour plus de détails).

7.6 Filtrage des signaux discrets

La théorie des distributions permet de traiter dans un cadre uniforme les signaux analogiques et numériques. Nous avons vu qu'un signal discrétisé était de la forme

$$f_d = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\delta_{nT}.$$

Un filtre $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est dit discret s'il est aussi de cette forme, i.e.,

$$h = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n)\delta_{nT}.$$

On peut calculer explicitement les coefficients de la convolution

$$h * f_d = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (h * f_d)(n)\delta_{nT}$$

des distributions à support discret par la formule de convolution discrète

$$(h * f_d)(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k) f_d(n-k).$$

Les filtres discrets causals et stables sont définis comme avant. Un filtre discret est causal (resp. stable) si et seulement si $n \mapsto h(n)$ est à support dans $\mathbb{N}$ (resp. est dans $\ell^1(\mathbb{Z})$).

On va supposer pour simplifier que la période T vaut 1.

La transformée de Fourier d'un signal discret f est donnée par la série de Fourier

$$\hat{f}_d(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)e^{-in\omega}$$

et si $\hat{h} = \mathcal{F}(h)$ est la fonction de transfert, on a

$$\mathcal{F}(h * f) = \mathcal{F}(h) \cdot \mathcal{F}(f).$$

La formule d'inversion de Fourier montre qu'un signal filtré a pour coefficients

$$(f * h)(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{h}(\omega)\hat{f}(\omega)e^{in\omega}d\omega.$$

La fonction de transfert $\hat{h}$ d'un filtre discret étant 2π-périodique, elle est spécifiée sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Ceci permet de calculer la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas discret idéal par

$$h_0(n) = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n},$$

et celle d'un filtre passe-bande discret idéal par

$$h_1(n) = 2\cos(\omega_0 n)h_0(n).$$

On aurait aussi pu les retrouver comme coefficients du produit des filtres analogiques correspondants par le peigne de Dirac Ш_T.

Pour synthétiser des filtres discrets (filtrage numérique), on impose, comme dans le cas continu, des conditions d'atténuation sur le gain du filtre $|\hat{h}(e^{i\omega})|$. Le problème est de calculer les convolutions correspondantes avec le moins d'opérations possibles. On souhaite aussi que la convolution se calcule par un nombre fini d'opération par échantillon. Comme dans le cas des filtres continus, les circuits électroniques permettant de synthétiser ces filtres sont approchés par des fonctions de transfert de la forme

$$\hat{h}(\omega) = P(e^{-i\omega})/Q(e^{-i\omega})$$

avec P/Q une fraction rationnelle correspondant à l'équation différentielle associée au circuit électronique.

On peut aussi utiliser la transformée de Mellin discrète, dont la variable est $z = e^{i\omega}$, et qui est définie dans une partie du plan complexe.

7.7 Signaux finis

Les signaux finis sont des signaux discrets $f(n)$ définis sur un domaine fini $0 \leq n < N$. On les identifie souvent au signal périodisé correspondant, défini par

$$f_{per}(n) = f(n) \quad \mod N.$$

correspondant.

Ceci permet de définir la convolution circulaire en utilisant la convolution discrète des fonctions périodiques

$$f \circledast h(n) := (f_{per} * h_{per})_{|[0,N[} = \sum_{p=0}^{N-1} f(p) h_{per}(n-p).$$

Les vecteurs propres de cette convolution sont les exponentielles discrètes $e^{\frac{2ik\pi}{N}n}$ et les valeurs propres correspondantes sont données par la transformée de Fourier discrète

$$\hat{h}(k) := \sum_{p=0}^{N-1} h(p) e^{\frac{2ik\pi}{N}p},$$

qui correspond à la transformée de Fourier discrète du signal discret périodique h_{per}.

Il existe un algorithme, appelé transformée de Fourier rapide (FFT), qui permet de calculer rapidement la transformée de Fourier. Cet algorithme joue un rôle essentiel dans la synthèse des filtres en traitement des signaux numériques.

Chapitre 8

Transformée de Fourier-Laplace

Nous allons maintenant étudier les distributions à support dans le demi-espace $\mathbb{R}_+^d$ avec $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ et les solutions d'opérateurs différentiels sur ce domaine. L'analogue de la transformée de Fourier dans ce domaine est donné par la transformée de Fourier-Laplace. C'est une fonction sur l'espace

$$\mathbb{C}_+^d := \{s \in \mathbb{C}^d,\ \mathrm{Re}(s_k) \geq 0 \text{ pour tout } k = 1, \ldots, n\} \subset \mathbb{C}^d.$$

Le lien entre l'espace $\mathbb{R}_+$ et l'espace $\mathbb{C}_+$ est similaire au lien entre l'espace $\mathbb{R}$ des coordonnées x des fonctions et l'espace $\mathbb{R}$ des coordonnées ξ de leur transformée de Fourier : l'un est l'espace des caractères de l'autre.

8.1 Fonctions test pour la transformée de Fourier-Laplace

Si $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}_+^d)$, on définit sa transformée de Fourier-Laplace comme la fonction

$$\mathcal{FL}(\varphi)(s) := \int_{\mathbb{R}_+^d} \varphi(x) e^{-sx} dx$$

avec $s \in \mathbb{C}_-^d$. La transformée de Fourier-Laplace inverse d'une fonction $\psi \in C_c^0(\mathbb{C}_-^d)$ est la fonction

$$\mathcal{FL}^{-1}(\psi)(x) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{C}_+^d} \psi(s) e^{sx} ds.$$

On définit maintenant des espaces $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^d)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{C}_+^d)$ qui sont transformés l'un en l'autre par la transformée de Fourier-Laplace.

Définition 38. *Une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_+^d)$ est une fonction de Schwartz si pour tous $p, q \in \mathbb{N}^d$ et $s \in \mathbb{C}_+^d$, on a*

$$\|x^p \partial_x^q \psi(x) e^{-sx}\|_1 < \infty.$$

Une fonction $\psi : \mathbb{C}_+^d \to \mathbb{C}$ est une fonction de Schwartz si elle est infiniment dérivable par rapport à la variable complexe $s \in \mathbb{C}_+$, et si pour tous $p, q \in \mathbb{N}^d$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on ait

$$\|s^p \partial_s^q \varphi(s) e^{sx}\|_1 < \infty.$$

On munit ces espaces $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^d)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{C}_+^d)$ des familles de seminormes utilisées dans leur définition. Une distribution de Schwartz sur $\mathbb{R}_+^d$ (resp. $\mathbb{C}_+^d$) est un élément du dual continu $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+^d)$ (resp. $\mathcal{S}'(\mathbb{C}_+^d)$).

On peut aussi munir les espaces de fonctions de Schwartz des seminormes uniformes analogues aux seminormes L^1 considérées dans leur définition.

Théorème 25. *La transformée de Fourier-Laplace induit un isomorphisme*

$$\mathcal{FL} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d_+) \leftrightarrows \mathcal{S}'(\mathbb{C}^d_+) : \mathcal{FL}^{-1},$$

et elle transforme la convolution en produit et le produit en convolution.

Démonstration. Ce théorème découle par dualité de l'énoncé analogue sur les fonctions test, qui découle essentiellement du théorème analogue pour la transformée de Fourier, car une fonction test dans $\mathcal{S}(\mathbb{C}_+)$ est déterminée de manière unique par sa valeur au bord dans $\mathcal{S}(i\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{C})$. La transformée de Fourier Laplace composée avec cette valeur au bord est simplement une autre manière d'écrire la transformée de Fourier en utilisant la coordonnée complexe s à la place de la coordonnée totalement imaginaire $2i\pi\xi$. Le théorème de Fubini fournit l'ingrédient nécessaire à la démonstration de la deuxième partie de l'énoncé. □

Exemple 34.

1. *La transformée de Fourier-Laplace de δ_n est e^{ns} et si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est une série entière convergeant sur un disque de rayon* 1*, i.e., vérifiant $\sum_{n\geq 0} |a_n| < \infty$, alors $\sum_{n\geq 0} a_n\delta_n$ est tempérée et sa transformée de Fourier-Laplace est $\sum_{n\geq 0} a_n e^{ns}$.*
2. *La transformée de Fourier-Laplace de la fonction x^n est la fonction*

$$\mathcal{FL}(x^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Remarque 5. *Voici quelques exemples de transformées de Fourier Laplace.*

1. *La transformée de Fourier-Laplace d'une distribution f à support compact sur $\mathbb{R}_+$ est une fonction $\mathcal{FL}(f, s)$ définie et infiniment $\mathbb{C}$-dérivable dans tout le plan complexe (théorème de Paley-Wiener-Schwartz) .*
2. *Les fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ induisent des distributions dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+)$, car*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx\right| \leq \|f(x)e^{sx}\|_1 \cdot \|\varphi(x)e^{-sx}\|_\infty \leq \|f\|_1 \cdot \|\varphi(x)e^{-sx}\|_\infty.$$

   Leur transformée de Fourier-Laplace est (la distribution associée à) une fonction $\mathcal{FL}(f, s)$ analytique sur le demi-espace $\mathbb{C}_+ = \{\mathrm{Re}(s) \geq 0\}$. La valeur au bord $\{\mathrm{Re}(s) = 0\}$ (droite verticale) est égale à un facteur près à la transformée de Fourier de f.
3. *Plus généralement, une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, qui est bornée à l'infini, i.e., telle qu'il existe des constantes $(R, C) \in \mathbb{R}^2_+$ avec, pour tout $x > R$,*

$$|f(x)| \leq C$$

   presque partout, alors f définit une distribution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+)$, et sa transformée de Fourier-Laplace est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\{\mathrm{Re}(s) < 0\}$ et une distribution sur $\{\mathrm{Re}(s) = 0\}$.
4. *Plus généralement, les distributions de Schwartz sur $\mathbb{R}$ à support dans $\mathbb{R}_+$ induisent des distributions dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+)$, et leur transformée de Fourier-Laplace fait tout de même sens et est une fonction $\mathbb{C}$-dérivable dans $\{\mathrm{Re}(s) < 0\}$ et est égale (valeur au bord du demi-espace) à la transformée de Fourier de la distribution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, définie sur la droite verticale*

$$\{\mathrm{Re}(s) = 0\} = \{s = -2i\pi\xi, \xi \in \mathbb{R}\}.$$

8.2 Equations différentielles avec conditions initiales à coefficients constants et transformée de Laplace

Comme la transformée de Laplace transforme la convolution en produit et les opérateurs différentiels en des multiplications par des polynômes (à peu de chose près), elle a pour les équations différentielles avec conditions initiales la même utilité qu'avait la transformée de Fourier pour les équation différentielles : elle permet de les traduire en des équations polynomiales, qu'on peut résoudre dans les distributions, pour ensuite obtenir la solution au problème de départ par transformée de Fourier-Laplace inverse.

Annexe A

Espaces vectoriels normés complets

Le but de ce cours est d'introduire progressivement plusieurs classes de fonctions généralisées ayant de bonnes propriétés. Une des propriétés essentielle qu'on souhaite imposer aux espaces considérés est qu'ils forment des espaces vectoriels complets. Nous allons donc commencer par expliquer brièvement pourquoi cette notion est importante en analyse : elle est nécessaire pour montrer l'existence et l'unicité de solutions à certains problèmes, par la méthode dite "du point fixe", qui garantit la convergence de certaines suites récurrentes, du type

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

vers une limite x qui sera l'unique solution de l'équation

$$f(x) = x.$$

1.1 Relations d'équivalences et quotients

Nous allons utiliser la notion de quotient pour construire rapidement et sans importants prérequis des classes utiles de fonctions. On rappelle ici les définitions de base.

Définition 39. *Une relation binaire sur un ensemble X est un sous-ensemble $R \subset X \times X$. Si $(x, y) \in R$, on écrit xRy. On dit qu'une telle relation binaire est une relation d'équivalence si elle est :*

1. *réflexive : on a xRx pour tout $x \in R$.*
2. *symétrique : si x et y sont tels que xRy, alors yRx.*
3. *transitive : si x, y, z sont tels que xRy et yRz, alors xRz.*

Si (X, R) est un ensemble muni d'une relation d'équivalence, et $x \in R$, on note $R(x)$ la partie de X donnée par les éléments de X qui sont équivalents à x, appelée sa classe d'équivalence :

$$R(x) = \{y \in X,\ yRx\}.$$

L'ensemble quotient X/R est le sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X donné par

$$X/R := \{R(x), x \in X\} \subset \mathcal{P}(X).$$

Exemple 35. *Notons X l'ensemble des étudiants de votre groupe et R la relation donnée par xRy si x et y ont des chaussures de la même couleur. Alors, la classe d'équivalence $R(x)$ d'un étudiant x est l'ensemble des étudiants qui ont les chaussures de la même couleur que x, et l'ensemble quotient X/R s'identifie naturellement à l'ensemble des couleurs des chaussures des étudiants de votre groupe (plus précisément, c'est l'ensemble des groupes de personnes qui ont la même couleur de chaussure).*

On va illustrer cette notion de quotient par deux autres exemples simples dans la section suivante : l'un donné par la construction de l'ensemble des nombres rationnels à partir de l'ensemble des nombres entiers, et l'autre donné par la construction de l'ensemble des nombres réels à partir de l'ensemble des nombres rationnels.

1.2 Nombres réels et complexes

Nous rappelons ici brièvement la définition des nombres réels en termes de suites de Cauchy, car ceci permet de comprendre sur un exemple la notion générale de complétion, qu'on va utiliser pour définir les différents espaces de fonctions intégrables.

Revoyons d'abord sur un exemple simple la notion de quotient d'un ensemble par une relation d'équivalence, qui est à la base de la construction de la plupart des espaces de fonctions définis en théorie de l'intégration.

Un nombre rationnel est un quotient $\frac{p}{q}$ de deux nombres entiers relatifs $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ dont le dénominateur q est non nul. On peut ainsi définir les nombres rationnels comme le quotient

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})/\sim$$

de l'ensemble des paires $(p,q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ par la relation

$$(p,q) \sim (r,s) \Leftrightarrow \frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow ps = rq.$$

On remarque que le terme de droite de cette équivalence n'utilise, pour faire sens, que la notion de produit de deux nombres entiers, ce qui nous permet d'obtenir une définition non circulaire des nombres rationnels à partir de l'ensemble des nombres entiers, muni de sa multiplication. L'inclusion

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$$

des nombres entiers dans les nombres rationnels est donnée par l'application $p \mapsto \frac{p}{1}$. Il est aisé d'étendre l'addition et la multiplication des entiers à des opérations sur les nombres rationnels par

$$\tfrac{p}{q} + \tfrac{r}{s} := \tfrac{ps+qr}{qs} \text{ et } \tfrac{p}{q} \cdot \tfrac{r}{s} := \tfrac{pr}{qs}.$$

L'ordre usuel $\leq$ sur les nombres entiers en induit un, toujours noté $\leq$ sur les nombres rationnels donné, pour q et s positifs, par

$$\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s} \Leftrightarrow ps \leq rq.$$

Ceci nous permet de définir la norme d'un nombre rationnel par

$$|x| = \max(x, -x) \in \mathbb{Q}_+ = \{y \in \mathbb{Q}, y \geq 0\}.$$

Nous allons maintenant pouvoir définir l'ensemble des nombres réels, comme un quotient d'un certain ensemble défini en utilisant la norme des nombres rationnels.

Une suite de Cauchy de nombre rationnels est une suite $(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ dont les termes se “rapprochent quand les indices tendent vers l'infini”. Plus précisément, c'est une suite vérifiant la condition suivante : pour tout nombre rationnel $\epsilon > 0$, il existe un entier $N \geq 0$ tel que pour tous indices entiers $p, q \geq N$, on ait

$$|x_p - x_q| < \epsilon.$$

Nous sommes maintenant en mesure de définir précisément mathématiquement l'ensemble des nombres réels. C'est la complétion de $\mathbb{Q}$ pour sa norme usuelle, i.e., l'ensemble le plus simple qui contient $\mathbb{Q}$ et dans lequel toute suite de Cauchy de nombres rationnels converge.

Définition 40. *L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est la complétion de $\mathbb{Q}$ pour sa norme $|\cdot| : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_+$, c'est à dire le quotient de l'ensemble* $\mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ *des suites de Cauchy par la relation $\sim_0$ qui identifie deux suites de Cauchy (x_n) et (y_n) si la suite $(x_n - y_n)$ tend vers 0 :*

$$\mathbb{R} := \mathrm{Cauchy}(\mathbb{Q}, |\cdot|)/\sim_0 .$$

On montre aussi que $\mathbb{R}$ est muni d'une addition, d'une multiplication et d'un ordre induit par celui de $\mathbb{Q}$.

L'objet obtenu est appelé le corps ordonné des nombres réels, et il est muni d'une norme

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$$

appelée sa norme usuelle, et définie par $|x| = \max(x, -x)$. L'inclusion

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$$

des nombres rationnels dans les nombres réels est obtenue en envoyant un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ sur la suite constante $(x_n) = (\frac{p}{q})$, qui est bien une suite de Cauchy.

On montre aussi que toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente.

Exemple 36. *1. Il est aisé de montrer (en utilisant l'unicité, due à Euclide, de la décomposition des nombres entiers en produits de nombres premiers), que le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. On peut par contre montrer qu'il est réel en construisant une suite de Cauchy de nombres rationnels $(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui l'approche. Par exemple, par le procédé de dichotomie dans l'intervalle* $[1, 2]$*, on peut approcher cette solution positive de $x^2 - 2 = 0$ par une suite (x_n) de rationnels vérifiant $x_n^2 - 2 > 0$. Du point de vue de la définition des nombres réels donnée ci-dessus, le nombre réel $\sqrt{2}$ est défini comme la classe*

$$\sqrt{2} := [(x_n)] \in \mathbb{R}$$

de cette suite de Cauchy qui est la seule solution réelle positive de l'équation algébrique $x^2 = 2$.

2. *Le nombre e n'est pas rationnel, mais il est approché par la suite de Cauchy fournie par sa définition, qui est de terme général*

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

3. *On peut aussi montrer que le nombre π n'est pas rationnel (il n'est même pas algébrique, i.e., solution d'une équation polynomiale rationnelle). Les grecs ont approché sa valeur par des périmètres de polygône réguliers inscrits dans le cercle, mais on peut donner une formule explicite, due à Leibniz, pour le terme général d'une suite de Cauchy définissant π, en posant :*

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{4(-1)^k}{2k+1}.$$

Le corps des nombres complexes est le plus petit corps contenant celui des nombres réels et muni d'une solution i à l'équation

$$i^2 + 1 = 0.$$

Définition 41. *L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est l'ensemble*

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$$

quotient de l'ensemble $\mathbb{R}[x]$ des polynômes à coefficients réels, obtenu en identifiant deux polynômes à coefficients réels $R, S \in \mathbb{R}[x]$ si on peut diviser leur différence par $x^2 + 1$, i.e., si il existe un polynôme réel $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que

$$R - S = Q(x^2 + 1).$$

On note $i = [x]$ la classe de la variable x dans ce quotient.

On montre que $\mathbb{C}$ est aussi muni d'une addition et d'une multiplication compatible à celle de $\mathbb{R}$, et qu'en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, il est engendré par 1 et i, et s'identifie donc au plan $\mathbb{R}^2$. On peut alors étendre la norme usuelle sur $\mathbb{R}$ à une norme sur $\mathbb{C}$ en utilisant la norme euclidienne

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

et on montre aussi que toute suite de Cauchy de nombres complexes est convergente.

1.3 Complétion des espaces vectoriels normés et théorème du point fixe

Définition 42. *Une seminorme sur un espace vectoriel V sur $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ est une application*

$$|\cdot| : V \to \mathbb{R}_+$$

qui vérifie

1. *l'inégalité triangulaire*
$$|u+v| \leq |u| + |v|$$
pour tous $u, v \in V$,
2. *la condition d'homogéneité*
$$|\lambda u| = |\lambda| \cdot |u|$$
pour tous $\lambda \in K$ *et* $u \in V$.

On dit qu'une seminorme est une norme si elle vérifie de plus l'implication
$$|u| = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Nous sommes maintenant en mesure de définir une notion de suite de Cauchy (suite dont les termes se rapprochent à l'infini) et de complétion (espace naturel faisant converger les suites de Cauchy de l'espace donné) pour un espace vectoriel seminormé général.

Définition 43. *Une suite de Cauchy dans un espace vectoriel seminormé* $(V, |\cdot|)$ *est une suite* (x_n) *d'éléments telle que pour tout réel* $\epsilon > 0$, *il existe un entier* $N \geq 0$ *tel que pour tous indices entiers* $p, q \geq N$, *on ait*
$$|x_p - x_q| < \epsilon.$$
La complétion de l'espace $(V, |\cdot|)$ *est définie comme le quotient*
$$(\hat{V}, |\cdot|) := \mathrm{Cauchy}(V, |\cdot|)/\sim_0$$
de l'espace vectoriel des suites de Cauchy de $(V, |\cdot|)$ *par la relation* $\sim_0$ *qui dit que deux suites de Cauchy sont équivalentes si leur différence tend vers* 0. *On dit qu'un espace vectoriel seminormé est complet s'il s'identifie à sa completion, i.e., si l'application naturelle*
$$i : (V, |\cdot|) \to (\hat{V}, |\cdot|)$$
obtenue en envoyant un élément $v \in V$ *sur la classe de la suite de Cauchy constante* $(v)_{n\in\mathbb{N}}$ *correspondante est bijective et respecte la norme.*

On montre que la complétion d'un espace seminormé est toujours un espace normé et que toute suite de Cauchy d'un espace vectoriel normé complet est convergente.

Remarque 6. *On peut aussi parler de suite de Cauchy dans un espace vectoriel* V *muni d'une famille* $\mathcal{F} = \{|\cdot|_i\}_{i\in I}$ *de seminormes, et donc aussi de la completion d'un tel couple* $(V, \mathcal{F})$ *: une suite est de Cauchy pour la famille* $\mathcal{F}$ *(qu'on appelle aussi une structure uniforme linéaire) si elle est de Cauchy pour chacun de ses éléments, et deux suites de Cauchy* (u_n) *et* (v_n) *sont équivalentes si leur différence* $(u_n - v_n)$ *vérifie*
$$|u_n - v_n|_i \to 0$$
pour tout indice $i \in I$. *Les espaces vectoriels de fonctions les plus généraux qui apparaissent dans la théorie des distributions sont donnés par des "réunions formelles" d'espaces vectoriels complets pour des structures uniformes de ce type.*

Exemple 37. *Voici des exemples qui joueront des rôles fondamentaux dans toutes les constructions à venir.*

1. *Les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets pour leurs normes usuelles.*
2. *Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $C^0([0,1],\mathbb{C})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes est complet pour la norme sup donnée par*

$$\|\varphi\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |\varphi(x)|.$$

   Cette norme est bien définie car toute fonction continue atteint son supremum sur un intervalle fermé borné. Le fait que l'espace des fonctions continues soit complet pour cette norme découle du fait que toute limite uniforme d'une suite de fonctions continues est elle aussi continue.
3. *Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $C^1([0,1],\mathbb{C})$ des fonctions continues et dérivables sur $[0,1]$ à valeurs complexes, dont la dérivée $\varphi^{(1)}$ est de surcroit continue, est complet pour la norme*

$$\|\varphi\|_{\infty,1} := \|\varphi\|_\infty + \|\varphi^{(1)}\|_\infty.$$

Le théorème central sur les espaces complets est le suivant.

Théorème 26 (Du point fixe de Picard)**.** *Soit $(V, |\cdot|)$ un espace vectoriel normé complet et $f : V \to V$ une application contractante, i.e., telle qu'il existe $k < 1$ tel que pour tous $(x, y) \in V^2$, on ait*

$$|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|.$$

Alors, l'équation

$$f(x) = x$$

a une unique solution et elle est limite de n'importe quelle suite de Cauchy (x_n) obtenue de la façon suivante : on fixe $x_0 \in V$, et on pose

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Annexe B

Le théorème des noyaux et les fonctions de Green

Nous allons maintenant évoquer le problème de la résolution des équations différentielles à coefficients variables et sur des domaines plus généraux (par exemple des ouverts ou des compacts) de $\mathbb{R}^d$.

On peut voir, grâce au *théorème des noyau de Schwartz*, un opérateur différentiel

$$P = P(x, \partial) : \begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}^d) & \to & C^{-\infty}(\mathbb{R}^d) \\ \varphi & \mapsto & P(x, \partial)[\varphi] \end{array}$$

comme la donnée d'un noyau K_P (pensé comme la matrice de P) qui est une distribution sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. On retrouve P comme $\varphi \mapsto [\psi \mapsto K_P(\varphi \otimes \psi)]$, qu'on peut aussi écrire $\varphi(x) \mapsto [\psi(y) \mapsto K_P(\varphi(x) \cdot \psi(y))]$. Ainsi, l'opérateur identique

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}^d) & \to & C^{-\infty}(\mathbb{R}^d) \\ \varphi & \mapsto & [\varphi] \end{array}$$

qui est la convolution par δ_0 sur $\mathbb{R}^d$, composée avec l'inclusion des fonctions dans les distributions, a pour noyau la distribution, parfois notée $\delta(x - y)$ par les physiciens, donnée par

$$K_{\mathrm{id}}(\varphi(x, y)) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x, x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \langle \delta_{y=x}, \varphi(x, y) \rangle dx.$$

En effet, on a

$$\langle [\varphi], \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \psi(x) dx = K_{\mathrm{id}}(\varphi \otimes \psi).$$

De même, la dérivation ∂_x a pour noyau

$$K_{\partial_x}(\varphi(x, y)) := \int_{\mathbb{R}^d} \langle \delta_{y=x}, \partial_x \varphi(x, y) \rangle dx.$$

Plus généralement, le noyau d'un opérateur $P = P(x, \partial_x)$ est donné par

$$K_P(\varphi(x, y)) := \int_{\mathbb{R}^d} \langle \delta_{y=x}, P(x, \partial_x) \varphi(x, y) \rangle dx.$$

On est donc amené, pour résoudre l'équation avec second membre, à chercher un opérateur $G : C^\infty(\mathbb{R}^d) \to C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ tel que $P(x, \partial) G = K_{\mathrm{id}}$.

Définition 44. *Une fonction de Green d'un opérateur différentiel $P(x, \partial)$ est une distribution $G(x, y)$ dans $C^{-\infty}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ telle que*

$$P(x, \partial_x)G(x, y) = K_{\mathrm{id}}.$$

Une solution fondamentale d'une opérateur différentiel $P(\partial)$ à coefficients constants est une distribution $E \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$P(\partial)E = \delta_0.$$

Remarquons qu'une solution fondamentale donne une fonction de Green pour $P(\partial)$, en posant

$$\langle G(x, y), \varphi(x, y)\rangle = \langle E, \varphi(x, x)\rangle,$$

mais la notion de fonction de Green est mieux adaptée aux opérateurs à coefficients variables et définis sur des domaines autres que l'espace $\mathbb{R}^d$ tout entier.

Bibliographie

[1] Bernšteĭn, I. N., *Modules over a ring of differential operators. An investigation of the fundamental solutions of equations with constant coefficients*, Funkcional. Anal. i Priložen., 1971.

[2] Nicolas Bourbaki, *Eléments de mathématiques : Intégration*, Hermann, 1973

[3] Marc Briane et Gilles Pages *Théorie de l'intégration : convolution et transformée de Fourier (7ème édition)*, Vuibert, 2018

[4] Joseph Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, 1822.

[5] Pierre-Antoine Guihéneuf and Ayman Moussa, *Intégrale de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^d$, 2021, polycopié.

[6] Nicolas Lerner, *Lecture notes on real analysis*, 2017, polycopié disponible en ligne.

[7] Stéphane Mallat, *Traitement du signal*, Polycopié.

[8] Christinel Mardare *Distributions et analyse de Fourier-Laplace*, Polycopié ST3 2011-2012.

[9] Walter Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 1998.

[10] Laurent Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, 1978.