Algèbre et théorie de Galois - TD4

Exercice 1 : Calculer le corps de décomposition L du polynôme $f = x^3 - 2$ sur $\mathbb{Q}$. Pour les extensions intermédiaire de $L/\mathbb{Q}$ qu'on aura construites, donner leur degré, dire si elles sont galoisiennes et si c'est le cas, calculer leur groupe de Galois.

Exercice 2 : Calculer les automorphismes sur $\mathbb{Q}$ des extensions suivantes :

a) $\mathbb{Q}(\sqrt{-52})$, $\mathbb{Q}(7 + 3i)$.

b) Un corps de décomposition de $P = X^4 - 7$.

Exercice 3 :

a) Calculer la clôture normale L de l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.

b) Décrire la structure du groupe de Galois de $L/\mathbb{Q}$.

c) Calculer explicitement l'action de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ sur les générateurs de l'extension $L/\mathbb{Q}$.

d) Décrire explicitement tous les sous-groupes de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ et dire ceux qui sont normaux.

e) Ecrire explicitement la correspondance de Galois pour $L/\mathbb{Q}$.

Exercice 4 : Calculer l'extension normale L' de l'extension L de $\mathbb{Q}$ engendrée par

a) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$,

b) $\sqrt{3} + i$,

c) $\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$,

d) $\sqrt[3]{2} + i$,

e) $\sin(\frac{2\pi}{5})$,

f) $e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $n > 1$,

g) $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$,

h) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$,

i) une racine de $x^6 + 3$.

On donnera aussi son groupe de Galois, et le cas échéant, les sous-groupes de ce dernier et les extensions intermédiaires de $L/\mathbb{Q}$.

Exercice 5 : Calculer le polynôme cyclotomique $\Phi_{28}(X)$.

Exercice 6 : Calculer le groupe de Galois (d'un corps de décomposition) des polynômes suivants :

a) $x^2 - 2$,

b) $(x^2 - 2)(x^2 - 3)$,

c) $x^3 - 1$,

d) $x^4 - 6$,

e) $(x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2x - 7)(x^2 - 2x + 2)$,

f) $x^3 - 2$ et $x^3 + 2$,

g) $x^4 - 1$ et $x^4 + 1$,

h) $x^4 + 2$.

Exercice 7 : (Groupe de Galois non résoluble) Montrer que le groupe de Galois de

$$f(x) = x^5 - 10x + 5$$

est isomorphe à S_5.

Exercice 8 : (Extensions d'anneaux et revêtements de schémas)

a) Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux (commutatifs unitaires dans cet exercice). Montrer que pour tout anneau C, f induit une application naturelle $\mathrm{Hom}(f, C) : \mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom}(A, C)$. La correspondance

$$\underline{A} : C \mapsto \underline{A}(C) := \mathrm{Hom}(A, C)$$

qui a un anneau C associe l'ensemble des morphismes d'anneaux de A dans C est appelé le *schéma* de A. L'ensemble $\underline{A}(C) := \mathrm{Hom}(A, C)$ est appelé ensemble des points de A à valeurs dans C.

b) Soient $A_2 = \mathbb{Q}[x, y]$, $C = \mathbb{Q}[x][y]/(y^2 - x)$ et $D = \mathbb{Q}[x]$. Décrire les ensembles de points des schémas $\underline{A}_2$, $\underline{C}$ et $\underline{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et les dessiner. Expliquer les notations $\underline{A}_2$, $\underline{C}$ et $\underline{D}$ pour ces schémas.

c) On note $f : A_2 \to B$ et $g : A_2 \to C$ les applications de projection $(g(y) = 0)$ et $p : D \to C$ l'inclusion naturelle. Décrire les applications correspondantes entre les points réels $\underline{C}(\mathbb{R})$, $\underline{D}(\mathbb{R})$ et $\underline{A}_2(\mathbb{R})$ et les dessiner.

d) Pour quels polynômes irréductible P de $D = \mathbb{Q}[x]$ l'application $p : D/(P) \to C/(P)$ est-elle une extension de corps. Quel est alors son degré ? Est-elle normale ? Que dire si ce n'est pas une extension de corps ?

e) Montrer que l'application $\mathbb{C} \to \underline{C}(\mathbb{C}) \subset \underline{A}_2(\mathbb{C})$ donnée par $z \mapsto (z^2, z)$ est bijective et que $p : \underline{C}(\mathbb{C}) \to \underline{D}(\mathbb{C})$ s'identifie à l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $z \mapsto z^2$. Représenter géométriquement cette application.

f) Calculer le groupe des automorphismes du morphisme d'anneaux $p : D \to C$. On nommera ce groupe le *groupe de Galois* du revêtement $p : \underline{C} \to \underline{D}$.