Algèbre et théorie de Galois - TD6

Exercice 1 : Soit f un polynôme séparable sur un corps K de caractéristique différente de 2 et $\Delta(f)$ son discriminant. Soit L un corps de décomposition de f sur K et $\rho : \mathrm{Gal}(L/K) \to S_{x_1,\dots,x_n}$ l'action du groupe de Galois sur les racines $x_1, \dots, x_n$ de f. Montrer que

$$\rho(\mathrm{Gal}(L/K)) \subset A_n \Leftrightarrow \Delta(f) \text{ est un carré dans } K.$$

Exercice 2 : (Groupes de galois en degré 3**)** Soit f un polynôme cubique séparable irréductible sur un corps K de caractéristique différente de 2 et L un corps de décomposition de f sur K. Montrer que le groupe de Galois de L/K est

a) isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ si $\Delta(f)$ est un carré dans K,

b) isomorphe à S_3 sinon.

Exercice 3 : (Racines p-ièmes de 2**)** Soit ζ_p une racine primitive p-ième de l'unité et $f = x^p - 2$.

a) Calculer le corps de décomposition L de f sur $\mathbb{Q}$.

b) Décrire explicitement le groupe de Galois G de $L/\mathbb{Q}$.

c) Donner une description du groupe G comme un groupe de matrices.

Exercice 4 : (L'extension universelle) Soit $B = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ et $A = \mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$ l'anneau des polynômes en des variables abstraites $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. On considère l'inclusion naturelle $A \subset B$ qui envoie les σ_i sur les polynômes symétriques en les x_i (coefficients de $P_{univ} := \prod_{i=1}^n (X - x_i) \in A[X]$).

a) Montrer que si L est le corps de décomposition d'un polynôme P sur un corps K et que $y_1, \dots, y_n$ sont les racines (ordonnées) de P dans L, il existe un unique diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "a_P"'] & B \arrow[d, "b_P"] \\ K \arrow[r] & L \end{tikzcd}$$

tel que $a_P(\sigma_i) = \sigma_i(y_1)$ et $b_P(x_i) = y_i$. Calculer alors $b_P(P_{univ})$.

b) Décrire le groupe $\mathrm{Aut}_{A-alg}(B)$ des automorphismes de la A-algèbre B.

c) Définir un morphisme (appelé morphisme de spécialisation universelle) $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Aut}_{A-alg}(B)$. Montrer que ce morphisme est injectif.

d) En considérant par exemple le polynôme $f = x^5 - 2$, montrer le morphisme de spécialisation universelle n'est pas un isomorphisme.

Exercice 5 : (Théorie de Galois inverse) Soit G un groupe fini d'ordre n. Montrer que G est le groupe de Galois de $L = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ sur une sous-extension de L/K où $K = \mathbb{Q}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

Exercice 6 : Décrire complètement la correspondance de Galois pour l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.

Exercice 7 : Décrire la structure du groupe de Galois de $X^5 - 3$ sur $\mathbb{Q}$ par générateurs et relations.

Exercice 8 : (Groupes de galois en degré 4**)** Soit f un polynôme quadratique unitaire sur un corps K de caractéristique différente de 2, L un corps de décomposition de f et $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Soient $\Delta(f)(x)$ le discriminant de f et si $P_f = x_1x_2 + x_3x_4$ est le polynôme de Ferrari, on note $\theta_f(x) = \theta(P_f)(x) := \prod(x - P_{f,i})$ la résolvante de Ferrari où les $P_{f,i}$ sont tous les translatés distincts de P_f par S_n.

a) Montrer que si $\theta_f(x)$ est irréductible sur K, alors G est

   i) S_4 si $\Delta(f) \notin K^2$,

   ii) A_4 si $\Delta(f) \in K^2$.

b) Monter que $\Delta(\theta_f(x)) = \Delta(f)$.

c) Montrer que si θ_f a une racine dans K, on a une inclusion

$$G \subset D_4 := \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \langle (1324), (12) \rangle \subset S_4.$$

d) Montrer que les sous-groupes de $D_4 = \langle (1324), (12) \rangle$ d'ordre 4 sont donnés par les quatre groupes

$$\langle (12), (34) \rangle,\ \langle (12)(34), (13)(24) \rangle,\ \langle (1324) \rangle,\ \langle (1324), (12) \rangle$$

et que tous sauf le premier sont transitifs.

e) Montrer que si $\theta_f(x)$ se décompose complètement sur K alors G est $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

f) Montrer que si $\theta_f(x)$ a une racine unique $\beta \in K$, alors G est isomorphe soit à $D_4 := \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ soit à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.