Algèbre et théorie de Galois - TD3

Exercice 1 : Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $a, b \in K^*$. Démontrer les énoncés suivants :

a) $K(\sqrt{a})^{*2} \cap K^* = K^{*2} \cup aK^{*2}$.

b) $K(\sqrt{a}) = K(\sqrt{b}) \iff a/b \in K^{*2}$.

c) $K(\sqrt{a}, \sqrt{b})^{*2} \cap K^* = K^{*2} \cup aK^{*2} \cup bK^{*2} \cup abK^{*2}$.

d) $[K(\sqrt{a}, \sqrt{b}) : K] = 4 \iff a, b, ab \notin K^{*2}$. Si c'est le cas, alors $1, \sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{ab}$ est une base de $K(\sqrt{a}, \sqrt{b})/K$.

e) Si L/K est une extension de corps de degré 2 ($L \subset \mathbb{C}$), alors il existe $c \in K^*$, $c \notin K^{*2}$ tel que $L = K(\sqrt{c})$.

f) Les corps $L = K, K(\sqrt{a}), K(\sqrt{b}), K(\sqrt{ab}), K(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ sont les seuls corps intermédiaires $K \subseteq L \subseteq K(\sqrt{a}, \sqrt{b})$.

Exercice 2 : Soient a, b, c des nombres rationnels. Soient $L/K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})/\mathbb{Q}$ et $\beta = a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9} \in L$. Déterminer le polynôme caractéristique $P_{\beta,L/K}(X)$ et le polynôme minimal de β sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 3 : Montrer que l'anneau $F = \mathbb{F}_3[X]/(X^4 + X^2 + X + 1)$ est un corps. Déterminer le degré $[F : \mathbb{F}_3]$ et le nombre d'éléments de F. Soit $y = x^3 - 1 \in F$, où l'on a noté x l'image de X dans F. Déterminer $y^{-1} \in F$, le polynôme minimal de y sur $\mathbb{F}_3$ et l'ordre de x et y dans F^*.

Exercice 4 : Calculer l'inverse β^{-1} du nombre

$$\beta = 3 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = g(\sqrt[3]{2}), \qquad g(X) = X^2 - 2X + 3$$

dans la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbb{Q}[X]/(X^3 - 2)$.

Exercice 5 : Calculer le degré des extensions suivantes :

a) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2})$ sur $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et sur $\mathbb{Q}$.

b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, a)/\mathbb{Q}$ avec $P(a) := a^4 + 6a + 2 = 0$.

c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{18}, \sqrt{-7})/\mathbb{Q}$.

d) $\mathbb{Q}(5 + \sqrt{27}, \sqrt{8})/\mathbb{Q}$.

Exercice 6 : Décrire les inclusions entres les corps suivants :

a) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5 + \sqrt{24}})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5 - \sqrt{24}})$.

b) $\mathbb{Q}(j)$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(j, \sqrt[3]{2})$.

c) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, j)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i, j)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$, $\mathbb{Q}(i, j)$.

d) $\mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{3}))$, $\mathbb{Q}(\sin(\frac{2\pi}{3}))$, $\mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{5}))$, $\mathbb{Q}(\sin(\frac{2\pi}{3}))$.

Exercice 7 : Soit $P(x) = x^p - t \in \mathbb{F}_p(t)[x]$.

a) Montrer que $\mathbb{F}_p(\sqrt[p]{t}) := \mathbb{F}_p(t)[x]/(P)$ est un corps.

b) L'extension $\mathbb{F}_p(\sqrt[p]{t})/\mathbb{F}_p(t)$ est elle séparable ? normale ?