Algèbre et théorie de Galois - TD8

Exercice 1 :

a) Les $\mathbb{Z}$-modules $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont-ils libres ?

b) Sont-ils de type fini ?

c) Monter qu'il n'y a pas de morphismes d'anneaux de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$, de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

d) Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ avec $d = \mathrm{pgcd}(m,n)$.

e) Calculer $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

f) Calculer $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

g) Calculer $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ avec G un groupe abélien dont tous les éléments sont d'ordre fini.

Exercice 2 : Soit A un anneau (commutatif unitaire). Soient M, N, V des A-modules. On note $M^\vee = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Q})$ le dual de M.

a) Construire une bijection canonique $\mathrm{Hom}(M \otimes N, V) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, V))$.

b) Construire un morphisme $M^\vee \otimes N \to \mathrm{Hom}(M, N)$ et montrer que c'est un isomorphisme si M et N sont libres de rang fini.

c) Construire un isomorphisme $(M \oplus N) \otimes V \to (M \otimes V) \oplus (N \otimes V)$.

d) En déduire que si $0 \to M \to N \to K \to 0$ est une suite exacte scindée et $A \to B$ est une A-algèbre, la suite obtenue par application de $. \otimes_A B$ est aussi exacte scindée.

e) Le morphisme de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-modules obtenu par tensorisation du morphisme injectif de $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est il injectif ? Même question pour $2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$?

f) En déduire que si $0 \to M \to N \to K \to 0$ est une suite exacte quelconque, on obtient en général uniquement une suite exacte

$$M \otimes_A B \to N \otimes_A B \to K \otimes_A B \to 0$$

mais le produit tensoriel ne préserve pas en général l'exactitude à gauche (i.e. l'injectivité).

Exercice 3 : Soit A un anneau commutatif unitaire.

a) Soit M un A-module et I un idéal de A. Montrer que

$$M/IM \cong M \otimes_A A/I.$$

b) Soit $A \to B$ un morphisme d'anneau (i.e. une A-algèbre). Montrer que $A[X] \otimes_A B \cong B[X]$.

c) Calculer $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[i]$.

d) Calculer $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[i]$.

e) Calculer $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3}] \otimes \mathbb{Q}[j]$.

f) Calculer $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Exercice 4 : Soit A un anneaux commutatif unitaire et M un A-module.

a) Définir un morphisme

$$T_A^*(M^\vee \otimes M) \to \mathrm{End}_A(M)$$

de l'algèbre tensorielle sur A dans l'algèbre des endomorphismes du A-module M.

b) Montrer que si M est libre de rang fini, le morphisme ci-dessus est surjectif.

c) Soit X un ensemble. Montrer que la A-algèbre associative libre sur X est donnée par l'algèbre tensorielle $T_A^*(A^{(X)})$ sur le A-module libre sur X.

d) En déduire une présentation de l'algèbre associative des matrices $M_n(A)$ par générateurs et relations.