Algèbre et théorie de Galois - TD2

Exercice 1 : Pour résoudre un polynôme cubique de la forme x^3+px+q, Cardan propose de poser $x=u+v$ et de trouver un polynôme de degré 2 dont u^3 et v^3 sont des racines.

a) Trouver les racines de x^3+3x-2 par la méthode de Cardan.

b) Trouver les racines de x^3-7x-7 par la méthode de Cardan.

Exercice 2 : Simplifier les expression suivantes en utilisant la méthode de Cardan :

a) $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}+\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}$.

b) $\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}$.

c) $\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$.

d) $\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$.

e) $\sqrt[3]{5+\sqrt{52}}$.

Exercice 3 : (Nombres de Liouville)

a) Soit $a\in\mathbb{R}$ un nombre algébrique sur $\mathbb{Q}$ non rationel et P un polynôme irréductible de degré n tel que $P(a)=0$. Montrer qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que

$$\forall \frac{p}{q},\ |a-\frac{p}{q}|>\frac{c}{q^n}.$$

b) Un nombre $a\in\mathbb{R}$ est dit de Liouville si pour tout entier positif n, il existe des entiers p et q avec $q>1$ tels que

$$|x-\frac{p}{q}|<\frac{1}{q^n}.$$

Montrer que tout nombre de Liouville est transcendant, i.e., pas racine d'un polynôme à coefficients rationnels.

c) Montrer que $\sum_{i=1}^{\infty}10^{-n!}$ est un nombre de Liouville en utilisant les suites $p_n=\sum_{j=1}^{n}10^{n!-j!}$, $q_n=10^{n!}$.

Exercice 4 : Pour tout ensemble ordonné $I=(i_1\geq i_2\geq\cdots\geq i_n)$, on note $s_I=s_{i_1,\ldots,i_n}=\sum_{\sigma\in S_n}\sigma(x^{i_1}\ldots x^{i_n})$. On a en particulier $s_{1,\ldots,1}=\sigma_n$ le polynôme symétrique élémentaire.

a) Tout polynôme symétrique $f\in A[x_1,\ldots,x_n]^{S_n}$ est une combinaison linéaire finie $f=\sum c_I s_I$ avec $c_I\in A$.

b) Pour tous I, J, on a

$$s_Is_J=s_{I+J}+\sum_{K<I+J}c_Ks_K.$$

Exercice 5 :

a) Exprimer les polynômes $s_{2,2}$, $s_{3,1}$ en les variables x, y, z en termes des polynômes symétriques élémentaires.

b) Calculer $\sum x_i^4$ où x_i sont les racines du polynôme $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

c) Calculer $\sum x_i^7$ où x_i sont les racines de $P(x) = x^3 + px + q$.

Exercice 6 : (Critères d'irréductibilité)

a) Soit $a \in \mathbb{Z}$, non divisible par 3. Montrer que le polynôme $P(x) = x^3 - x + a$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

b) Le polynôme $P(x) = x^7 + 600x^6 + 284x^2 + 52x + 14$ est-il irréductible sur $\mathbb{Q}$?

c) Etudier l'irréductibilité des polynômes $P(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$ et $Q(x) = 30x^3 + 277x^2 - 31x - 28$ dans $\mathbb{Q}[x]$.

d) Etudier l'irréductibilité du polynôme $P(x) = x^4 - 15x^3 + 7$ dans $\mathbb{Q}[x]$.

Exercice 7 : Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme. Décrire la structure de l'anneau quotient $A = \mathbb{Q}[X]/(P)$.

Exercice 8 :

a) Montrer que $\mathrm{disc}(x^n + ax + b) = ca^n + db^{n-1}$, où les constantes c, d ne dépendent que de $n \geq 2$.

b) Pour determiner d, calculer $\mathrm{disc}(x^n - e)$.

c) Trouver une relation entre $\mathrm{disc}(xf(x))$ et $\mathrm{disc}(f(x))$.

d) Calculer $\mathrm{disc}(x^n - ex)$.

e) Calculer $\mathrm{disc}(x^n + ax + b)$.

Exercice 9 : Factoriser le polynôme $P(x) = x^4 - x^2 - x - 1$ sur $\mathbb{F}_3$.

Exercice 10 : (Polynôme irréductible sur $\mathbb{Z}$ et réductible modulo p pour tout p)

a) Soit K un corps et $P \in K[X]$. Montrer que P est irréductible sur K si et seulement si il n'a pas de racines dans les extensions L de K telles que $[L : K] \leq n/2$.

b) Soit $P(x) = x^4 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$.

   i) Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

   ii) Montrer que P est réductible modulo 2, puis que pour p premier impair, P admet une racine dans $\mathbb{F}_{p^2}$. En déduire que P est irréductible sur tous les $\mathbb{F}_p$.

c) Soit $a \in \mathbb{Z}$, $|a| > 1$ et a sans facteur carré. On pose $P_a(x) = x^4 + 2(1-a)x^2 + (1+a)^2$.

   i) Etudier l'irréductibilité de P_a sur $\mathbb{Z}$.

   ii) Montrer que P_a est réductible modulo 2, et réductible modulo p pour tout diviseur premier impair p de a.

   iii) Soit p premier impair ne divisant pas a. En distinguant les cas $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ et $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, factoriser P_a dans $\mathbb{F}_p[X]$.