1M002 ; Examen du 24 avril.

Durée 2h. Sur 25 points

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Cet examen comporte **6** exercices indépendants qui peuvent être traités dans le désordre. Il est noté suivant le barème indicatif suivant :
Exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 6 points ; exercice 5 : 5 points ; exercice 6 : 4 points ; exercice 7 : 4 points. Le total est de 30 points et la note sera ramenée sur **25**.

Exercice 1. Vrai ou faux ? Veuillez justifier votre réponse.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle vérifiant $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$ on ait $u_n \geqslant 0$.
2. Le produit d'une matrice inversible par une matrice non inversible est non inversible.
3. Si $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ est continue et vérifie $f(x) < x^3$ pour tout $x \in [-1,1]$ alors l'intégrale de f entre -1 et 1 est strictement négative.
4. L'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(0) = P(1)^2$ est un espace vectoriel.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. Vérifier l'identité $A^2 - A = 2I_3$ où I_3 désigne la matrice identité 3×3.
3. Déduire du point 2. que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)dx$.
2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{xdx}{x^2-1}$.
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+e^x)}$.

Exercice 4. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même définie par

$$f(x,y,z,t) = (x - y + z, y + z + t, 0, x + y + 3z + 2t).$$

1. Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ sont combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
3. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. Quelle est le rang de f et la dimension du noyau de f ?
5. Montrer que la famille de vecteurs (u,v) avec $u = (-2,-1,1,0)$ et $v = (-1,-1,0,1)$ forme une base de $\ker(f)$.

Exercice 5. Soit f une fonction continue, définie sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles. Pour tout $n \geq 1$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_n(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)\, dt$$

1. Montrer que les fonctions f_n sont de classe C^1 (c'est à dire continues, dérivables et de dérivée continue) sur $\mathbf{R}$. Exprimer f_n' en fonction de f.
2. En utilisant la formule de la moyenne, trouver un encadrement de $f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
3. En déduire que pour $x \in \mathbf{R}$ fixé, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(x)$ quand $n \to \infty$.

Exercice 6.

1. Prouver l'égalité de polynômes suivante : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = X^n - 1$.
2. Montrer que pour tout $x, \theta \in \mathbb{R}$ on a $1 - 2x\cos(\theta) + x^2 = |x - e^{i\theta}|^2$.
3. Pour $x > 1$, on pose $f(\theta) = \ln(1 - 2x\cos(\theta) + x^2)$. À l'aide des questions précédentes, calculer explicitement $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{2k\pi}{n})$.
4. Montrer que f est intégrable et déduire des questions précédentes la valeur de l'intégrale de f entre 0 et 2π.

Exercice 7. Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.
2. En déduire qu'on a pour tout $n \geqslant 1$ l'égalité $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$.