Feuille 10
Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 1 (Applications injectives)**.**

1. Soient $X = \{1, 2\}$ et $Y = \{1, 2, 3\}$. Déterminer toutes les applications injectives $f : X \to Y$.
2. Combien y en a-t-il ?
3. Faire de même pour les applications surjectives $g : Y \to X$.
4. $(**)$ Mêmes questions si $X = \{1, \ldots, p\}$ et $Y = \{1, \ldots, n\}$ pour des entiers $n \geq p \geq 1$.

Exercice 2. Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 0\}$; $E'_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | xy = 0\}$.
$E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 0, y = z\}$; $E'_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 1\}$.
$E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + xy \geqslant 0\}$; $E'_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy + y^2 \geqslant 0\}$.
$E_4 = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} / f(1) = 0\}$; $E'_4 = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} | f(0) = 1\}$;
$E_5 = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P' = 3\}$; $E'_5 = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} | f$ est croissante$\}$.

Exercice 3.

1. Déterminer lesquels des sous-ensembles de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ suivants sont des sous-espaces vectoriels :

   V_1 : l'ensemble des fonctions bornées ; V_2 : l'ensemble des fonction majorées ;
   V_3 : l'ensemble des fonctions paires ; V_4 : l'ensemble des fonctions paires ou impaires.

2. Montrer (par contre) que toute fonction s'écrit comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
3. Décrire les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. On se place dans $\mathbb{R}^3$. On note, pour v et v' deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $\langle v, v' \rangle$ leur produit scalaire.

1. Montrer que $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - 4z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $v' = (1, 2, 3)$. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(v) = \langle v, v' \rangle$ (produit scalaire) est linéaire.
3. Montrer que l'ensemble des vecteurs orthogonaux à v' est un sous-espace vectoriel.

Exercice 5. On considère les deux vecteurs $u = (1, 2, -1)$ et $v = (6, 4, 2)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Le vecteur $(9, 2, 7)$ est-il combinaison linéaire de u et v ? Et $(4, -1, 8)$?
2. Existe-t-il un nombre réel x tel que $(x, 2, -3)$ est combinaison linéaire de u et v ?

Exercice 6. Donner un système d'équations des espaces vectoriels engendrés par les vecteurs suivants

1. $u_1 = (1, 2, 3)$;
2. $u_1 = (1, 2, 3)$ et $u_2 = (-1, 0, 1)$;
3. $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (2, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, \alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Existe-t-il une valeur de α où le vecteur u_3 s'écrit comme combinaison linéaire de u_1 et u_2 ? Le cas échéant qu'arrive-t-il au système d'équations précédent pour cette valeur de α ?

Exercice 7. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (également parfois noté $\mathbb{R}^\mathbb{R}$) et soit F le sous-ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto Asin(x + \phi)$ où $A \in \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto sin(3x)$ n'appartient pas au sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions $x \mapsto sin(x)$, $x \mapsto sin(2x)$. Généraliser.
3. $(*)$ Montrer que les sous-ensembles F et $\mathbb{R} \cdot \{x \mapsto sin(x)\} + \mathbb{R} \cdot \{x \mapsto cos(x)\}$ sont égaux (attention : il faut montrer deux inclusions).
4. En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 8. Soit $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\mathbb{R}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les suites réelles.

1. Pour deux suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et pour $t \in \mathbb{R}$, rappeler la définition des suites $u + v$ et tu.

2. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont convergentes. Montrer que $\mathcal{L}$ est un sev de $\mathcal{S}$.
3. Soit $\mathcal{L}_0$ l'ensemble des suites de limite 0. Montrer que $\mathcal{L}_0$ est un sev de $\mathcal{L}$.

Exercice 9. Soient $\mathbb{K}$ un corps et $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\mathbb{K}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. On fixe un entier $p \geq 1$.

1. Montrer que l'application $\phi : \mathcal{S} \to \mathbb{K}^p$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$ est linéaire.
2. Est-elle surjective ? Injective ? Déterminer son noyau.

Exercice 10. Soient $\mathbb{K}$ un corps et $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\mathbb{K}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Soit $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ l'opérateur de décalage, qui envoie toute suite $u = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ sur la suite $T(u)$ définie par $T(u)_n = u_{n+1}$, c.-à.-d. $T(u) = (u_1, u_2, u_3, \dots)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{S}$.
2. T est-il surjectif ? Injectif ? Déterminer son noyau.

Exercice 11. Soit $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On considère les applications de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même suivantes :

$$D : P \mapsto DP := P' \quad ; \quad \Delta : P \mapsto \Delta P := P(X+1) - P(X)$$

1. Montrer que D et T sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer leur noyau et montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg \Delta P = \deg DP = \deg P - 1$.
3. $(*)$ En utilisant la linéarité de l'opérateur de dérivation D montrer que toute famille de polynômes $P_1, ..., P_n$ vérifiant $\deg P_1 < ... < \deg P_n$ est libre (c'est-à-dire que, pour tous $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, si $\alpha_1 P_1 + ... + \alpha_n P_n = 0$ alors $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.
4. Montrer que si un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie la propriété :
$$\text{Pour tout } m \in \mathbb{Z},\ P(m) \in \mathbb{Z}. \tag{\#}$$
alors il en est de même du polynôme ΔP.
5. Appliquer Δ aux polynômes $T_n := \dfrac{X(X+1)...(X+n-1)}{n!}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et exprimer le résultat en fonction de T_{n-1}.
6. $(*)$ Soit $P = \alpha_0 T_0 + ... + \alpha_N T_N \in \mathbb{R}[X]$ une combinaison linéaire réelle des T_i vérifiant la propriété (#). Montrer à partir des deux question précédentes que $\alpha_k \in \mathbb{Z}$ pour tout $k = 0, ..., N$.

Exercice 12. Soit $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $a \in [0,1]$, on définit l'application "évaluation en a" :

$$ev_a : \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}\ ;\ f \mapsto f(a).$$

1. Montrer que l'application ev_a est linéaire.
2. Décrire son noyau puis montrer que l'espace vectoriel des fonctions constantes est un *supplémentaire*[1] de $ker(ev_a)$.
3. On fixe $a_1 \neq a_2 \in [0,1]$ et on définit l'application $ev_{a_1,a_2} : \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}\ ;\ f \mapsto (f(a_1), f(a_2))$. Décrire son noyau en fonction de ev_{a_1} et ev_{a_2}, on le note N. Trouver un supplémentaire de N.
4. Généraliser lorsqu'il y a n paramètres $a_1, ..., a_n$ deux à deux distincts.

Exercice 13. On note $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) l'ensemble des polynômes $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ tels que a_i soit nul pour tout i impair (resp. pair).

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$.
2. Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires.

Exercice 14.
1. Montrer que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
2. Montrer que les deux "droites" vectorielles $\mathbb{Q} \cdot \sqrt{2}$ et $\mathbb{Q} \cdot 1$ sont distinctes.
3. Montrer de même que $\mathbb{Q} \cdot \sqrt{3}$ n'est pas un sous-espace vectoriel du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q} \cdot \sqrt{2} + \mathbb{Q} \cdot 1 \subset \mathbb{R}$.

---

1. On dit que deux sev E, F d'un esp. vect. V sont supplémentaires si tout $v \in V$ s'écrit $v = x + y$ avec $x \in E$ et $y \in F$, et si $E \cap F = \{0\}$ (ce qui équivaut à l'unicité de l'écriture $v = x + y$).