# Feuille 11
# Espaces vectoriels et applications linéaires (suite)

**Exercice 1.** On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ : $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\x\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, à quelles conditions sur $x \in \mathbb{R}$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$ ?

**Exercice 2.**

1. Montrer que $P = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 4z = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de $P$.
2. Montrer que $D = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } x + y - z = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de $D$.
3. Montrer que $H = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de $H$.

**Exercice 3.** Considérons l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels.

1. Montrer que l'addition des polynômes et la multiplication des polynômes par un réel font de cet ensemble un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que le sous-ensemble $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré $\leq 2$ est un sous-espace vectoriel.
3. Montrer que $P_1 = X + 1$, $P_2 = X^2 - 2X$ et $P_3 = X - 1$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. En déduire la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Déterminer les coordonnées dans la base $(P_1, P_2, P_3)$ du polynôme $P = X^2$.

**Exercice 4.** Pour chacune des équations différentielles linéaires d'ordre 2 suivantes, déterminer l'ensemble des solutions réelles (on commencera par trouver une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène puis on trouvera une solution particulière) :

1. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$ ; 2. $y'' - 2y' + y = e^x$ ; 3. $y'' - 4y' + 8y = \cos(x)$ ; 4. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1$.

**Exercice 5.** Soient $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\mathcal{M} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. On fixe une matrice $A \in \mathcal{M}$ et on considère la fonction $g_A$ de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$ définie par $B \to g_A(B) = AB$.

1. Montrer que $g_A$ est une application linéaire.
2. Si $A$ est inversible, montrer que $g_A$ est un automorphisme de $\mathcal{M}$.
3. Si il existe $C \in \mathcal{M}$ tel que $CA = Id$ (la matrice identité de $\mathcal{M}$), montrer que $g_A$ est injective, en déduire qu'elle est surjective et que $C$ est l'inverse de $A$.
4. Caractériser le noyau de $g_A$ et en déduire la dimension de ce noyau et le rang de $g_A$.
5. Si la dimension du noyau de $A$ est égal à $n - 1$ montrer qu'il existe $x$ et $y$ non nuls dans $\mathbb{R}^n$ tels que $A = x\,{}^t y$ et caractériser l'image de $g_A$.
6. Si $n = 2$, montrer que les matrices :

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},$$

forment une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et écrire la matrice qui représente l'expression de $g_A$ dans cette base.

**Exercice 6.** Soient $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $A(a) = \begin{pmatrix}a & 1\\1 & a\end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe $c_1 = c_1(a)$ et $c_2 = c_2(a)$ tels que $A(a)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $A(a)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
2. Montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ et discuter en fonction de $a$ des valeurs des quantités $\mathrm{rg}(A(a))$ et $\dim(\ker(A(a)))$.
3. Recommencer pour la matrice $A(a) = \begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$.
4. Généraliser.

**Exercice 7.** Soit $f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f(f(x)) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que $x - f(x) \in \ker(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe $y \in \mathrm{im}(f)$ et $z \in \ker(f)$ tels que $x = y + z$.
4. Montrer que la décomposition précédente est unique et que $f(x) = y$, on dit que $f$ est le projecteur sur $\mathrm{im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$.
5. Si $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$ montrer que $A^2 = A$ et que $f_A(f_A(x)) = f_A(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. Représenter dans le plan $\mathrm{im}(f_A)$, $\ker(f_A)$ et l'action de $f_A$.