Feuille 6
Déterminants et inversion

Il y a plusieurs types d'exercices : les exercices dits « de calculs » – marqués par un (C) – que vous devez pouvoir traiter en autonomie et sans erreur : des questions de ce type seront posées à l'examen.

Exercice 1. (déterminant 2x2) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pour $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit $(\mathcal{S}_{(e_1,e_2)})$: $\begin{cases} ax + by = e_1 \\ cx + dy = e_2 \end{cases}$

1. A quelle condition $(\mathcal{S}_{(e_1,e_2)})$ admet des solutions quelque soit $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$? Résoudre le système dans ce cas.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. A quelle condition les lignes de A ne sont pas colinéaires ? Montrer que sous cette condition, A est inversible et trouver son inverse.

Exercice 2 (Systèmes linéaires et déterminant)**.** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer dét(A). En déduire que le système $AX = B$ a une unique solution, quelque soit $B \in \mathbb{R}^3$.
2. Faire de même avec $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. En utilisant la même méthode, déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tel que $A_x X = B$ a une solution pour tout $B \in \mathbb{R}^3$, où $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, faire des opérations sur les lignes jusqu'à obtenir la matrice identité.
2. Faire les mêmes opérations que précédemment sur la matrice identité. Notons A' la matrice obtenue.
3. Quelle est le lien entre A et A' ? Justifier que la méthode permet de trouver l'inverse d'une matrice (si elle existe)

Exercice 4. Calculer le déterminant des matrices suivantes, puis en faisant des opérations sur les lignes du couple $(A \mid I)$, calculer leur inverse. Que se passe-t-il si avec cette méthode, on essaie de calculer l'inverse d'une matrice non inversible ?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5. On se place dans $M_n(\mathbb{R})$ et l'on considère la matrice suivante, disons pour $n = 4$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. En calculant dét(A), déterminer si A est inversible et si oui, calculer son inverse.
2. Écrire la matrice $A + I_4$ et calculer son carré.
3. $(*)$ En utilisant que $(A + I_4)(A + I_4) = A^2 + 2A + I_4$, déduire de la question précédente une égalité $A(A + aI_4) = bI_4$ pour des réels a, b qu'on déterminera. Comparer avec le résultat de la question 1.

Exercice 6. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$$

où a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_p sont p réels. A quelle condition A est-elle inversible ?

Exercice 7 (Déterminant de Vandermonde)**.** Soient $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, on considère le déterminant :

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \text{dét} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer la formule : $\boxed{V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).}$

1. Expliquer pourquoi la formule est vraie si deux des a_i sont égaux.
2. Vérifier le résultat pour $n = 2$ et $n = 3$.
3. En faisant des opérations bien choisies sur les lignes, puis en développant par rapport à la première colonne, montrer que

$$(\dagger) \qquad V(a_1, \ldots, a_n) = V(a_2, \ldots, a_n) \prod_{i=2}^{n} (a_i - a_1).$$

4. Conclure alors par récurrence.
5. $(*)$ Autre méthode pour $(\dagger)$. D'après la question 1, on peut supposer les a_i deux à deux distincts. Soit X une indéterminée. En développant par rapport à la 1ère colonne, montrer que $V(X, a_2, \ldots, a_n)$ est un polynôme en X de degré $\leq n - 1$ et calculer son coefficient dominant. Déterminer $(n - 1)$ racines « évidentes » et retrouver ainsi la formule $(\dagger)$.

Exercice 8. Soit $x_0, x_1, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$. A quelle condition existe-t-il, pour tout $y_0, y_1, \cdots, y_p \in \mathbb{R}$, un polynôme P de degré $\leq p$ tel que $P(x_i) = y_i$ $(i \in \{0, 1, \cdots, p\})$?

Exercice 9. Soient X une indéterminée et $A = \begin{pmatrix} 2 - X & -3 & -6 \\ 0 & 5 - X & 6 \\ -1 & -5 & -5 - X \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}[X])$. Calculer le polynôme $P = \text{dét}(A) \in \mathbb{R}[X]$ et déterminer ses racines. Si λ est racine de P, que peut-on dire sur A ?

Exercice 10. Idem pour la matrice $B = \begin{pmatrix} -2 - X & -1 & -4 & -2 \\ 5 & 4 - X & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 - X & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -X \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}[X])$.