1M002 - Examen du 25 mai.

Durée 3h.

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Cet examen comporte **5** exercices indépendants qui peuvent être traités dans le désordre. Il est noté suivant le barème indicatif suivant :
Exercice 1 : 10 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 9 points ; exercice 4 : 16 points ; exercice 5 : 18 points. Le total est de 58 points et la note sera ramenée sur **50**.

Exercice 1. Vrai ou faux ? Justifier votre réponse.

1. On peut extraire de la suite $u_n = \dfrac{n^2+1}{n} + (-1)^n n$ une sous-suite convergente.
2. On peut extraire de la suite u_n définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ une sous-suite convergente.
3. Toute matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = I_2$ vérifie $A = \pm I_2$.
4. On a l'inégalité $\displaystyle\int_1^{100} e^{-x^2}dx \leqslant \frac{1}{e}$.
5. Il existe une application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ injective.

Exercice 2. Déterminer suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x dx$.
2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{xdx}{x^2-1}$.
3. $\displaystyle\int_e^{e^3} \frac{dx}{x\ln(x)}$.

Exercice 4. On pose $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et on note $f \colon \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}.$$

1. Montrer que $a < 1.7$.
2. Montrer que $f(a) = a$.
3. Calculer f'. Montrer que pour tout $x > 1$ on a $|f'(x)| \leq 2|x^2 - x - 1|$.
4. Donner le tableau de variation de la fonction $g \colon x \mapsto x^2 - x - 1$, et résoudre l'équation $g(x) = 0$.

5. Montrer que l'image de l'intervalle $[a, 1.7]$ par la fonction g est égale à $[0, 0.19]$.
6. En déduire que $|f'(x)| \leq 0.5$ pour $x \in [a, 1.7]$ et que $f(x) \geq a$ pour tout $x \geq a$.
7. On définit une suite (u_n) par récurrence de la façon suivante : on pose $u_0 = 1.7$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que pour tout n on a

$$0 \leq u_n - a \leq (0.2) \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Que peut-on dire du comportement de (u_n) quand n tend vers l'infini ?

8. Donner un entier N explicite tel que $|u_N - a| < 10^{-9}$.

Exercice 5. Soit n un entier strictement positif et $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels distincts. On note $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

1. Donner une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et sa dimension.
2. Montrer que pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{X - a_i} = \frac{P(X)}{\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)}.$$

3. Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ associe P est linéaire.
4. Prouver que pour $i = 1, \dots, n$ on a l'égalité $\lambda_i = \dfrac{P(a_i)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$.
5. En déduire que Φ est injective, puis que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
6. On suppose dorénavant que $n = 3$: écrire la matrice A de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. Montrer qu'on a dét $A = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$ et en déduire une nouvelle preuve de la question 5.