UMPC 2012-2013 TD 1 LM256

Chapitre 1 : Fonctions d'une variable

1. Etudier les limites aux bornes des domaines de définition des fonctions suivantes. Esquisser les graphes.
a. e^{-x^2}, xe^{-x^2}, $x^2e^{-x^2}$,
b. $e^{-|x|}$, $xe^{-|x|}$, $x^2e^{-|x|}$,
c. $e^{-1/x}$, e^{-1/x^2}.

2. Etudier la fonction suivante :
$y(t) = v_0t - gt^2/2$ pour différentes valeurs v_0 et g.

3. Déterminer les limites en zéro des fonctions suivantes :
a. $\lim_{x\to 0} \sin kx/x$, $k \in \mathbf{R}$,
b. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$,
c. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{1-\sqrt{1+x}}\right)$,
Dans le cas c., approcher à l'aide d'une calculatrice le résultat trouvé. Peut-on prolonger ces fonctions par continuité en zéro ?

4. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
a. $\arcsin x$,
b. $\arccos x$,
c. $\arctan x$.

5. Evaluer les limites
a. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x}$,
b. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^2}$,
c. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$.

6. Déterminer le développement limité à l'ordre 8 de $\tan x$ en 0.
(rep. $x + x^3/3 + 2x^5/15 + 17x^7/315 + o(x^8)$).

7. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 6 de $1/\sin x - 1/x$.
(rep. $x/6 + 7x^3/360 + 31x^5/15120 + o(x^6)$).

8. Une masse m_1 est suspendue à une corde enroulée autour d'une poulie de poids M. Lorsque la masse m_1 tombe avec l'accélération a_y, la poulie tourne. Montrer que les formules suivantes ne sont pas plausibles :
a. $a_y = Mg/(m_1 - M)$

b. $a_y = Mg/(m_1 + M)$
c. $a_y = m_1 g/M$.
On ne cherchera pas à déterminer la formule correcte.

9. Calculer l'aire des domaines suivants :
a. $\{(x,y), 0 \le x, 0 \le y \text{ et } 1 \le x+y \le 2\}$,
b. $\{(x,y), 1 \le x \le 2 \text{ et } x \le y \le \sinh x\}$,
c. $\{(x,y), 0 \le x \le \pi \text{ et } \sin^2 x \le y \le \sin x\}$,
d. $\{(r,\theta), \pi/2 \le \theta \le 3\pi/2, r \le 1\}$.

10. Calculer les intégrales
a. $I = \int_0^a x^2 \cos^2 x dx$, $a \in \mathbf{R}$,
b. $J = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$,
c. $H = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(x/3)}{\sin(x/2)} dx$.

11. Dériver la fonction de x définie par

$$f(x) = \int_0^{x^2} \sin(t) dt.$$

12. Calculer les primitives des fonctions suivantes :
a. $\int x \arcsin x dx$,
b. $\int x \arctan x dx$.
c. $\int \frac{\ln(x^2+4x+5)}{(1+x)^2} dx$,
d. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

13. On considère pour $\alpha \in \mathbf{R}^*$ et $n \in \mathbf{N}$, les primitives :

$$I_n = \int x^n \cos \alpha x dx, \quad J_n = \int x^n \sin \alpha x dx.$$

a. Calculer I_0, J_0, I_1, J_1.
b. Établir une relation entre I_n et J_{n-1} puis entre J_n et I_{n-1}, I_n et I_{n-2}, J_n et J_{n-2}.
c. En déduire que

$$I_n = P_n(x) \cos \alpha x + Q_n(x) \sin \alpha x + cste$$

$$J_n = R_n(x) \cos \alpha x + S_n(x) \sin \alpha x + cste$$

où P_n, Q_n, R_n, S_n sont des polynômes à coefficients réels, dont on donnera la parité suivant la valeur de $n \in \mathbf{N}$.