UMPC 2012-2013 TD 2 LM256

Chapitre 2 : Fonctions de plusieurs variables

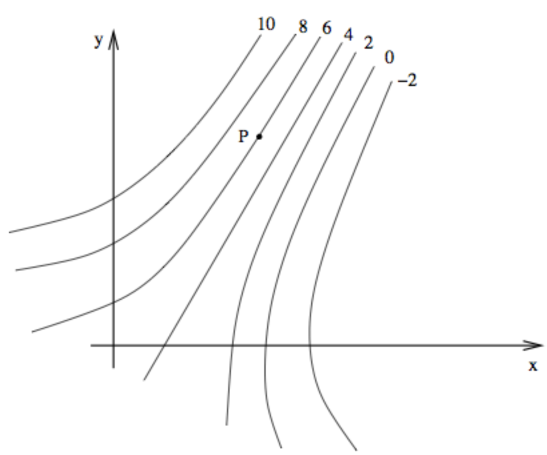
1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition D et donner une représentation graphique de D.

1. $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$
2. $f(x,y) = \ln(y - x^2)$
3. $f(x,y) = \sqrt{1 - xy}$
4. $f(x,y) = \sqrt{(x+y+1)(x+y-1)}$
5. $f(x,y) = \frac{\sin(x)+\cos(y)}{x^2+xy+y^2}$

2. Représenter la ligne de niveau c de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x,y) = 3x + 2y, \quad c = 1, 2, 0.$
2. $f(x,y) = y^2, \quad c = -1, 0, 1, 4.$
3. $f(x,y) = \ln(x+y), \quad c = 0, 1.$

3. On donne quelques lignes de niveau d'une fonction f supposée très régulière (en particulier les dérivées partielles d'ordre 1 existent). Que dire du signe



de $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$?

4. Pour $f(x,y), c$ et m_0 donnés ci-dessous, donner l'équation de la courbe de niveau c de f ainsi que l'équation de la tangente à cette ligne de niveau au point m_0 :

1. $f(x,y) = \ln(y-x^2) \quad c = 0 \quad m_0 = (-1,2)$
2. $f(x,y) = 2xy - 3x + y + 3 \quad c = 6 \quad m_0 = (1,2)$
3. $f(x,y) = 2^{xy} \quad c = 4 \quad m_0 = (1,2)$

5. Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition et étudier la limite en $(0,0)$.

1. $f(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{y^2}$
2. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x}$
3. $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$
4. $f(x,y) = (x+y^2)\sin(\frac{1}{xy})$

6. Soit f la fonction définie par $f(0,0)$ et pour $(x,y) \neq (0,0)$ par :

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}.$$

1. Soit $\mathcal{D}$ une droite quelconque passant par l'origine. Montrer que la restriction de f à $\mathcal{D}$ est continue en $(0,0)$.
2. Peut-on en déduire que f est continue en $(0,0)$?

7. Déterminer les dérivées partielles au premier ordre des fonctions suivantes :

1. $f(x,y,z) = x^3y + xyz + xz^3$
2. $f(x,y) = x^{y^2}$
3. $f(x,y) = \exp(\frac{x}{y}) + \exp(\frac{y}{x})$
4. $f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2)$

8. Soit $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable et $f : \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = x\phi(\frac{y}{x})$. Montrer qu'on a

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

9. Soit $m \in \mathbf{N}^*$ et $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ une fonction vérifiant l'équation d'Euler :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = mf.$$

Pour (x, y, z) fixés, on définit $\phi :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ par $\phi(\alpha) = \alpha^{-m} f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$. Calculer ϕ' et en déduire que f est homogène de degré m au sens où pour tout $x, y, z, \alpha \in \mathbf{R}$ avec $\alpha > 0$ on a $f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = \alpha^m f(x, y, z)$.

10. Développer à l'ordre 1 les fonctions suivantes au voisinage des points indiqués :

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (1, 1), (0, 2)$
2. $f(x, y) = x^2 + 3xyz - y^3 + z \quad (1, 0, -1)$
3. $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)\tan(z) \quad (0, \pi, \frac{\pi}{4})$

11. Soit $u, v : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fonctions dérivables et $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = u(x) + v(y)$.

1. Montrer que f vérifie $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$. (E)
2. Montrer que réciproquement si une fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ vérifie (E) alors il existe deux fonctions u et v telles que $f(x, y) = u(x) + v(y)$.

12. Montrer que la fonction $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ vérifie l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Montrer que la fonction $g : \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbf{R}$ définie par

$$g(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

vérifie l'équation de Laplace : $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 0$.

13. Soit $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbf{R}$ une fonction qui admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2. On considère la fonction $F :]0, +\infty[\times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $F(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

1. Déterminer $\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$.

2. En déduire l'expression du Laplacien de f : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ au point $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

14. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(0,0) = 0$ et pour $(x,y) \neq (0,0)$ par

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}.$$

1. Montrer que f admet les dérivées partielles d'ordre 2 suivantes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et les calculer.
2. Que peut-on déduire de ce résultat pour $(x,y) = (0,0)$?

15. Montrer que l'équation $x^5 + 3xy - y^6 = 1$ définit y comme une fonction implicite de x au voisinage du point $(1,0)$. En notant $y = \phi(x)$, calculer $\phi'(1)$ et $\phi''(1)$.

16. Montrer que l'équation $xy + yz + 2x + 2y - z = 0$ définit implicitement une fonction $(x,y) \to z = f(x,y)$ au voisinage de $(0,0,0)$ et calculer le plan tangent en ce point à la surface considérée.

17. L'astroïde est la courbe du plan définie par l'équation $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ et représentée ci-dessous.

1. Calculer l'équation de la tangente à l'astroïde en un point qui n'est pas sur un axe de coordonnées.
2. Montrer que si (x_0, y_0) est un point de l'astroïde vérifiant $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ alors la tangente en ce point rencontre les deux axes de coordonnées en deux points à distance 1 l'un de l'autre.
3. Expliquer pourquoi pour l'astroïde est reliée à l'image d'une échelle qui glisse le long d'un mur.