Feuille 3 : Champs de vecteurs et intégrales curvilignes

Exercice 1 :

1. Chercher un vecteur perpendiculaire au plan passant par les points $P(1,4,6)$, $Q(-2,5,-1)$ et $R(1,-1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$. En déduire une équation de ce plan.
2. Calculer l'aire du triangle PQR.
3. Montrer que les vecteurs $\vec{a}=(1,4,-7)$, $\vec{b}=(2,-1,4)$, et $\vec{c}=(0,-9,18)$ sont coplanaires.
4. Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}=(1,2,3)$, $\vec{v}=(1,2,1)$ et $\vec{v}=(1,4,9)$.

Exercice 2 :

Représenter graphiquement les champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ définis par :

1. $\vec{V}(x,y)=(x,y)$.
2. $\vec{V}(x,y)=(-y,x)$.
3. $\vec{V}(x,y)=(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$.

Exercice 3 :

Soit le champ de vecteurs $\vec{r}(x,y,z)=(x,y,z)$ défini sur $\mathbb{R}^3$, et la fonction $r(x,y,z)=\|\vec{r}(x,y,z)\|$.

1. Calculer $div(\vec{r})$ et $\vec{rot}(\vec{r})$.
2. Exprimer en fonction de r et $\vec{r}$ les gradients de r, r^2, $ln(r)$ et $\frac{1}{r}$.

Exercice 4 :

Calculer les divergences et rotationnels des champs de vecteurs suivants :

1. $u(x,y,z)=(xy,yz,xz)$
2. $w(x,y,z)=(x^2y,-2y^3z^2,xy^2z)$

Exercice 5 :

Soient $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ des fonctions différentiables et $\vec{u}$, $\vec{v}$ des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$. Montrer :

1. $\vec{grad}(fg)=(\vec{grad}\,f)g+f(\vec{grad}\,g)$
2. $div(f\vec{u})=(\vec{grad}\,f)\cdot\vec{u}+f(div\,\vec{u})$
3. $div(\vec{u}\wedge\vec{v})=(\vec{rot}\,\vec{u})\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot(\vec{rot}\,\vec{v})$
4. $\vec{rot}(f\vec{u})=(\vec{grad}\,f)\wedge\vec{u}+f\cdot(\vec{rot}\,\vec{u})$
5. $\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{u})=\vec{grad}(div\,\vec{u})-\Delta\vec{u}$, où si $u=(u_1,u_2,u_3)$, $\Delta\vec{u}=(\Delta u_1,\Delta u_2,\Delta u_3)$

Exercice 6 :

Pour chacun des champs de vecteurs $\vec{u}$ ci-dessous, montrer que $\vec{rot}\,\vec{u}=0$, et calculer alors la fonction $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ telle que $\vec{u}=\vec{grad}\,f$.

1. $\vec{u}=\frac{\vec{r}}{r^2}$
2. $\vec{u}(x,y,z)=(2xy,x^2+3y^2z^2,2y^3z+4z^3)$
3. $\vec{u}(x,y,z)=(\frac{1}{x}+y\cos(xy),\frac{1}{y}+x\cos(xy),\frac{1}{z})$

Exercice 7 :

Soit $\vec{u}(x,y,z)=(x^ay,-axz,ayz)$, avec a une constante.

1. Calculer $\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{u})$.
2. Déterminer a et $k\in\mathbb{N}$ tels que $\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{u})=(0,2(x^k+1),0)$.

Exercice 8 :

Calculer les tangentes de chacune des trois courbes suivantes

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} \\ y(t) = 2\cos 3t \\ z(t) = 2\sin 3t \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = t^2+1 \\ y(t) = 4t-3 \\ z(t) = 2t^2-6t \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = e^{2t} \end{cases}$$

aux points respectifs $t_0 = \pi,\ t_0 = 2$ et $t_0 = 0$.

Exercice 9 :

Les coordonnées d'un point mobile M sont données par le système :

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos t - 1 \\ y(t) = -2\cos t + 1 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer la trajectoire de M et la représenter graphiquement.
2. Déterminer le vecteur tangent unitaire de cette trajectoire.

Exercice 10 :

Déterminer les vecteurs unitaires tangents et normaux à la courbe décrite par

$$\begin{cases} x(t) = 2t + \sin 2t \\ y(t) = 1 - 2\cos t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Exercice 11 :

Soient les points $A(1,0)$, $B(0,1)$ et $C(1,1)$. Calculer

$$\int_\Gamma [(y^2-y)dy - 2(x^2-x)dx]$$

où Γ est donné par :

1. la ligne brisée OAC
2. la ligne brisée OBC
3. le segment OC

Exercice 12 :

Soit Γ l'arc dans l'espace paramétré par $t \in [0, 2\pi]$, de point initial $A(1,0,0)$ et de vitesse $\vec{v}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$. Calculer la circulation le long de Γ du champ de vecteur $\vec{V}(x,y,z) = (4xy, 3y^2, 5z)$.

Exercice 13 :

Un point matériel est soumis au champ de forces $\vec{F}(x,y,z) = (2x - y + 3z, z + 4y, 2xy + y + x^2)$ le long de l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \\ z(t) = 0 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad 3 < a < b \in \mathbb{N}$$

parcourue dans le sens trigonométrique. On suppose que le travail $W = \int_{\mathcal{E}} \vec{F} \cdot d\vec{M}$ de $\vec{F}$ le long de l'ellipse vaut 32π. Déterminer a et b.

Exercice 14 :

Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} d\vec{M}$, où $\mathcal{C}$ est la courbe décrite par le vecteur $O\vec{M}(t)$:

1. $\vec{F}(x,y,z) = (\sin x, \cos y, xz) \quad O\vec{M}(t) = (t^3, -t^2, t), \quad 0 \leq t \leq \pi$
2. $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, xy, z^2) \quad O\vec{M}(t) = (\sin t, \cos t, t^2), \quad 0 \leq t \leq \pi$

Exercice 15 :

Calculer l'intégrale curviligne I le long de la boucle fermée $\mathcal{C}$ constituée par les deux arcs $y = x^2$ et $x = y^2$, décrite dans le sens trigonométrique, avec

$$I = \int_{\mathcal{C}} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$$

Exercice 16 :

Calculer à l'aide d'une intégrale curviligne l'aire intérieure à l'astroïde représentée par

$$\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin t \end{cases}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Exercice 17 :

Soit l'intégrale curviligne

$$I = \int_{\gamma} \frac{(1+y)dx + xdy}{x^2y^2 + 2x^2y + x^2 + 1}$$

1. Montrer que I ne dépend pas du chemin Γ à extrémités fixées.
2. Calculer I si l'arc Γ est une courbe fermée.
3. Calculer I Si l'arc Γ est limité par les points $A(0,1)$ et $B(1/2,1)$.