UMPC 2012-2013 TD 5 LM256

Chapitre 4 : Changement de variables et formule de Green-Riemann

1. Trouver le centre de gravité de la plaque homogène délimitée par la parabole $y = 2x^2$ et la droite $y = 2$.

2. Calculer le jacobien de la transformation donnée et calculer l'intégrale donnée en utilisant cette transformation :

1. $x = (u + v)/3, y = (v - 2u)/3, \iint_D (3x + y)dxdy$ où D est le domaine limité par les droites $y = x - 2, y = x, y = -2x, y = 3 - 2x$.
2. $x = 2u+3v, y = 3u-2v, \iint_D (2x+y)dxdy$ où D est le carré de sommets $(0,0), (2,3), (5,1), (3,-2)$.
3. $x = u/v, y = v, \iint_D xydxdy$ où D est dans le premier quadrant et limité par les droites $y = x, y = 3x$ et les hyperboles $xy = 1, xy = 3$.

3. Par un changement de variables, calculer les intégrales suivantes :

1. $\iint_D xdxdy$ où D est le disque de centre 0 et de rayon 5.
2. $\iint_D ydxdy$ où D est le domaine dans le premier quadrant borné par le cercle $x^2 + y^2 = 9$ et les droites $y = x, y = 0$.
3. $\iint_D xydxdy$ où D est le domaine dans le premier quadrant compris entre les cercles $x^2 + y^2 = 4$ et $x^2 + y^2 = 25$.
4. $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ où D est l'anneau défini par $4 \leq x^2 + y^2 \leq 16$.
5. $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$ où D est le disque unité.
6. $\iint_D \frac{xydxdy}{x^2+y^2}$ où D est le triangle de sommets $(0,0), (2,2)$ et $(2,0)$.
7. $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2/a^2+y^2/b^2-1}}$ où D est la partie du plan comprise entre les ellipses d'équations $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4$.
8. $\iint_D (x + y)dxdy$ où D est le triangle délimité par les axes et la droite $x + y = 3$.

4. En utilisant les coordonnées polaires, calculer le volume

1. borné par le paraboloïde $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ et le plan $z = 4$.

2. borné par les paraboloïdes $z = 3x^2 + 3y^2$ et $z = 4 - x^2 - y^2$.
3. à l'intérieur du cylindre $x^2+y^2 = 4$ et de l'ellipsoïde $4x^2+4y^2+z^2 = 64$.

5. Calculer de deux façons différentes l'intégrale suivante :

$$\iint (y^2 - x^2)dxdy \text{ où } D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

6. En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer :

1. $\int_{\partial D} x^2ydx + xy^3dy$ avec D le carré de sommets $(0, 0), (2, 0), (2, 2)$ et $(0, 2)$.
2. $\int_C (x^2 + y^2)dx + 2xydy$ avec C composé de l'arc de parabole $y = x^2$ compris entre $(0, 0)$ et $(2, 4)$ et des segments joignant $(2, 4)$ à $(0, 4)$ ainsi que $(0, 4)$ à $(0, 0)$.
3. $\int_{\partial D} 2xydx + y^5dy$ avec D le triangle de sommets $(0, 0)$, $(2, 0)$ et $(2, 1)$.
4. $\int_{\partial D} x^2ydx - xy^5dy$ avec D le carré de sommets $(\pm 1, \pm 1)$.
5. $\int_{\partial} Dx^2dx + 3y^2dy$ avec C définie par $x^6 + y^6 = 1$.
6. $\int_C x^2ydx - 6y^2dy$ où C est le cercle unité.
7. $\int_C \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dM}$, où C est la courbe d'équation $x^4 + y^4 = 1$.
8. $\iint_D xydxdy$ avec $D = \{(x, y), x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}$.
9. $\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$ avec $D = \{(x, y), x \geq 1, y \geq 1, x + y \leq 4\}$.