Correction de l'examen : autour de l'ellipse

1. Voici la figure correspondant à l'examen :

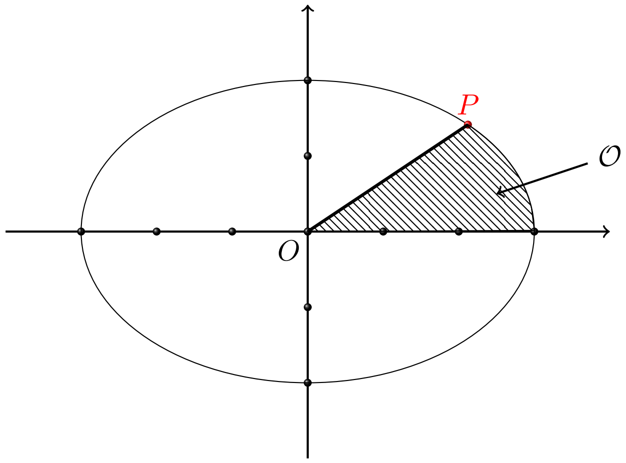

FIGURE 1 – Ellipse $\mathcal{E}$ et aire $\mathcal{O}$

2. (a) $\mathcal{E}$ est la ligne de niveau égale à 0 de la fonction $f_{\mathcal{E}}(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1$.

   (b) On note $x_P = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ et $y_P = \sqrt{2}$. On vérifie que

   $$\frac{x_P^2}{9} + \frac{y_P^2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

   Les coordonnées de P vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{E}$ donc le point P se situe sur $\mathcal{E}$.

   (c) Le vecteur $\nabla f_{\mathcal{E}}(x_P, y_P)$ est normal à $\mathcal{E}$ en P. La tangente à $\mathcal{E}$ en P est donc l'ensemble des points $N(x,y)$ tels que $\overrightarrow{PN} \cdot \nabla f_{\mathcal{E}}(x_P, y_P) = 0$. Cette condition s'écrit :

   $$(x - x_P)\frac{\partial f_{\mathcal{E}}}{\partial x}(x_P, y_P) + (y - y_P)\frac{\partial f_{\mathcal{E}}}{\partial y}(x_P, y_P) = (x - x_P) \times \frac{2x_P}{9} + (y - y_P)\frac{y_P}{2}$$
   $$= \left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{3} + (y - \sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{3}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 2 = 0}.$$

3. (a) $M(t_0) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) = P$.

   (b) Le vecteur $M'(t_0)$ est tangent à $\mathcal{E}$ en $M(t_0)$. Donc la tangente à $\mathcal{E}$ en $M(t_0)$ est l'ensemble des points $Q\big(\hat{x}(s), \hat{y}(s)\big)$ tels que $\overrightarrow{M(t_0)Q(s)}$ est colinéaire à $M'(t_0)$. On a donc :

   $$\begin{cases} \hat{x}(s) - x(t_0) = s x'(t_0), \\ \hat{y}(s) - y(t_0) = s y'(t_0), \end{cases} \iff \begin{cases} \hat{x}(s) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1-s), \\ \hat{y}(s) = \sqrt{2}(1+s), \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

   (c) On vérifie que les coordonnées de $Q(s)$ satisfont l'équation trouvée en 2c :

   $$\frac{\sqrt{2}}{3}\hat{x}(s) + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y}(s) - 2 = \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{3\sqrt{2}}{2}(1-s) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}(1+s) - 2 = 1 - s + 1 + s - 2 = 0.$$

4. (a) Voir Figure 1.

   (b) La droite (OP) a une équation cartésienne de la forme

   $$y = \frac{y_P - y_O}{x_P - x_O}(x - x_O) + y_O = \frac{2}{3}x.$$

On en déduit une équation paramétrique de cette droite pour $R\big(\breve{x}(\tau), \breve{y}(\tau)\big)$:

$$\begin{cases} \breve{x}(\tau) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \tau, \\ \breve{y}(\tau) = \frac{2}{3}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \tau\right), \end{cases} \qquad \tau \in \mathbb{R}.$$

Ce paramétrage est choisi de sorte que $R(0) = P$ et que le sens des τ croissants corresponde à la direction $\overrightarrow{PO}$.

(c) On note $\mathcal{L}$ le contour de $\mathcal{O}$ orienté dans le sens direct, soit :

$$\mathcal{L} = \overbrace{\{(s,0),\ s \in [0,1]\}}^{\mathcal{L}_1} \bigcup \overbrace{\left\{(3\cos t, 2\sin t),\ t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right\}}^{\mathcal{L}_2}$$
$$\bigcup \underbrace{\left\{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \tau, \frac{2}{3}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \tau\right)\right),\ t \in \left[0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]\right\}}_{\mathcal{L}_3}.$$

Par la formule de Green-Riemann, on a :

$$\begin{aligned}
\text{aire}(\mathcal{O}) = \iint_{\mathcal{O}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathcal{L}} x \, \mathrm{d}y &= \int_{\mathcal{L}_2} x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\mathcal{L}_3} \breve{x}(\tau)\breve{y}'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= 6\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \,\mathrm{d}t - \frac{2}{3}\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \tau\right) \mathrm{d}\tau \\
&= 6\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{3}\left[\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \tau\right)^2\right]_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \\
&= 3\left[\frac{\sin(2t)}{2} + t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = \frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}$$

La contribution le long de $\mathcal{L}_1$ est nulle.

5. (a) ω_1 est une 1-forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

(b) Calculons l'intégrale curviligne suivante :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{E}} \omega_1 &= \int_0^{2\pi} \left[P\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\right] \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-y(t)x'(t)}{36} + \frac{x(t)y'(t)}{36}\right] \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{6}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

A noter que l'on ne peut pas utiliser la formule de Green-Riemann pour transformer l'intégrale curviligne le long de $\mathcal{E}$ en une intégrale sur le domaine $\mathcal{D}$ car ω_1 n'est pas définie en $(0,0) \in \mathcal{D}$.

(c) On a, pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{4x^2 + 9y^2 - 8x^2}{(4x^2+9y^2)^2} = \frac{9y^2 - 4x^2}{(4x^2+9y^2)^2}, \\
\frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{4x^2 + 9y^2 - 18y^2}{(4x^2+9y^2)^2} = \frac{9y^2 - 4x^2}{(4x^2+9y^2)^2}.
\end{aligned}$$

(d) On a bien $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, ce qui montre que ω_1 est fermée sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ mais le domaine de définition comporte un trou. Donc on ne peut pas conclure que la forme ω_1 est exacte par le théorème de Poincaré. En revanche, on sait d'après la question 5b que l'intégrale curviligne de ω_1 sur le contour fermé $\mathcal{E}$ n'est pas nulle, ce qui prouve que ω_1 n'est pas exacte.

(e) Pour $\varphi(x,y) = \ln(1+4x^2+9y^2)$ infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8x}{1+4x^2+9y^2} \\ \dfrac{18y}{1+4x^2+9y^2} \end{pmatrix}.$$

(f) On a $\omega_2 = \mathrm{d}\varphi$, ce qui prouve que ω_2 est une 1-forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, comme $\mathcal{E}$ est un contour fermé, on a $\displaystyle\int_{\mathcal{E}} \omega_2 = 0$.

6. (a) On a vu à la question 2a que $\mathcal{E}$ correspondait à la ligne de niveau $f_{\mathcal{E}}(x,y) = 0$. On peut ainsi représenter $\mathcal{E}$ localement par une fonction implicite $y = \psi(x)$ au voisinage des points (x_0,y_0) tels que $\dfrac{\partial f_{\mathcal{E}}}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$, c'est-à-dire $y_0/2 \neq 0$, soit encore $y_0 \neq 0$. D'où, en-dehors des points $(3,0)$ et $(-3,0)$, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites.

(b) Tous les points de $\mathcal{D}$ vérifient $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \leqslant 1$, donc en particulier $-3 \leqslant x \leqslant 3$. Si l'on fixe $x_0 \in [-3,3]$, les points de $\mathcal{E}$ ayant x_0 pour abscisse satisfont

$$y_0^2 = 4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right) \quad \Longrightarrow \quad y_0 = \pm 2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}.$$

Les points de $\mathcal{D}$ ayant x_0 pour abscisse vérifient ainsi $-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} \leqslant y_0 \leqslant 2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$. On choisit donc $\alpha = 3$, $\beta = 2$ et $\gamma = \frac{1}{9}$.

(c) Appliquons le théorème de Fubini en utilisant le paramétrage de la question précédente :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} x^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-3}^{3} \left(\int_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} x^2 \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= 4\int_{-3}^{3} x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\,\mathrm{d}x = 8\int_{0}^{3} x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\,\mathrm{d}x \\ &= 216\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = 54\int_0^{\pi/2}\sin^2(2\theta)\,\mathrm{d}\theta = 27\int_0^{\pi/2}\big(1-\cos(4\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{27\pi}{2}.\end{aligned}$$

en utilisant à la deuxième ligne la parité de la fonction en x, puis à la troisième ligne le changement de variables $x = 3\cos\theta$ ainsi que les formules de trigonométrie rappelées dans l'énoncé.

(d) On pose $\Phi(r,\theta) = (3r\cos\theta, 2r\sin\theta)$. Le jacobien de Φ s'écrit alors :

$$\operatorname{jac}\Phi(r,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial r} & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial r} & \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\cos\theta & -3r\sin\theta \\ 2r\sin\theta & 2\cos\theta \end{vmatrix} = 6r.$$

D'où, en appliquant le changement de variables $(x,y) = \Phi(r,\theta)$ puis en utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} 9r^2\cos^2\theta\, 6r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= 54\left(\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\right) = 54\times\frac{1}{4}\times\pi = \frac{27\pi}{2}.\end{aligned}$$

7. (a) Voici la figure correspondante :

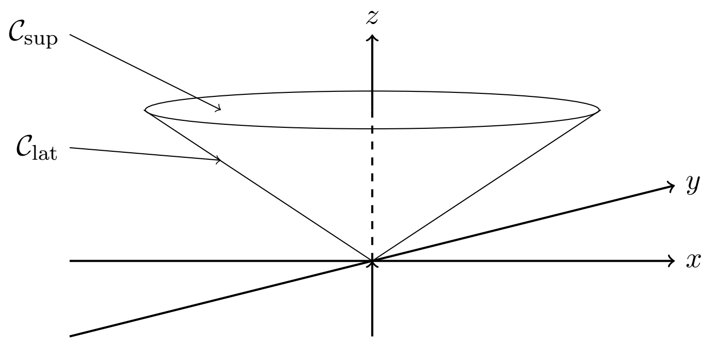

FIGURE 2 – Cône $\mathcal{K}$

(b) Résolvons le système suivant correspondant à l'intersection de $\mathcal{C}$ avec le plan $y = 0$:

$$\begin{cases} z^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}, \\ y = 0, \\ z \in [0, 1], \end{cases} \iff \begin{cases} z = \pm\frac{x}{3}, \\ y = 0, \\ z \in [0, 1]. \end{cases}$$

L'intersection correspond donc aux deux segments $[OA_-]$ et $[OA_+]$ avec $A_\pm = (\pm 3, 0, 1)$.

(c) i. Compte-tenu de la paramétrisation proposée pour la surface latérale de $\mathcal{C}$, on peut déterminer les coordonnées du vecteur normal à la surface :

$$\overrightarrow{m}_{\text{lat}}(u, v) = \begin{pmatrix} 3\cos v \\ 2\sin v \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3u\sin v \\ 2u\cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u\cos v \\ -3u\sin v \\ 6u \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$\|\overrightarrow{m}_{\text{lat}}(u, v)\| = \sqrt{4u^2\cos^2 v + 9u^2\sin^2 v + 36u^2} = u\sqrt{40 + 5\sin^2 v}.$$

Ainsi, le vecteur normal unitaire s'écrit

$$\overrightarrow{n}_{\text{lat}}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{40 + 5\sin^2 v}} \begin{pmatrix} -2\cos v \\ -3\sin v \\ 6 \end{pmatrix}.$$

On remarque que la normale unitaire est indépendante de l'altitude u.

ii. On voit que la composante selon z de $\overrightarrow{n}_{\text{lat}}(u, v)$ est positive, ce qui montre que le vecteur rentre dans $\mathcal{K}$. Il n'est donc pas extérieur.

iii. Comme la surface supérieure est horizontale (parallèle au plan (xOy)), on a directement :

$$\overrightarrow{n}_{\text{sup}}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

iv. On pose $\overrightarrow{W} = (x, 0, 0)$ et $\mathrm{d}\varsigma = \|\overrightarrow{m}_{\text{lat}}(u, v)\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. En utilisant la formule de Stokes puis le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{K}) &= \iiint_{\mathcal{K}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \iint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{W} \cdot (-\overrightarrow{n}_{\text{lat}})\,\mathrm{d}\varsigma \\ &= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} x(u, v) \times 2u\cos v\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= 6\left(\int_0^1 u^2\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2 v\,\mathrm{d}v\right) = 6 \times \frac{1}{3} \times \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2v)}{2}\,\mathrm{d}v = 2\pi. \end{aligned}$$

On aura noté que la contribution de la surface supérieure est nulle car $\overrightarrow{W} \cdot \overrightarrow{m}_{\text{sup}} = 0$.

(d) Étudions le changement de variables $(x, y, z) = \Psi(r, \theta, h)$ où $x = 3r\cos\theta$, $y = 2r\sin\theta$ et $z = h$ sous les contraintes $\mathcal{P} = \left\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid h \in [0,1],\ r \in [0,h],\ \theta \in [0, 2\pi]\right\}$. Le calcul du jacobien donne $6r$.

Par symétrie de $\mathcal{K}$, le centre de gravité K de $\mathcal{K}$ se situe nécessairement sur l'axe des z. La cote z_K de K vaut :

$$\begin{aligned} z_K &= \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathcal{K})} \iiint_{\mathcal{K}} z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi} \iiint_{\mathcal{P}} 6rh \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}h \\ &= 6 \int_0^1 h \left(\int_0^h r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}h = 3 \int_0^1 h^3 \,\mathrm{d}h = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

On a donc $K = (0, 0, \frac{3}{4})$.

(e) Le flux du champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ à travers la surface $\mathcal{C}$ (de l'intérieur vers l'extérieur) est donné par la formule de Green-Ostrogradsky :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{V} \cdot (-\overrightarrow{n}_{\mathrm{lat}}) \,\mathrm{d}\varsigma &= \iiint_{\mathcal{K}} \mathrm{div}\, \overrightarrow{V}(x, y, z) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\mathcal{K}} \left(3x^2 + x^2 + x\right) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iiint_{\mathcal{P}} \left(36r^2\cos^2\theta + 3r\cos\theta\right) \,6r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}h \\ &= 216 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta \right) \left(\int_0^1 \int_0^h r^3 \,\mathrm{d}r\mathrm{d}h \right) = 216\pi \int_0^1 \frac{h^4}{4} \,\mathrm{d}h = \frac{54\pi}{5}. \end{aligned}$$