UMPC 2012-2013 LM256

Examen - 6 Janvier 2014

2 heures. Les téléphones, les calculatrices et tous les documents sont interdits. Le soin apporté à la rédaction sera un élément important de la notation. Chacun des cinq exercices contribuera approximativement à 5 points de la note sur 20. En particulier, il suffit d'en résoudre parfaitement 4 pour avoir la note maximale.

Exercice 1 : On cherche l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles continues telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0. \tag{1}$$

Soit f une fonction satisfaisant l'équation (1). On pose

$$\forall (r,\theta) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \quad g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

1. Calculer pour tout $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ la quantité $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$.
2. Décrire l'ensemble des solutions de l'équation (1).

Exercice 2 : Soit $\vec{V}$ le champ de vecteur dans $\mathbb{R}^2$ d'équation

$$\vec{V}(x,y) = (-y, x).$$

1. Déterminer s'il existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\vec{V} = \operatorname{grad} f$.
2. Calculer la circulation I_1 du champ $\vec{V}$ le long du segment de $A = (2,1)$ vers $B = (1,2)$.
3. Calculer la circulation I_2 du champ $\vec{V}$ le long de la branche d'hyperbole d'équation $xy = 2$ orientée de A vers B.
4. Dessiner la région D décrite ci-dessous et calculer son aire à l'aide du théorème de Green-Riemann.

$$D = \{(x,y) \in [0,+\infty[^2, xy \geq 2, x+y \leq 3\}.$$

Exercice 3 : On considère l'ensemble D défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |y| \leq |x|, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

1. Dessiner D.
2. Calculer $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$.
3. Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in D, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$. Dessiner V et calculer son volume.

Exercice 4 : Soit C la courbe d'équation polaire $r = \cos(\theta)^3$ avec $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

1. Donner une équation cartésienne de C.
2. Déterminer les points singuliers de C à partir de l'équation cartésienne.
3. Déterminer l'aire de la région délimitée par C.
4. Quel point de C a son ordonnée maximale ?

Exercice 5 : Soit D le domaine de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ avec $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

1. Soit S le bord de D. Faire un dessin de S et de D.
2. Calculer le volume de D.

   Notons S le bord de D orienté suivant le vecteur normal extérieur. Notons S_1 la partie de S contenue dans la surface $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $S_2 = S \setminus S_1$ (le complémentaire de S_1 dans S). Soit $\vec{V}$ le champ de vecteurs de composantes $(P, Q, R) = (x^3, y^3, z^3)$.
3. Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers S_1.
4. Calculer le flux de $\vec{V}$ a travers S_2.
5. Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers S en utilisant la formule d'Ostrogradsky.
6. Calculer l'aire de S_1 et de S_2.
7. Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de la courbe C, bord de S_1, orientée dans le sens trigonométrique par rapport a l'orientation de S_1 (dont le vecteur normal est vers l'extérieur).