UMPC 2012-2013 LM256

# Examen - 14 Janvier 2013

*2 heures. Les téléphones, les calculatrices et tous les documents sont interdits. Le soin apporté à la rédaction sera un élément important de la notation. Chacun des cinq exercices contribuera approximativement à 5 points de la note sur 20. En particulier, il suffit d'en résoudre parfaitement 4 pour avoir la note maximale.*

**Exercice 1 :** On cherche l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0. \tag{1}$$

Soit $f$ une fonction satisfaisant l'équation (1). On pose

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad g(u,v) = f(2u-v, -u+v).$$

1. Calculer pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ la quantité $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)$.
2. En déduire la forme générale de $g$.
3. Décrire l'ensemble des solutions de l'équation (1).
4. Donner une solution non triviale de l'équation (1).

**Exercice 2 :** Soit $\vec{V}$ le champ de vecteur dans $\mathbb{R}^2$ d'équation

$$\vec{V}(x,y) = (x^2 - y, y^2 + x).$$

1. Énoncer le théorème de Green-Riemann.
2. Calculer la circulation $I_1$ du champ $\vec{V}$ le long du segment orienté de $A = (-1,0)$ vers $B = (1,0)$.
3. Calculer la circulation $I_2$ du champ $\vec{V}$ le long de l'arc du demi-cercle supérieur de $A$ vers $B$.
4. Déterminer s'il existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\vec{V} = \operatorname{grad} f$.
5. Calculer la quantité $I_1 - I_2$ à l'aide du théorème de Green-Riemann.

**Exercice 3 :** On considère l'ensemble $D$ défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

1. Dessiner $D$.
2. Déterminer à quelle condition sur $(r, \theta) \in ]0, +\infty[\times[0, 2\pi[$ le point de coordonnées $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ appartient à $D$.
3. Calculer $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ par un changement de variables polaire.
4. Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x-1)^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. Dessiner $V$ et calculer son volume.

**Exercice 4 :** Soit $C$ la courbe d'équation cartésienne $y^2 = x^2(1-x)$.

1. Tracer $C$ (on pourra étudier la fonction $y = x^2(1-x)$) et déterminer les points singuliers de $C$.
2. Soit $C'$ la partie de $C$ vérifiant $x \geq 0$. En posant $x = \sin(t)^2$, donner une paramétrisation de $C'$.
3. À l'aide de cette paramétrisation, calculer l'aire de la partie entourée par $C'$.

**Exercice 5 :** Soit $D$ l'ensemble défini par

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z \geq 0, z^2 \geq x^2 + y^2, 2z \leq x^2 + y^2 + 1\}.$$

1. Dessiner $D$ (on pourra remarquer que c'est un solide de révolution autour de l'axe $Oz$).
2. Soit $S_1$ la partie du bord de $D$ satisfaisant l'équation $z^2 = x^2 + y^2$ et $S_2$ la partie du bord de $D$ satisfaisant l'équation $2z = x^2 + y^2 + 1$.
   Soit $\vec{V}$ le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z) = (x, y, z)$. Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers la surface $S_2$ orientée vers le haut.
3. Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers $S_1$ (on pourra remarquer que $\vec{V}$ est tangent à $S_1$).
4. En déduire le volume de $D$ en appliquant le théorème d'Ostrogradski.