UMPC 2012-2013 LM256

Examen - 19 Juin 2013

2 heures. Les téléphones, les calculatrices et tous les documents sont interdits. Le soin apporté à la rédaction sera un élément important de la notation. Chacun des cinq exercices contribuera approximativement à 5 points de la note sur 20. En particulier, il suffit d'en résoudre parfaitement 4 pour avoir la note maximale.

Exercice 1 : Soit $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On lui associe la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$g(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2}). \tag{1}$$

1. Calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ au moyen de f' et f''.
2. Déterminer toutes les fonctions g telles que $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 0$.

Exercice 2 : On considère le champ de vecteurs défini sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0 \text{ et } y > 0\}$ par la formule :

$$\vec{V}(x,y) = (\frac{1}{x+y} + y^2, \frac{1}{x+y} + 2xy)$$

1. Montrer que $\vec{V}$ est un champ de gradient et trouver une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ telle que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f$.
2. Calculer l'intégrale curviligne $\int_\gamma \vec{V} \cdot d\vec{M}$ où γ est un quart de cercle centré en $(2,2)$ de rayon 1, reliant $A = (3,2)$ à $B = (2,3)$.

Exercice 3 : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a > 0$ et $b > 0$. On note γ l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

parcourue dans le sens trigonométrique et D la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

1. Calculer l'intégrale double
$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dxdy.$$
(on posera $x = ar\cos(\theta)$ et $y = br\sin(\theta)$)
2. Calculer l'intégrale curviligne
$$J = \int_\gamma (y^3 dx - x^3 dy)$$
3. Quelle relation existe-t-il entre I et J ?

Exercice 4 : On note γ la courbe paramètre définie pour $t \in \mathbb{R}$ par
$$\gamma(t) = (2 + t^2, t(3 + t^2)).$$

1. Montrer que γ admet une tangente en tout point et la calculer.
2. La courbe a-t-elle un point double ? C'est-à-dire peut on trouver deux réels distincts t_1, t_2 tels que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$?
3. Soit C la courbe de niveau 0 de la fonction $f(x, y) = x^3 - y^2 - 3x - 2$. Vérifier que tout point de γ appartient à C.
4. Montrer que f admet un point critique qui appartient à C mais pas γ.

Exercice 5 : Soient a et R deux réels satisfaisant $0 < a \leq R$.

1. Dessiner et calculer le volume de l'ensemble suivant :
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq R \text{ et } |z| \leq a\}$$
2. Soit V le champ de vecteurs défini par $V(x, y, z) = \frac{1}{3}(x, y, z)$. En appliquant la formule d'Ostrogradski à D et V, exprimer ce volume à l'aide des aires des domaines suivants :
$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = R \text{ et } |z| \leq a\}$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq R \text{ et } z = a\}$$