Examen du 23 Mai 2013
Durée: 2 heures

Les documents, calculatrices, portables ... ne sont pas autorisés.
Les 4 énoncés sont indépendants (et de valeurs sensiblement égales).
Les réponses devront être justifiées (sauf pour la question de cours).

I

1°/ (**Question de cours**). Soient $\mathcal{E}$ un espace affine réel et n un entier ≥ 3. On considère un système $\{(A_1, \alpha_1), ..., (A_n, \alpha_n)\}$ de n points pondérés de $\mathcal{E}$, et un entier $m \in [2, n-1]$.

i) Qu'entend-on par la "propriété d'associativité" des barycentres ? On commencera par préciser les hypothèses à faire sur $\sum_{i=1}^n \alpha_i, \sum_{i=1}^m \alpha_i$ et $\sum_{i=m+1}^n \alpha_i$ pour pouvoir énoncer cette propriété (qu'on ne demande pas de démontrer).

ii) Quel énoncé classique cette propriété entraîne-t-elle sur les médianes d'un triangle ABC (non plat) ?

2°/ On considère un tétraèdre (non aplati) $ABCD$ de $\mathbb{R}^3$, et on note G l'isobarycentre du système $\{A, B, C, D\}$.

i) Soient M le milieu du segment AB, et N celui de CD. Montrer que $M \neq N$, et que la droite (MN) passe par G.

ii) Déterminer l'intersection du plan (ABC) avec la droite (DG).

II

Soit a un paramètre réel. On considère dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ les sous-ensembles Δ, Δ' définis respectivement par les couples d'équations

$$(\Delta) \left\{ \begin{array}{l} x - 2y - z - 2 = 0 \\ 2x + y + z + 1 = 0 \end{array} \right. \qquad (\Delta') \left\{ \begin{array}{l} x - 3y - 1 = 0 \\ 3x - 5y + a = 0 \end{array} \right.$$

1^0/ i) Montrer que Δ et Δ' sont des droites affines.

ii) Trouver un vecteur $\vec{v}$ non nul de la droite directrice $D = \vec{\Delta}$ de Δ.

iii) Même question par la droite Δ'.

2^0/ i) Montrer que Δ et Δ' ne sont pas parallèles, et déduire de cette propriété que les trois conditions suivantes sont ici équivalentes :

(C_1): $< \Delta, \Delta' >$ est un plan ; (C_2): $\Delta \cap \Delta'$ est un point ; (C_3): $\Delta \cap \Delta'$ n'est pas vide.

ii) Montrer qu'il existe une unique valeur a_0 de a, que l'on calculera, telle que $\Delta \cap \Delta'$ ne soit pas vide.

3^0/ On suppose désomais que $a = a_0$.

i) Calculer les coordonnées cartésiennes du point $P = \Delta \cap \Delta'$.

ii) Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{H} =< \Delta, \Delta' >$ engendré par Δ et Δ'.

III

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base orthonormée de son espace vectoriel directeur E, et A, B deux points de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AB} = e_3$. Soient par ailleurs Δ_1 la droite de $\mathcal{E}$ passant par A, de vecteur directeur e_1, et Δ_2 la droite de $\mathcal{E}$ passant par B, de vecteur directeur e_2.

Pour $i = 1, 2$, on note f_i la rotation de $\mathcal{E}$ d'axe Δ_i, d'angle π, et on pose $f = f_2 \circ f_1$.

1°/ Donner les matrices représentatives dans la base $\mathcal{B}$ de E des parties linéaires $\overrightarrow{f}_1$, $\overrightarrow{f}_2$, $\overrightarrow{f}$ des trois isométries affines f_1 , f_2 , f .

2°/ i) Montrer que f est un vissage (ou une rotation).

ii) Déterminer l'axe, l'angle et le vecteur de glissement de f.

3°/ i) Calculer $f \circ f$.

ii) On pose $f' = f_1 \circ f_2$. Décrire les isométries affines $f_2 \circ f_2$, $f' \circ f$ et $f' \circ f'$.

IV

Soient $\mathcal{R} = \{A, B, C\}$ un repère affine d'un plan affine réel $\mathcal{E}$. Les coordonnées barycentriques des points de $\mathcal{E}$ seront relatives à ce repère. On fixe un point P situé sur la droite (BC).

1°/ Dire pourquoi il existe un unique nombre réel λ tel que $\overrightarrow{CP} = \lambda\, \overrightarrow{CB}$, et calculer en fonction de λ les coordonnées barycentriques (x, y, z) de P.

2°/ i) Soit Δ_1 la droite parallèle à (BA) passant par P. Montrer que $\Delta_1 \cap (CA)$ est un point P_1, et que $\overrightarrow{CP_1} = \lambda\, \overrightarrow{CA}$.

ii) Calculer en fonction de λ les coordonnées barycentriques (x_1, y_1, z_1) de P_1.

3°/ Soit de même $P_2 \in (AB)$ l'intersection de (AB) avec la parallèle Δ_2 à (CB) passant par P_1, et $P_3 \in (BC)$ l'intersection de (BC) avec la parallèle à (AC) passant par P_2.

i) Faire un dessin de cette configuration.

ii) Calculer en fonction de λ les coordonnées barycentriques de P_2, puis de P_3, dans le repère $\mathcal{R}$.

4°/ Soit $f : (BC) \to (BC)$ l'application qui attache au point P de (BC) le point $P_3 := f(P)$ de (BC).

i) Exprimer f en coordonnées barycentriques dans le repère affine $\{B, C\}$ de la droite affine (BC).

ii) Déterminer l'ensemble des points fixes de f, et calculer le point $f(f(P))$.