Université Paris 6
Année universitaire 2012-2013
Cours de *Géométrie affine et euclidienne* (LM 323)
Feuille d'exercices numéro 4.

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel euclidien et soit u une isométrie de E.

i) Montrer que si E est de dimension paire et si u est indirecte, alors 1 est valeur propre de u.
ii) Montrer que si E est de dimension impaire et si u est directe alors 1 est valeur propre de u.

Exercice 2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Soit σ la symétrie par rapport à G et parallèlement à F, et soit π la projection sur G parallèlement à F.

i) Montrer que σ est une isométrie si et seulement si $G = F^{\perp}$; on dit alors que σ est la *symétrie orthogonale* par rapport à G. À quelle condition (portant sur les dimensions des espaces en jeu) est-elle directe ?
ii) Montrez que π est auto-adjoint si et seulement si $G = F^{\perp}$; on dit alors que π est la *projection orthogonale* sur G.

Exercice 3. Si E est un espace vectoriel euclidien, on appelle *réflexion* de E toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan. Montrer que toute isométrie de E est produit d'un nombre fini de réflexions. Indication : procéder par récurrence sur la dimension de E.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel euclidien et soit u un endomorphisme symétrique de E. On se propose de donner une démonstration du fait que u est diagonalisable en base orthonormée. On procède par récurrence sur la dimension de E.

i) Expliquez pourquoi c'est évident si $E = \{0\}$.
On suppose maintenant que dim $E > 0$ et que la propriété a été prouvée pour les espaces de dimension strictement inférieure à celle de E. On fixe une base orthonormée de E et l'on note M la matrice de u dans la base en question.
ii) Expliquer pourquoi la matrice M possède une valeur propre complexe λ. En considérant un vecteur colonne X non nul à coefficients complexes tel que $MX = \lambda X$, montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$.
iii) Conclure à l'aide de l'hypothèse de récurrence.

Exercice 5. Soient $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien orienté, soient O et O' deux points de $\mathcal{E}$, et soient θ et θ' deux nombres réels. Soit r (resp. r') la rotation de centre O (resp. O') et d'angle θ (resp. θ'). Soit v un vecteur de l'espace directeur de $\mathcal{E}$.

i) Montrer que si $\theta + \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ alors $r \circ r'$ est une rotation d'angle $\theta + \theta'$; proposez une construction géométrique de son centre. Indication : penser à écrire chacune des deux rotations en jeu comme composée de symétries orthogonales.
ii) Montrer que si $\theta + \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$ alors $r \circ r'$ est une translation ; montrer que si $O \neq O'$ alors le vecteur de cette translation est non nul.

iii) Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, montrer que $t_v \circ r$ et $r \circ t_v$ sont toutes deux des rotations d'angle θ ; donner une construction géométrique de leurs centres, en suivant une méthode analogue à celle du i).

Exercice 6. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur un corps k quelconque, soit v un vecteur de l'espace directeur E de $\mathcal{E}$ et soit f une application affine bijective de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$; décrire l'application affine $f \circ t_v \circ f^{-1}$.

Exercice 7. On travaille dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ vu comme un plan affine euclidien orienté de la façon usuelle. Soit G l'ensemble des applications affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui sont de la forme $t_v \circ r^n$ où $v \in \mathbb{Z}^2$ et où r est la rotation de centre $(0,0)$ et d'angle $\pi/2$. On pourra utiliser certains des résultats des deux exercices précédents.

i) Montrer que G est un sous-groupe du groupe des isométries affines directes de $\mathcal{E}$.
ii) Déterminer l'ensemble des translations qui appartiennent à G.
iii) Déterminer l'ensemble des rotations qui appartiennent à G.

Exercice 8. On travaille dans un plan affine euclidien orienté $\mathcal{E}$ d'espace directeur E. Soit G un sous-groupe du groupe des isométries affines directes de $\mathcal{E}$ et soit T le groupe des translations de E.

i) On suppose que $G \cap T = \{\mathrm{Id}\}$ et que $G \neq \{\mathrm{Id}\}$. Soit $O \in \mathcal{E}$ et soit θ un réel non nul modulo 2π tel que la rotation de centre O et d'angle θ appartienne à G ; on se propose de montrer que G est composé de rotations de centre O. On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe une rotation r d'angle non nul dans G dont le centre O' diffère de O ; construire une rotation dans G dont l'angle est égal à θ et dont le centre diffère de O, et aboutir à une contradiction.
ii) On suppose que $G \cap T$ est de la forme $\{t_{nu}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ pour un certain vecteur u non nul de E. Si r est une rotation de G montrer que son angle est égal à 0 ou π. Indication : considérer $r \circ t_u \circ r^{-1}$.
iii) On suppose que $G \cap T$ est de la forme $\{t_{nu+mv}\}_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ pour une certaine base (u,v) de E. Si r est une rotation de G montrer que son angle est égal à $0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 3\pi/2$ ou $5\pi/3$. On utilisera une méthode analogue à celle du ii) ; attention : la base (u,v) n'est pas supposée orthonormée.

Exercice 9. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3, soient a, b et c trois nombres réels et soit f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ donnée, dans un certain repère orthonormé $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}$, par la formule

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x/3 + 2y/3 - 2z/3 + a \\ 2x/3 + y/3 + 2z/3 + b \\ 2x/3 - 2y/3 - z/3 + c \end{pmatrix}$$

Montrer que f est un vissage ; déterminer, en fonction de a, b et c, son axe, son vecteur de glissement, et son angle au signe près. Pour quelles valeurs de (a,b,c) ce vissage est-il une rotation ?

Exercice 10. Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien orienté et soit (ABC) un repère affine de $\mathcal{E}$. On note α (resp. β, resp. γ) la mesure de l'angle $(\vec{AB}, \vec{AC})$ (resp. $(\vec{BC}, \vec{BA})$, resp. $(\vec{CA}, \vec{CB})$). On note respectivement G, H et O le centre de gravité, l'orthocentre (point de concours des hauteurs) et le centre du cercle circonscrit (point de concours des médiatrices) du triangle (ABC) ; on travaille en coordonnées barycentriques dans le repère (A,B,C).

i) On suppose que le triangle (ABC) est rectangle, par exemple en A ; déterminer H et donner ses coordonnées barycentriques.

ii) On suppose que α, β et γ sont tous trois différents de $\pi/2$ modulo π ; soit A' le projeté orthogonal de A sur (BC) ; on définit B' et C' de façon analogue. Calculez les coordonnées barycentriques de A', B' et C', puis celles de H.

iii) Calculer les coordonnées barycentriques de O (on pourra là encore traiter à part le cas où le triangle est rectangle).

iv) Montrez que G, H et O sont alignés.

Exercice 11. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3, et soient Δ et Δ' deux droites de $\mathcal{E}$ dont l'intersection est un singleton O. Soit r une rotation d'axe Δ et soit r' une rotation d'axe Δ'. Montrer que $r \circ r'$ est une rotation, et proposer une construction géométrique de son axe.

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 ; on le munit d'une BON $(e_1; e_2; e_3)$. Soit r l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans $(e1; e2; e3)$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Que peut-on dire de r ? Soit $\theta \in \mathbb{R}$; vérifier que

$$\mathcal{B}_\theta := (\cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2, -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2, e_3)$$

est une BON de E ; soit r_θ l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans $\mathcal{B}_\theta$ est M. Que peut-on dire de r_θ ? Montrez que $r \circ r_\theta$ est une rotation dont on déterminera l'angle (au signe près) en fonction de θ.