TD 3 : Corrigé partiel

Exercice 1

(i). L'espace directeur de $\mathcal{G}'$ est l'image de G par la partie linéaire de t_u ; cette partie linéaire est l'identité, d'où il suit que $\mathcal{G}'$ est dirigé par G. L'intersection $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}'$ est vide, sauf si $u = 0$ (si on a $x + u \in \mathcal{G}$ pour un $x \in \mathcal{G}$, il suit que $u \in G \cap F = 0$).

(ii). Soit σ la symétrie vectorielle par rapport à G parallèlement à F ; alors la partie linéaire de s ainsi que calle de s' sont égales à σ. Il suit en particulier que $\overrightarrow{s' \circ s} = \sigma^2 = Id$, c'est à dire que $s' \circ s$ est une translation. Pour trouver son vecteur on calcule l'image d'un point de $\mathcal{G}$: si $x \in \mathcal{G}$, on a $s' \circ s(x) = s'(x)$. D'autre part, le point $x + u$ est sur $\mathcal{G}'$; comme $u \in F$ on en déduit que $s'(x) = x + 2u$. On a donc prouvé que :

$$s' \circ s = t_{2u}.$$

(iii). La partie linéaire de $f = t_v \circ s$ est encore σ, donc par l'exercice 7 de la feuille précédente on a bien $f = t_w \circ s''$ où w est la projection de v sur F et s'' la symétrie par rapport à un sous-espace affine $\mathcal{G}''$ parallèle à $\mathcal{G}$, parallèlement à F. On a ainsi $v - w \in F$, et $t_{v-w} \circ s = s''$. Il vient $s'' \circ s = t_{v-w}$, et par la question (ii) il suit que $\mathcal{G}''$ est le translaté de $\mathcal{G}$ par le vecteur $\frac{1}{2}(v - w)$.

Exercice 3

(1). Deux points donnés par des coordonnées barycentriques sont égaux si et seulement si leur coordonnées sont proportionnelles, ce qui n'est clairement pas le cas ici : on a donc bien $G \neq H$. On écrit l'équation de la droite (GH) sous la forme $ax + by + cz = 0$. On a $C \in (GH)$ (le vérifier) ; il suit que $c = 0$. $G \in (GH)$ donne alors $a + b = 0$; une équation possible de (GH) est donc $x - y = 0$.

(2). On écrit l'équation de la droite $\mathcal{D}$ que l'on cherche à déterminer sous la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$; la condition de parallèlisme avec (GH) s'écrit :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

d'où on tire avec la condition que $P \in \mathcal{D}$ le système d'équations :

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \end{cases}$$

On suppose que $\mathcal{D} \neq (GH)$, il suit que $C \notin \mathcal{D}$ et donc $\gamma \neq 0$; on normalise $\gamma = 1$ et il vient $\beta = \frac{2a+c}{a-b}$ et $\alpha = \frac{2b+c}{b-a}$ (remarquer que $a - b \neq 0$). Un équation pour $\mathcal{D}$ est donc :

$$(2a + c)x - (2b + c)y + (b - a)z = 0.$$

Exercice 4

Dans le repère affine (A, B, C) on peut écrire en coodonnées barycentriques de A', B', C' comme $(0, t, 1 - t), (s, 0, 1 - s), (r, 1 - r, 0)$ où $t, s, r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. on obtient alors :

$$\overrightarrow{A'B} = t\overrightarrow{BC}, \qquad \overrightarrow{A'C} = (t - 1)\overrightarrow{BC},$$
$$\overrightarrow{B'C} = (s - 1)\overrightarrow{AC}, \qquad \overrightarrow{B'A} = s\overrightarrow{AC},$$
$$\overrightarrow{C'A} = r\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{C'B} = (r - 1)\overrightarrow{AB}.$$

On veut donc montrer que A, B, C sont alignés si et seulement si :

$$\frac{t}{t-1}\frac{s-1}{s}\frac{r}{r-1} = 1. \qquad (1)$$

On écrit l'équation de la droite $(A'B')$ sous la forme $ax+by+cz=0$; il vient :

$$\begin{cases} bt+(1-t)c=0 \\ as+(1-s)c=0 \end{cases}$$

Ces deux équations impliquent que $c \neq 0$ (sinon les trois coefficients a, b, c seraient nuls, ce qui n'est pas possible). On peut donc fixer $c=1$; on obtient alors $b=\frac{t-1}{t}, a=\frac{s-1}{s}$. Le point C' est sur la droite $(A'B')$ si et seulement si :

$$\frac{s-1}{s}r=\frac{t-1}{t}(r-1)$$

ce qui est exactement la condition (1).

Exercice 5

On note :

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note de plus Π, Π', Π'' les plans vectoriels dans k^4 d'équations $ax+by+cz+dt=0$, etc. et Π_0 le plan $x+y+z+t=0$.

On a $\mathrm{rg}(A)=1$ si et seulement si $\mathscr{P}, \mathscr{P}'$ sont égaux.

On a $\mathrm{rg}(B)=3$ si et seulement si $\Pi \cap \Pi'$ est un plan non-contenu dans Π_0, i.e. $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$ est une droite. On a $\mathrm{rg}(B)=2$ si et seulement si $\mathscr{P}, \mathscr{P}'$ sont parallèles.

On a $\mathrm{rg}(D)=4$ si ete seulement si $\Pi \cap \Pi' \cap \Pi''$ est une droite non-contenue dans Π_0, ce qui est équivalent à dire que $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' \cap \mathscr{P}''$ est un point.

On a $\mathrm{rg}(D)=3$ et $\mathrm{rg}(C)=3$ si et seulement si $\Pi \cap \Pi' \cap \Pi''$ est une droite contenue dans Π_0, i.e. $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$, $\mathscr{P}' \cap \mathscr{P}''$ et $\mathscr{P}' \cap \mathscr{P}''$ sont trois droites parallèles deux à deux disjointes.

On a $\mathrm{rg}(D)=3$ et $\mathrm{rg}(C)=2$ si et seulement si $\Pi \cap \Pi' \cap \Pi''$ est un plan non-contenu dans Π_0, i.e. $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' \cap \mathscr{P}''$ est une droite.

Enfin, on a $\mathrm{rg}(D)=2$ si et seulement si $\mathscr{P}, \mathscr{P}'$ et $\mathscr{P}''$ sont deux à deux parallèles.

Exercice 6

(1). Si $K_i, i \in I$ sont des parties convexes de $\mathcal{E}$, et $A_1, \ldots, A_n \in \bigcap_{i \in I} K_i$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, +\infty[$ alors pour tout i le barycentre des (A_k, λ_k) est dans K_i : il est donc contenu dans $\bigcap_{i \in I} K_i$, qui est donc bien convexe. Si S est un sous-ensemble de $\mathcal{E}$, alors S est contenu dans au moins une partie convexe de $\mathcal{E}$, nommément $\mathcal{E}$ lui même. On définit alors K comme l'intersection de toutes les parties convexes de $\mathcal{E}$ qui contiennent S : K contient S et il est convexe par ce qui précède. Par définition de K, si un convexe K' de $\mathcal{E}$ contient S alors on a $K \subset K'$: K est donc bien la plus petite partie convexe de E contenant S.

(2). On note $C=\{Bar(A_i, \lambda_i), \lambda_i \in [0, +\infty[\}$; K l'enveloppe convexe de $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Si un convexe contient les points $A_1, \ldots, A_n$ alors il doit contenir tous leurs barycentres à coefficients positifs. En particulier on a $K \supset C$. Pour montrer l'inclusion réciproque il suffit de voir que C est convexe, ce qui découle de l'associativité du barycentre (je laisse au lecteur le soin d'écrire cela rigoureusement, la preuve est semblable à celle de (3) ci-dessous).

(3). On montre par récurrence qu'un barycentre à coefficients strictement positifs de n points de C est dans C. Pour $n=2$ c'est l'hypothèse. Si $A_1, \ldots, A_n \in C$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ on a :

$$Bar((A_1, \lambda_1), \ldots, (A_n, \lambda_n)) = Bar\big((A_1, \lambda_1), \big(Bar((A_2, \lambda_2), \ldots, (A_n, \lambda_n)), \sum_{i=2}^{n} \lambda_i\big)\big)$$

par associativité. Par l'hypothèse de récurrence on a $Bar((A_2, \lambda_2), \dots, (A_n, \lambda_n)) \in C$ et il suit que $Bar((A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n))$ C.

(4). On note $C = \{(x, y), |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$ et $B = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}$. On va montrer :
(i) Les points extrémaux de C sont $\{(\pm 1, \pm 1\})$;
(ii) Les points extrémaux de B sont $\{(x, y), x^2 + y^2 = 1\}$.

(i). Si $|x| < 1$ alors (x, y) est dans l'intérieur du segment horizontal $[-1, 1] \times \{y\}$, si $|y| < 1$ il est dans l'intérieur du segment vertical $\{x\} \times [-1, 1]$. Les points extrémaux de C sont donc contenus dans $\{(\pm 1, \pm 1\})$. Si $|x| = |y| = 1$, $t \in [0, 1]$ et $(x, y) = t(a, b) + (1 - t)(c, d)$ avec $(a, b), (c, d) \in C$ il vient $|ta + (1 - t)c| = 1$, d'où il suit par l'inégalité triangulaire que $t|a| + (1 - t)|c| \geq 1$, ce qui force $|a| = |c| = 1$ et que a et c ainet même signe, donc $a = c$. De la même manière on obtient que $|b| = |d| = 1$ et $b = d$. Il vient finalement $(a, b) = (c, d) = (x, y)$, ce qui prouve que (x, y) est extrémal.

(ii). Un point dans l'intérieur de B est dans l'intérieur d'un diamètre donc il ne peut pas être extrémal. Si $x^2 + y^2 = 1$, et $(x, y) = t(a, b) + (1 - t)(c, d)$ avec $(a, b), (c, d) \in B$ on obtient par l'inégalité triangulaire (cette fois-ci pour la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$) que :

$$1 \leq t^2(a^2 + b^2) + (1 - t)^2(c^2 + d^2) \leq t^2 + (1 - t)^2.$$

Comme $s^2 < s$ pour $s \in]0, 1[$ on doit donc avoir $t = 0$ ou $t = 1$, d'où il suit que (x, y) est extrémal.

Soit K l'enveloppe convexe des A_i. D'après la question 2, tout point de K distinct des A_i est un barycentre non trivial des A_i à coefficients positifs ; en particulier, par assiociativité on peut l'écrire comme point intérieur d'un segment de K. Suposons que l'on ait $A_j = tB + (1 - t)C$ où $B, C \in K$. En particulier B, C sont dans l'espace affine engendré par les A_i (ce dernier est un convexe qui contient les A_i, donc il doit contenir leur enveloppe convexe K). On écrit les coordonnées barycentriques de B et C dans le repère $(A_1, \dots, A_n)$ comme $(b_1, \dots, b_n)$ et $(c_1, \dots, c_n)$; on a $b_i, c_i \geq 0$. Il vient $tb_i + (1 - t)c_i = 0$ pour $i \neq j$, ce qui implique $t = 0$ ou $b_i = 0$ pour tout $i \neq j$ et $(1 - t) = 0$ ou $c_i = 0$ pour tout $i \neq j$. Il suit que $B = A_j$ ou $t = 0$ et $C = A_j$ ou $t = 1$, donc A_j est extrémal.

L'exemple précédent est bien sûr faux si les A_i ne sont pas affinement indépendants : par exemple parmi trois points distincts alignés il en existe un qui est dans l'intérieur du segment entre les deux autres.

Exercice 7

1) Trivial.

2),3),4) Comme indiqué on écrit (quitte à renuméroter) $A_1 = \sum_{\ell=2}^{m} (-\mu_\ell) A_\ell$ avec $\sum_{\ell=2}^{m} \mu_\ell = -1$ et on pose $\mu_1 = 1$. On note S l'ensemble des k tels que $\mu_k \neq 0$, S est non-vide. On a alors pour tout $k \in S$ $\sum_{\ell \neq k} \mu_\ell = -\mu_k$ vu que la somme totale des μ_ℓ est nulle, et il est trivial de vérifier que l'on a ainsi $A_k = \sum_{\ell \neq k} (-\frac{\mu_\ell}{\mu_k}) A_\ell$.

Si $B = \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell A_\ell$ (avec $\sum_\ell \lambda_\ell = 1$) et $k \in S$on peut alors écrire que

$$B = \sum_{\ell \neq k} \left(\lambda_\ell - \lambda_k \frac{\mu_\ell}{\mu_k} \right) A_\ell$$

(on remarque que

$$\sum_{\ell \neq k} \left(\lambda_\ell - \lambda_k \frac{\mu_\ell}{\mu_k} \right) = \sum_{\ell \neq k} \lambda_\ell - \frac{\lambda_k}{\mu_k} \sum_{\ell \neq k} \mu_\ell = (1 - \lambda_k) - \frac{\lambda_k}{\mu_k} \times (-\mu_k) = 1$$

et si on choisit k tel que λ_k / μ_k soit minimal on voit que les coefficients sont tous positifs.