TD 4 : Corrigé partiel

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme orthogonal ou autoadjoint. Dans la suite on utilisera souvent le fait suivant :

Si V est un sous-espace et $u(V) \subset V$ alors $u(V^\perp) \subset V^\perp$.

En voici la preuve (triviale) pour u othogonal : si $x \in V, y \in E$ et $\langle y, z\rangle = 0$ pour tout $z \in V$ il vient

$$\langle u(y), x\rangle = \langle y, u^{-1}(x)\rangle = 0$$

donc $y \in V^\perp$ implique $u(y) \in V^\perp$.

Exercice 1

(i). On note $2n = \dim(E)$. On rappelle que si $\lambda \notin \mathbb{R}$ est une valeur propre de u, alors son conjugué $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de u avec la même multiplicité (une racine d'un polynôme réel et son conjugué ont la même multiplicité). On peut donc écrire l'ensemble des valeurs propres de u (comptées avec multiplicités) comme :

$$\mathrm{Sp}(u) = \lambda_1, \dots, \lambda_{r_1}, \lambda_{r_1+1}, \bar{\lambda}_{r_1+1}, \dots, \lambda_{r_1+r_2}, \bar{\lambda}_{r_1+r_2},$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_{r_1} \in \mathbb{R}$. Il vient $r_1 + 2r_2 = 2n$, en particulier r_1 est pair.

D'autre part, comme u est une isométrie ses valeurs propres réelles sont égales à ± 1 (si $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre non nul pour la valeur propre λ il vient $|\lambda|\|x\| = \|u(x)\| = \|x\|$ d'où suit $|\lambda| = 1$). On note s la multiplicité de 1 comme valeur propre, il vient :

$$-1 = \det(u) = (-1)^{r_1 - s} \prod_{i=r_1+1}^{r_1+r_2} |\lambda_i|^2.$$

Le signe du terme de droite est le même que celui de $(-1)^{r_1-s}$, ce qui force $r_1 - s$ à être impair. Comme r_1 est pair, il suit que s doit être impair, en particulier non nul, et donc que u a un vecteur fixe non nul.

(ii). On peut faire une preuve exactement semblable à celle ci-dessus ou le déduire directement de la première question, ce que je fais ici. Comme E est de dimension impaire, u a nécéssairement une valeur propre réelle λ (parce que son polynôme caractéristique est de degré impair, donc a une racine réelle). Si $\lambda = 1$ on a fini ; sinon, on a $\lambda = -1$ (cf. ci-dessus) et il existe $x \in E$ non nul tel que $u(x) = -x$. Soit $E' = x^\perp$ l'orthogonal de x ; alors E' est de dimension paire et u préserve E'. L'application restreinte $u' = u|_{E'}$ est une isométrie de l'espace euclidien E' (muni de la restriction du produit scalaire de E) et elle est indirecte (puisque $1 = \det(u) = -\det(u')$) ; par la question (i) elle a donc un vecteur fixe non nul, donc u aussi.

Exercice 2

(i). Soit $u \in E$, $v = \pi(u) \in G$ et $w = u - v \in F$. On a alors $\sigma(u) = u - 2w = v - w$, d'où il suit que :

$$\begin{aligned}\|\sigma(u)\|^2 &= \|v - w\|^2 \\ &= \|v\|^2 - 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2 \\ &= \|u\|^2 - 4\langle v, w\rangle.\end{aligned}$$

Si $F = G^\perp$ on a toujours $\langle v, w\rangle = 0$ et il suit que $\|\sigma(u)\| = \|u\|$ pour tout u, i.e. σ est une isométrie. Au contraire, si $F \neq G^\perp$, il existe $v \in F, w \in G$ avec $\langle v, w\rangle \neq 0$ et si on pose $u = v + w$ il vient $\|\sigma(u)\| \neq \|u\|$, donc σ n'est pas une isométrie.

(ii). On a $\pi = \frac{1}{2}(\sigma + Id)$ d'où il suit que :

$$\pi = \pi^* \Leftrightarrow (\frac{1}{2}(\sigma + Id))^* = \frac{1}{2}(\sigma + Id) \Leftrightarrow \sigma^* = \sigma.$$

On a $\sigma^2 = Id$, donc $\sigma^* = \sigma$ si et seulement si σ est une isométrie, ce qui d'après la question (i) est le cas si et seulement si $F = G^\perp$.

Exercice 3

On note $\mathrm{O}(E)$ le groupe orthogonal de E, i.e. l'ensemble des isométries de E. Si $\dim(E) = 1$ on a $\mathrm{O}(E) = \{\pm Id_E\}$ et le résultat est trivial. Avant de faire l'étape de récurrence on va traiter le cas $\dim(E) = 2$ indépendamment, vu que le contenu géométrique de l'exercice y est particulièrement visible. On remarque tout d'abord qu'en dimension 2, toute isométrie indirecte est une réflexion : en effet, soit $\sigma \in \mathrm{O}(E)$, $\det(\sigma) = -1$. On sait d'après l'exercice 1 que σ a un vecteur fixe $v \neq 0$ dans E ; alors un vecteur $u \neq 0$ orthogonal à v est un vecteur propre de σ (par exemple à cause du fait rappelé au début) et sa valeur propre doit être -1 ; σ est donc la réflexion par rapport à l'hyperplan $\mathbb{R}u$ de E. D'autre part, une symétrie directe est une rotation et donc produit de deux réflexions.

On suppose maintenant que le résultat est vrai pour les espaces de dimension au plus n et que $\dim(E) = n+1$. Soit $\sigma \in \mathrm{O}(E)$, on veut l'écrire comme produit de réflexions. Supposons d'abord que σ a un vecteur fixe $u \neq 0$ dans E ; alors σ préserve son orthogonal E'. Soit $\sigma' = \sigma|_{E'}$ la restriction de σ à E' ; par l'hypothèse de récurrence, il existe des réflexions $\sigma_1', \ldots, \sigma_r'$ de E' telles que $\sigma' = \sigma_1' \circ \ldots \circ \sigma_r'$. Pour $i = 1, \ldots, r$ l'endomorphisme σ_i de $E = \mathbb{R}u \oplus E'$ défini par $(tu, v') \mapsto (tu, \sigma_i'(v'))$ est une réflexion de E : c'est une isométrie indirecte-je laisse la preuve au lecteur-et son espace de points fixes est de dimension n (si σ_i' a pour espace fixe F' il est égal à $\mathbb{R}u \oplus F'$). On a $\sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_r(u) = u$ et $(\sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_r)|_{E'} = \sigma'$ d'où il suit que $\sigma = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_r$ est bien un produit de réflexions.

Si σ n'a pas de point fixe, on construit une réflexion τ telle que $\tau \circ \sigma$ en ait un, ce qui ramène au cas précédent. Soit $u \neq 0 \in E$; on a $\sigma(u) \neq u$ donc l'espace $H = (u - \sigma(u))^\perp$ est un hyperplan. Soit τ la réflexion par rapport à H ; on va montrer que $\tau(\sigma(u)) = u$. On a

$$\langle u - \sigma(u), u + \sigma(u) \rangle = \|u\|^2 - \|\sigma(u)\|^2 = 0$$

d'où il suit que $u + \sigma(u) \in H$ et que la décomposition orthogonale de $\sigma(u)$ sur $H, \mathbb{R}(u - \sigma(u))$ est donnée par

$$\sigma(u) = \frac{1}{2}(u + \sigma(u)) - \frac{1}{2}(u - \sigma(u)).$$

On a donc :

$$\tau(\sigma(u)) = \sigma(u) - (u - \sigma(u)) = u$$

ce qui termine la preuve.

Remarques.

- Le résultat de cet exercice se déduit immédiatement du cas $n = 2$ et du théorème de structure des isométries euclidiennes.
- La preuve ci-dessus donne une borne sur le nombre minimal de réflexions nécessaire pour décomposer une isométrie de E : il est inférieur à $\dim(E)$ (exercice : montrer que cette borne est optimale, i.e. il existe des isométries de E qui ne peuvent pas s'écrire comme produit de moins de $\dim(E)$ réflexions).

Exercice 4

La façon la plus naturelle de traiter cet exercice est de considérer u comme un endomorphisme du complexifié $E_{\mathbb{C}}$ de E qui préserve le produit scalaire hermitien défini par :

$$\langle x + iy, x' + iy' \rangle_{E_{\mathbb{C}}} = \langle x, x' \rangle_E + \langle y, y' \rangle_E + i(\langle y, x' \rangle_E - \langle x, y' \rangle_E).$$

Par exemple, si $E = \mathbb{R}^n$ le produit sur $\mathbb{C}^n$ ainsi obtenu est donné par

$$\langle z, z' \rangle_{E_{\mathbb{C}}} = \sum_{i=1}^n z_i \overline{z_i'}.$$

On a alors les propriétés suivantes :

(i) $\langle ., . \rangle_{E_{\mathbb{C}}}$ est $\mathbb{C}$-linéaire en la première variable ;

(ii) Pour $z, z' \in E_{\mathbb{C}}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a
$$\langle z, \lambda z' \rangle_{E_{\mathbb{C}}} = \overline{\lambda} \langle z, z' \rangle_{E_{\mathbb{C}}};$$

(iii)
$$\langle u(z), z' \rangle_{E_{\mathbb{C}}} = \langle z, u(z') \rangle_{E_{\mathbb{C}}};$$

(iv) si $x \neq 0$ on a $\langle x, x \rangle_{E_{\mathbb{C}}} > 0$

La vérification de (i),(ii) et (iv) est laissée au lecteur. Pour montrer (iii) on choisit une base orthonormée de E, dans laquelle la matrice de u est une matrice M réelle et symétrique. On vérifie alors que si Y, X sont les vecteurs colonnes de coordonnées respectifs de $x, y \in E$ on a $\langle x, y\rangle_{E_\mathbb{C}} {}^t\overline{Y}X$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}\langle u(x), y\rangle_{E_\mathbb{C}} &= {}^t\overline{Y}MX\\ &= {}^t\overline{Y}\overline{M}X\\ &= {}^t(\overline{MY})X = \langle x, u(y)\rangle_{E_\mathbb{C}}.\end{aligned}$$

Si x est un vecteur propre non nul de valeur propre λ on a alors en utilisant (i), (ii) et (iii) ci-dessus :

$$\begin{aligned}\lambda\langle x, x\rangle_{E_\mathbb{C}} &= \langle u(x), x\rangle_{E_\mathbb{C}}\\ &= \langle x, u(x)\rangle_{E_\mathbb{C}}\\ &= \langle x, \lambda x\rangle_{E_\mathbb{C}} = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle_{E_\mathbb{C}}\end{aligned}$$

d'où il suit en utilisant (iv) que $\lambda = \overline{\lambda}$, i.e. que λ est réel. Comme u a une valeur propre complexe, on en déduit qu'il a une valeur propre réelle et la conclusion suit par récurrence en utilisant le fait rappelé au début.

Exercice 5

Dans cet exercice je note ff' la composée $f \circ f'$.

(i). La partie linéaire de rr' est une rotation d'angle $\theta + \theta'$, si ce dernier est $\neq 0 \pmod{2\pi}$ il suit que rr' fixe un point et est donc la rotation d'angle $\theta + \theta'$ autour de ce point.

On note $r^{1/2}$ la rotation de centre O et d'angle $\theta/2$ et $(r')^{-1/2}$ la rotation de centre O' et d'angle $-\theta'/2$. Soit D_1 la droite (OO'), $D_2 = r^{1/2}(D_1)$ et $D_3 = (r')^{-1/2}(D_1)$; on note s_i la réflexion de droite D_i. Alors on a :

$$r = s_2 s_1,\ r' = s_1 s_3.$$

C'est un fait bien connu du cours, qui se retrouve rapidement de manière géométrique. En voici une preuve (presque) purement algébrique, donc incompréhensible (le lecteur est encouragé à rédiger sa propre preuve géométrique) : comme rs_1 est une isométrie indirecte qui fixe le point O, c'est une réflexion et il suit que $(rs_1)^2 = \mathrm{Id}$. On a donc $r = s_1 r^{-1} s_1$, comme $r, r^{\pm 1/2}$ sont des rotations de même centre O elle commutent entre elles et il vient $r = r^{1/2}s_1r^{-1/2}r^{-1/2}s_1r^{-1/2}$; d'autre part on a aussi $(r^{-1/2}s_1)^2 = \mathrm{Id}$ d'où suit $r^{-1/2}s_1r^{-1/2} = s$ et donc $r = r^{1/2}s_1r^{-1/2}s_1$. On sait $r^{1/2}s_1r^{-1/2}$ est une réflexion (isométrie indirecte qui fixe le point O...) donc il suffit de vérifier que sa droite fixe est D_2 pour conclure. Ceci est immédiat : si $M \in D_2$ il existe un $M' \in D_1$ tel que $M = r^{1/2}(M')$ pour un $M' \in D_1$ et il vient alors $r^{1/2}s_1r^{-1/2}(M) = r^{1/2}s_1(M') = r^{1/2}(M') = M$, i.e. M est fixé par $r^{1/2}s_1r^{-1/2}$.

Il vient donc finalement $rr' = s_2s_3$. Dans le cas où les droites D_2, D_3 ne sont pas parallèlles le centre de rr' est donc leur point d'intersection. On vérifie que c'est le cas si et seulement si $\theta + \theta' \neq 0 \pmod{2\pi}$.

(ii). Dans ce cas la partie linéaire est l'identité de E et rr' est donc bien une translation. On vérifie que si $O \neq O'$ et $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$ elle n'a pas un vecteur nul (i.e. qu'elle n'est pas l'identité) en montrant qu'elle ne fixe alors pas le point O' : on a $rr'(O') = r(O')$ qui est différent de O' car l'unique point fixe de r est O (laissé au lecteur).

(iii). Les parties linéaires de rt_v et t_vr sont toutes deux égales à r qui est une rotation vectorielle non triviale, d'où il suit que toutes deux sont des rotations affines.

Soit D_1 la droite de direction $v^\perp$ passant par O, $D_2 = r^{1/2}(D_1)$ et $D_3 = t_{-v/2}(D_1)$. Alors :

$$r = s_2s_1,\ t_v = s_1s_3.$$

On a déjà prouvé le premier point dans la question (i). Pour le second, on voit que s_1 et s_3 ont même partie linéaire, égale à une réflexion vectorielle, donc $\overrightarrow{s_1s_3} = \mathrm{Id}_E$ et s_1s_3 est une translation. Soit $M = O - v/2$, on a $M \in D_3$ donc $s_3(M) = M$. D'autre part :

$$s_1(M) = s_1(O) + \overrightarrow{s_1}(-v/2) = O + v/2$$

d'où il suit que le vecteur de s_1s_3 est égal à v, i.e. $s_1s_3 = t_v$.

On a donc $rt_v = s_2 s_3$, dans le cas où $\theta \neq \pi \pmod{2\pi}$ le point fixe est l'intersection de D_2 et D_3, dans le cas restant c'est $O - v/2$: on a $rt_v(0 - v/2) = r(O + v/2) = r(O) - v/2 = O - v/2$.

Je laisse au lecteur le soin de traiter $t_v r$.

Exercice 6 (rappel)

La partie linéaire de $t = f t_v f^{-1}$ étant l'identité, il suffit pour prouver $t = t_{f(v)}$ de trouver un point $M \in \mathcal{E}$ tel que $r^k(r^{-k}(M) + w) = M + \overrightarrow{r}^k(w)$; on peut en fait le faire directement pour n'importe quel point $M \in \mathcal{E}$

$$f(f^{-1}(M) + v) = f(f^{-1}(M)) + \overrightarrow{f}(v) = M + \overrightarrow{f}(v).$$

Exercice 7

(i). L'ensemble $\mathbf{G}$ est non vide, il faut montrer les deux points suivants :

(a) Pour touts $v, v' \in \mathbb{Z}^2$ et $n, n' \in \mathbb{Z}$ il existe $m \in \mathbb{Z}, u \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$t_v r^n t_{v'} r^{n'} = t_u r^m.$$

(b) Pour touts $v \in \mathbb{Z}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$ il existe $m \in \mathbb{Z}, u \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$r^n t_{-v} = t_u r^m.$$

Je ne prouve que le point (a), (b) étant similaire. On rappelle que (cf. exercice 6) pour $k \in \mathbb{Z}, w \in \mathbb{R}^2$ la transformation affine $r^k t_w r^{-k}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{r}^k(w)$. On voit donc que $r^k t_v r^{-k} = t_{\overrightarrow{r}^k(v)}$, d'où il suit que $r^k t_v = t_{\overrightarrow{r}^k(v)} r^k$. Il vient :

$$\begin{aligned} t_v r^n t_{v'} r^{n'} &= t_v t_{\overrightarrow{r}^k(v)} r^n r^{n'} \\ &= t_{v + \overrightarrow{r}^k(v)} r^{n+n'}. \end{aligned}$$

Pour conclure il faut voir que $v + \overrightarrow{r}^k(w) \in \mathbb{Z}^2$; comme $\mathbb{Z}^2$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$ il suffit de montrer que $\overrightarrow{r}^k(v) \in \mathbb{Z}^2$, ce qui revient à montrer que $r(\mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}^2$. Soit $u = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$, on a bien $r(u) = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$.

(ii). Un élément $t_v r^n \in \mathbf{G}$ est une translation si et seulement si $r^n = \mathrm{Id}$ (ce qui se produit pour $n = 0 \pmod 4$), on en déduit que les translations de $\mathbf{G}$ sont exactement les translations dont le vecteur a des coordonnées entières.

(iii). Les parties linéaires des rotations non triviales de $\mathbf{G}$ sont des puissances de $\overrightarrow{r}$, donc leur angle est dans $\{\pm\frac{\pi}{2}, \pi\}$. Pour chaque angle on va déterminer les centres possibles.

Angle π. un élément de $\mathbf{G}$ est une rotation d'angle π (un demi-tour) si et seulement s'il est de la forme $t_v r^k$ avec $k = 2 \pmod 4$ et $v \in \mathbb{Z}^2$, i.e. s'il est égal à $-t_{-v}$. Soit $v \in \mathbb{Z}^2$, on calcule le point fixe du demi-tour $-t_{-v}$: on identifie le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ et on cherche le point z tel que $-z + v = z$, il vient immédiatement $z = -v/2$. Le point fixe de $-t_{-v}$ est donc $O - \frac{v}{2}$. L'ensemble des points fixes des demi-tours contenus dans $\mathbf{G}$ est ainsi :

$$\frac{1}{2}\mathbb{Z}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x, 2y \in \mathbb{Z}\}.$$

Angle $\pm\frac{\pi}{2}$. On remarque d'abord que si une rotation $r \in \mathbb{G}$ d'angle $\pi/2$ fixe un point M, alors son inverse fixe aussi M. Il suit que tout point fixe pour une rotation de $\mathbf{G}$ de $\mathbf{G}$ d'angle $\pi/2$ est aussi un point fixe pour une rotation de $\mathbf{G}$ d'angle $-\pi/2$, et vice versa. Il suffit donc de traiter l'un des deux cas, disons $+\pi/2$.

Les rotations de $\mathbf{G}$ d'angle $\pi/2$ sont les éléments de la forme $t_v r^k$ avec $v \in \mathbb{Z}^2$ et $k = 1 \pmod 4$. On cherche à déterminer le point fixe d'un tel élément, en passant en complexes on obtient l'équation $iz + v = z$ d'où il suit que $z = \frac{v+iv}{2}$. Le point fixe de $t_v r^k$ est donc $\frac{1}{2}(v + r(v))$. Il suit que l'ensemble des points fixes cherché est égal à :

$$\Lambda = \{\frac{1}{2}(v + r(v)), v \in \mathbb{Z}^2\}. \tag{1}$$

On en donne dans la suite une description plus explicite ; on va montrer que :

$$\Lambda = \{\begin{pmatrix} n/2 \\ m/2 \end{pmatrix}, n, m \in \mathbb{Z}, n + m = 0 \pmod 2\}. \tag{2}$$

La description (1) se réécrit

$$\Lambda = \{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} n-m \\ n+m \end{pmatrix}, n, m \in \mathbb{Z}\}$$

si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Lambda$ on a donc bien $2x, 2y \in \mathbb{Z}$ et $2(x+y) = 2n$ est bien $= 0 \pmod 2$. Réciproquement, si $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$ v érifie les conditions de (2), en résolvant le système

$$\begin{cases} n = x - y \\ m = x + y \end{cases}$$

on trouve la solution $x = \frac{n+m}{2}, y = \frac{m-n}{2}$. Par hypothèse, 2 divise $n+m$ et on a bien $x \in \mathbb{Z}$, et il suit que $y = x - n \in \mathbb{Z}$. On a donc :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{x-y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \end{pmatrix} \in \Lambda.$$

Exercice 8

Si $\mathbf{G}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ on note $\mathcal{T}_\mathbf{G} = \mathbf{G} \cap \mathcal{T}$ le sous-groupe des translations de $\mathbf{G}$. Le but de cet exercice est de montrer que se donner $\mathcal{T}_\mathbf{G}$ impose des restrictions fortes sur $\mathbf{G}$ lui-même. Les cas intéressants sont :

- $\mathcal{T}_\mathbf{G}$ est trivial ;
- $\mathcal{T}_\mathbf{G} \neq \{\mathrm{Id}\}$ est contenu dans une droite vectorielle (on peut distinguer le cas où $\mathcal{T}_\mathbf{G}$ est constitué des multiples entiers d'un vecteur non nul) ;
- $\mathcal{T}_\mathbf{G}$ est un réseau de E (i.e. le sous-groupe engendré par deux vecteurs linéairement indépendants).

(i). Comme indiqué par l'énoncé, on considère deux rotations non triviales $r, r' \in \mathbf{G}$ de centres O, O' distincts. Alors $r'' = r'r(r')^{-1} \in \mathbf{G}$ est une rotation de même angle que r (puisque sa partie linéaire est la même) et de centre $r'(O)$ (on a $r''(r'(O)) = r'r(O) = r'(O)$). Il suit (cf. l'exercice 5(ii)) que $r''r \in \mathbf{G}$ est une translation de vecteur non nul, ce qui contredit l'hypothèse sur $\mathcal{T}_\mathbf{G}$. On conclut que toutes les rotations de $\mathbf{G}$ on le même centre.

Remarque. La conclusion implique que $\mathbf{G}$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{SO}(E)$, en particulier qu'il est abélien.

(ii). On suppose que :

$$\mathcal{T}_\mathbf{G} \subset \mathbb{R}v$$

pour un vecteur $v \in E$ non nul, et que $t_v \in \mathcal{T}_\mathbf{G}$. Soit r une rotation non triviale de $\mathbf{G}$, alors d'après l'exercice 6 on sait que $rt_vr^{-1} \in \mathbf{G}$ est égale à $t_{\overrightarrow{r}(v)}$. Il suit que $\overrightarrow{r}(v)$ est colinéaire à v (en fait égal à $\pm v$ vu que $\overrightarrow{r}$ est une isométrie), et donc que $\overrightarrow{r} = \pm\,\mathrm{Id}_E$ (les seules rotations vectorielles ayant des valeurs propres réelles sont $\pm\,\mathrm{Id}_E$).

Remarque. Supposons que $\mathbf{G}$ contienne une rotation non triviale de centre O, alors les centres des rotations de $\mathbf{G}$ sont contenus dans la droite $O + \mathbb{R}_v$. Si $\mathcal{T}_\mathbf{G} = \mathbb{Z}v$, on peut voir qu'en fait les centres sont exactement les points $O + \frac{n}{2}v$ pour $n \in \mathbb{Z}$, de la même manière qu'à la question (iii) de l'eercice 7 ci-dessus. (Exercice : montrer que le quotient de $\mathbf{G}$ par son sous-groupe distingué $\mathcal{T}_\mathbf{G}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

(iii). Soit r une rotation non triviale de $\mathbf{G}$ et $w \in \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$. D'après l'exercice 6 $rt_wr^{-1} \in \mathbf{G}$ est égale à $t_{\overrightarrow{r}(v)}$. Il suit que $\overrightarrow{r}(v)$ est égal à $nu + mv$ pour des $n, m \in \mathbb{Z}$. Il existe donc des entiers n_1, m_1 et n_2, m_2 tels que $\overrightarrow{r}(u) = n_1u + m_1v$, $\overrightarrow{r}(v) = n_2u + m_2v$. Ceci signifie que la matrice de $\overrightarrow{r}$ dans la base u, v de E est égale à $\begin{pmatrix} n_1 & n_1 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$, en particulier sa trace est égale à $n_1 + m_2$, donc entière. Si θ est l'angle de r on a donc $2\cos(\theta) \in \mathbb{Z}$, ce qui donne les possibilités suivantes pour les valeurs de $\theta \in]-\pi, \pi]$:

- si $2\cos(\theta) = 2$ on a $\theta = 0$;
- si $2\cos(\theta) = -2$ on a $\theta = \pi$;
- si $2\cos(\theta) = -2$ on a $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$;
- si $2\cos(\theta) = 1$ on a $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$
- si $2\cos(\theta) = -1$ on a $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$.

Remarque. Un groupe **G** donné satisfaisant les hypothèses de la question (iii) contient soit des rotations d'angles $0, \pi, \pm\frac{\pi}{2}$, soit des rotations d'angles $0, \pi, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{2\pi}{3}$ (en effet, s'il contenait une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et une autre d'angle $\frac{\pi}{3}$ il en contiendrait une d'angle $\frac{\pi}{6}$, ce qui est impossible). L'exercice 7 montre qu'il existe un **G** dont les angles sont exactement $0, \pi, \pm\frac{\pi}{2}$. Si u, v sont les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ donnés par $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ et r la rotation de centre $(0,0)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ on peut vérifier de la même manière que l'ensemble :

$$\{t_w r^n,\ n \in \mathbb{Z},\ w \in \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v\}$$

est un sous-groupe de $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ dont les angles sont exactement $0, \pi, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{2\pi}{3}$ (exercice : déterminer les centres de ses rotations).

Exercice 9

L'application linéaire associée à f a pour matrice dans une certaine base othonormée de E

$$\begin{pmatrix}1/3 & 2/3 & -2/3\\ 2/3 & 1/3 & 2/3\\ 2/3 & -2/3 & -1/3\end{pmatrix}$$

dont on vérifie immédiatement qu'elle est orthogonale et de déterminant égal à 1, f est donc une isométrie directe, i.e. un vissage. L'angle non signé $\theta \in [0, \pi[$ de f est déterminé par la relation $\mathrm{tr}(f) = 1 + 2\cos\theta$, ce qui donne ici $\theta = \arccos(-1/3)$.

Pour déterminer les éléments géométriques de f, on applique le schéma suivant :

(i) On détermine la direction D de l'axe de f, i.e. l'espace fixe de $\overrightarrow{f}$.

(ii) On calcule le vecteur de glissement u de f : dans notre cas on a une écriture $f = t_v \circ f'$ où f' a un point fixe, et u est le projeté orthogonal de v sur D ; ceci suffit bien sûr pour déterminer si f a un point fixe, i.e. f est une rotation.

(iii) On trouve un point fixe de $t_{-u} \circ f$, ce qui donne avec (i) l'axe.

(i). Un calcule rapide montre que la droite fixe de $\overrightarrow{f}$ est $\mathbb{R}w$ où $w = (1, 1, 0)$ (en coordonnées dans la base de E que l'on utilise).

(ii). La projection de u sur D est le vecteur $\langle v, w\rangle \frac{w}{\|w\|^2}$, qui est égal à $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, 0)$. En particulier, on voit que f est une rotation si et seulement si $a + b = 0$.

(iii). L'application affine $t_{-u} \circ f$ est par construction une rotation d'angle θ autour d'un axe dirigé par D. On va donc chercher un point fixe dans le plan $O + D^\perp$. Soient $e_1 = (0, 0, 1)$ et $e_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1, 0)$, ces deux vecteurs forment une base orthonormée de $P = D^\perp$; dans le repère $(O; e_1, e_2)$ on a l'écriture

$$f|_{O+P} = \begin{pmatrix}-1/3 & 2\sqrt{2}/3\\ -2\sqrt{2}/3 & -1/3\end{pmatrix} + ce_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)e_2.$$

On admet que le point fixe d'une rotation plane $r + v$ où r fixe un point O et a un angle θ est donné par la formule

$$O + \frac{1}{2 - 2\cos(\theta)}(\mathrm{Id}_P - \overrightarrow{r}^{-1})(v).$$

Le point fixe M de $f|_{O+P}$ est donc donné par :

$$\begin{aligned} M &= O + \frac{1}{2 - 2 \times \frac{-1}{3}}(\mathrm{Id}_P - \begin{pmatrix}-1/3 & -2\sqrt{2}/3\\ 2\sqrt{2}/3 & -1/3\end{pmatrix}) \begin{pmatrix}c\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)\end{pmatrix}\\ &= O + \frac{1}{4}(2c + (a-b))e_1 + \frac{1}{4}(-\sqrt{2}c + \sqrt{2}(a-b))e_2. \end{aligned}$$

Les coordonnées de M dans le repère de $\mathcal{E}$ dans lequel on travaille sont donc :

$$M = O + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-c + (a-b)\\ c - (a-b)\\ 2c + (a-b)\end{pmatrix}.$$

Appendice. On prouve ici les deux faits utilisés plus haut :

(a) Soit r une rotation vectorielle de E, le vecteur de glissement du vissage $r+v$ est la projection orthogonale de v sur l'axe de r.

(b) Soit r une rotation plane, le point fixe de $r+v$ est

$$O + \frac{1}{2-2\cos(\theta)}(\mathrm{Id}_P - \overrightarrow{r}^{-1})(v). \tag{3}$$

(a). Soit u le projeté orthogonal de v sur l'axe D de r, on veut montrer que $r' = r + v - u$ a un point fixe. Pour cela il suffit de montrer que r préserve un plan $\mathcal{P}$ de direction $P = D^{\perp}$: en effet, $r'|_{\mathcal{P}}$ est alors une rotation plane puisque sa partie linéaire est égale à $r|_P$ qui est une rotation vectorielle, et elle a donc un point fixe dans $\mathcal{P}$. On nmontre que r' préserve $O+P$: soit $w \in P$ et $M = O + w$, on a

$$r'(M) = r'(O) + r(w) = O + v - u + w$$

or $v - u \in P$ d'où il suit que $r'(M) \in O + P$.

Il reste à voir que $t_u t_v r = t_v r t_u$: t_u et t_v commutent, et comme $u \in D$ on a $r(u) = u$ d'où il suit que $r t_u = t_u r$.

(b). Ceci suit d'un simple calcul en complexes : si $v \in \mathbb{C}$, la résolution de l'équation $e^{i\theta}z + v = z$ donne

$$z = \frac{v}{1-e^{i\theta}} = \frac{1}{2-2\cos(\theta)}(1-e^{-i\theta})v$$

ce qui se traduit par (3).

Exercice 10

On note $c = \|\overrightarrow{AB}\|, b = \|\overrightarrow{AC}\|$et $a = \|\overrightarrow{BC}\|$. On note (x,y,z) les coordonnées barycentriques dans (A,B,C). Dans tout l'exercice on suppose que A,B,C n'est pas rectangle, ce cas est laissé au lecteur.

(2). On a

$$\overrightarrow{BA'} = \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle \frac{\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2} = 2c\cos(\beta)\frac{\overrightarrow{BC}}{a}$$

et de même

$$\overrightarrow{CA'} = 2b\cos(\gamma)\frac{\overrightarrow{CB}}{a}$$

d'où il suit que

$$2c\cos(\beta)\overrightarrow{CA'} + 2b\cos(\beta)\overrightarrow{BA'} = 0$$

et que les coordonnées de A' dans (A,B,C) sont $(0, b\cos(\gamma), c\cos(\beta)) = (0, y_1, z_1)$. De la même manière on obtient que $B' = (a\cos(gamma), 0, c\cos(\alpha)) = (x_2, 0, z_2)$ et $C' = (a\cos(\beta), b\cos(\alpha), 0)$. Les équations des droites (AA') et (bb') sont respectivement :

$$z_1 y - y_1 z = 0 \,\text{et}\, z_2 x - x_2 z = 0.$$

La résolution du système

$$\begin{cases} z_1 y - y_1 z = 0 \\ z_2 x - x_2 z = 0 \end{cases}$$

donne comme solution particulière non nulle (parce qu'on a supposé le triangle non rectangle) (z_1x_2, z_2y_1, z_1z_2). On a donc :

$$H = (a\cos(\beta)\cos(\gamma), b\cos(\alpha)\cos(\gamma), c\cos(\alpha)\cos(\beta).$$

(3). Soient $A_1 = \frac{B+C}{2}, B_1 = \frac{A+C}{2}$ et $C_1 = \frac{A+B}{2}$. Le triangle A_1, B_1, C_1 est similaire à A,B,C par le théorème de Thalès et il a donc les mêmes angles. Par la question précédente on a donc :

$$O = a\cos(\beta)\cos(\gamma)A_1 + b\cos(\alpha)\cos(\gamma)B_1 + c\cos(\alpha)\cos(\beta)C_1$$

et il suit que les coordonnées barycentriques de O dans (A,B,C) sont :

$$(b\cos(\alpha)\cos(\gamma) + c\cos(\alpha)\cos(\beta), a\cos(\beta)\cos(\gamma) + c\cos(\alpha)\cos(\beta), a\cos(\beta)\cos(\gamma) + b\cos(\alpha)\cos(\gamma)).$$

(4). Le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a\cos(\beta)\cos(\gamma) & b\cos(\alpha)\cos(\gamma) & c\cos(\alpha)\cos(\beta) \\ (b\cos(\alpha)\cos(\gamma)+c\cos(\alpha)\cos(\beta) & a\cos(\beta)\cos(\gamma)+c\cos(\alpha)\cos(\beta) & a\cos(\beta)\cos(\gamma)+b\cos(\alpha)\cos(\gamma)) \end{vmatrix}$$

est nul vu qu'on a la relation

$$(a\cos\beta\cos\gamma + b\cos\alpha\cos\gamma + c\cos\alpha\cos\beta)L_1 - L_2 = L_3.$$

Il suit d'après les deux questions précédentes que G, O, H sont alignés.

Exercice 11

La partie linéaire de rr' est une rotation donc rr' elle-même est une rotation si et seulement si elle fixe un point de $\mathcal{E}$. Comme r, r' fixent le point O elle le fixe aussi.

Pour construire son axe on procède comme à la question (i) de l'exercice 5, en utilisant une décomposition de r, r' en produits de symétries bien choisies (cf. exercice 3). On oriente arbitrairement les axes Δ, Δ' et on note $\theta, \theta' \in]-\pi, \pi]$ les angles respectifs de r, r' par rapport à cette orientation. Soit P_1 le plan passant par les deux droites Δ et Δ', $P_2 = r^{1/2}(P_1)$ (où on a noté $r^{1/2}$ la rotation d'axe Δ et d'angle $\theta/2$) et $P_3 = (r')^{-1/2}(P_1)$ (même notation). Alors on peut écrire explicitement les décompositions de r et r' ; on a :

$$r = s_2 s_1,\ r' = s_1 s_3$$

où on a noté s_i la réflexion de plan fixe P_i. Je montre la première égalité, la seconde étant exactement semblable. On voit d'abord que $s_2 s_1$ fixe Δ puisque on a $\Delta \subset P_1, P_2$ qui sont les ensembles de points fixes respectifs de s_1, s_2. Soit P le plan passant par O de direction orthogonale à celle de Δ ; alors $s_2 s_1(P) = P$ par le fait rappelé au début. D'autre part, s_1 préserve aussi P et la restriction $s_1|_P$ est la symétrie d'axe fixe $P \cap P_1$: en effet, c'est une isométrie de P qui est indirecte puisque :

$$-1 = \det(\overrightarrow{s_1}) = \det(\overrightarrow{s_1|_P})\det(\overrightarrow{s_1|_{P^\perp}})$$

et $\overrightarrow{s_1}$ fixe $P^\perp = \Delta$ d'où il suit que $\det(\overrightarrow{s_1|_{P^\perp}}) = 1$. De plus elle fixe la droite $D_1 = P \cap P_1$ (car s_1 fixe P_1), donc elle doit être égale à cette symétrie. De même, $s_2|_P$ est la symétrie d'axe fixe $D_2 = P \cap P_2$. On a $d_2 = r^{1/2}(D_1)$, d'où il suit (cf. cours ou exercice 5(i)) que $(s_2 s_1)|_P$ est égal à $r|_P$ (une autre façon de le dire est que l'angle entre D_1 et D_2 dans le plan P orienté par Δ est égal à $+\frac{\theta}{2}$, d'où il suit que $(s_2 s_1)|_P$ est la rotation d'angle $+\theta$ de ce plan orienté, i.e. r). Ceci montre que $s_2 s_1$ est la rotation d'axe orienté Δ et d'angle θ, donc $s_2 s_1 = r$.

On a ainsi $rr' = s_2 s_1 s_1 s_3 = s_2 s_3$, ce qui montre que rr' a pour axe la droite $P_2 \cap P_3$.

Exercice 12

L'application r est la rotation d'axe $\mathbb{R}e_1$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. La famille $\mathcal{B}_\theta$ est l'image de (e_1, e_2, e_3) par l'application r' dont la matrice dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit que r' est la rotation d'angle θ autour de l'axe $\mathbb{R}e_3$ (orientépar $+e_3$), en particulier $\mathcal{B}_\theta$ est orthonormée.

L'application r_θ est égale à $r'r(r')^{-1}$, c'est donc une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe $\mathbb{R}r'(e_3)$ orienté par $+r'(e_3)$. Comme les rotations d'un espace vectoriel euclidien forment un groupe (aussi appelé $\mathrm{SO}(E)$) l'application rr_θ est une rotation. Sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est (après calcul) égale à

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

dont la trace est égaleà $cos^2\theta - 2\cos\theta$. Le cosinus de l'angle ϕ de rr_θ est donc égal à $\frac{1}{2}(cos\theta - 1)^2 - 2$, donc l'angle (non signé) de rr_θ est égal à

$$\arccos(\frac{1}{2}(\cos\theta - 1)^2 - 2).$$

Remarque. On voit que le cosinus de ϕ prend toutes les valeurs possibles entre -1 et 1 pour $\theta \in [0, 2\pi[$. On a donc montré que la composée de deux rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ peut avoir un angle arbitraire (exercice : raffiner ceci en tenant compte des orientations).