Université Pierre & Marie Curie
Année 2012-2013

Licence de mathématiques 3
Module 323

Contrôle Continu 2 - 20/03/2013

Exercice 1 (question de cours) :

Soit k un corps et $\mathcal{E}$ un k-espace affine d'espace vectoriel directeur E. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ dirigé par F et G un supplémentaire de F dans E.

(1) Donner la définition de la projection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G.

(2) Donner la définition du barycentre d'une famille de points pondérés $(M_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.

Exercice 2 :

On pose $k = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Soit A et B les points $(1,1)$ et $(3,0)$ de k^2. Pour tout $\lambda \in k$ on pose $C_\lambda = (1, \lambda)$.

(1) Pour quelles valeurs de λ la famille (A, B, C_λ) est elle un repère affine de k^2 ?

(2) On admet que (A, B, C_0) est un repère affine de k^2. Soit $\mathcal{R}$ le repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC_0})$. Écrire la matrice de passage P du repére cartésien canonique $(0,0), (1,0), (0,1)$ à $\mathcal{R}$ et l'inverser.

(3) Écrire dans le repère $\mathcal{R}$ la matrice de l'homothétie de centre C_0 et de rapport 2.

(4) Déterminer les coordonnées barycentriques de $(0,0)$ dans le repère (A, B, C_0).

Exercice 3 :

Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2 et soit (A, B, C) un repère affine de $\mathcal{E}$.

(1) Donner les coordonnées barycentriques des milieux I, J, K des segments BC, AC et AB respectivement.

(2) Donner l'équation des droites $(AI), (BJ), (CK)$ en coordonnées barycentriques.

(3) En utilisant le critère du cours, montrer que ces trois droites sont parallèles ou confondues.

(4) Montrer qu'elles sont concourantes en explicitant leur point de concours.

Exercice 4 :

Soit k un corps de caractéristique $p > 0$ et $\mathcal{E}$ un k-espace affine. Soit s une application affine de $\mathcal{E}$ vérifiant $s^n = \mathrm{Id}$ pour un entier n strictement positif et premier avec p.

(1) Montrer que s a nécessairement un point fixe. On pourra choisir un point x quelconque et considérer la famille $(x, s(x), \ldots, s^{n-1}(x))$.

(2) Donner un contre-exemple si $n = p = 2$.

(3) Montrer que les applications affines d'ordre 2 dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ sont les homothéties.