Correction contrôle Continu 4 - 2/04/2014

Exercice 1

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension 3 et A, B, C, D un repère affine de $\mathcal{E}$.

(1) Donner l'équation du plan (ABC) en coordonnées barycentriques.

(2) Donner l'équation du plan parallèle au plan (ABC) passant par D en coordonnées barycentriques.

(3) Soit h l'homothétie de rapport $-1/3$ et de centre O, l'isobarycentre de A, B, C, D. Montrer que $h(D)$ appartient au plan (ABC) et que c'est l'isobarycentre de A, B, C.

Correction

(1) On a en coordonnées barycentriques $A = (1, 0, 0, 0), B = (0, 1, 0, 0), C = (0, 0, 1, 0)$ et $D = (0, 0, 0, 1)$. L'équation barycentrique d'un plan P est de la forme $ax + by + cz + dt = 0$. En écrivant que A, B, C appartiennent à P on obtient $a = b = c = 0$ donc l'équation de P est de la forme $t = 0$.

(2) En écrivant comme précédemment l'équation du plan P' recherché, on obtient $d = 0$. Comme P et P' sont parallèles, la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ doit être de rang 2. Cela oblige a, b et c a être égaux. Finalement, l'équation de P' est de la forme $x + y + z = 0$.

(3) Par construction, on a $\overrightarrow{Oh(D)} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$ et donc $\overrightarrow{Oh(D)} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{Oh(D)} - \frac{1}{3}\overrightarrow{h(D)D}$ et

$$\frac{4}{3}\overrightarrow{Oh(D)} - \frac{1}{3}\overrightarrow{Dh(D)} = 0$$

donc $h(D)$ est le barycentre de $(O, \frac{4}{3}), (D, -\frac{1}{3})$. Or O est le barycentre de A, B, C, D avec coefficient $\frac{1}{4}$. On a donc $h(D) = \frac{1}{3}(A + B + C + D) - \frac{1}{3}D = \frac{1}{3}(A + B + C)$. Il s'agit bien de l'isobarycentre de A, B, C.

Exercice 2 :

Soit A, B, C, D quatre points d'un plan affine $\mathcal{E}$ trois à trois non alignés. Supposons qu'il existe une transformation affine f de $\mathcal{E}$ telle que $f(A) = B, f(B) = C, f(C) = D$ et $f(D) = A$.

(1) Montrer que l'isobarycentre O de A, B, C, D est l'unique point fixe de f.

(2) En déduire que O est l'intersection des droites (AC) et (BD).

(3) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

(4) Donner la matrice de f dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Correction

(1) Une application affine préserve les barycentres, ainsi $f(O)$ est l'isobarycentre de $f(A), f(B), f(C), f(D)$ qui sont précisément les mêmes points (pas dans le même ordre) : on a donc $f(O) = O$. On observe que f^4 fixe les quatre points A, B, C, D. Comme A, B, C forment un repère affine, on a $f^4 =$Id et donc $\overrightarrow{f}^4 = 1$. Dans une base adaptée, $\overrightarrow{f}$ ne peut prendre que les valeurs suivantes : $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Le premier cas implique que $\overrightarrow{f}^2 =$Id, puis $f^2 =$Id, ce qui est impossible car $f^2(A) = C \neq A$. On conclut en observant que la deuxième matrice n'a pas de vecteur fixe non nul.

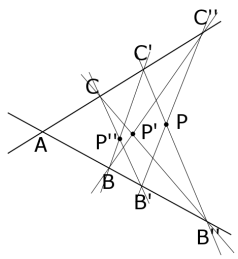
(2) Soit O' l'intersection des droites $\mathcal{D} = (AC)$ et $\mathcal{D}' = (BD)$. Si ces droites étaient parallèles, on aurait $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{BD}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Or $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{BD}$ mais ceci est impossible car $\overrightarrow{f}$ n'a pas de vecteur propre réel. Ainsi en notant $O' = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$, on a $f(O') = f(\mathcal{D}) \cap f(\mathcal{D}') = \mathcal{D}' \cap \mathcal{D} = O'$. Par unicité du point fixe, on a $O = O'$.

(3) On a montré que $O = (AC) \cap (BD)$. Or, O étant l'isobarycentre de A, B, C, D, c'est le milieu de IJ où I est le milieu de AC et J est le milieu de BD. Comme O et I sont sur AC, J aussi et finalement on a $O = I = J$ et les diagonales AC et BD se coupent en leur milieu, montrant que $ABCD$ est un parallélogramme.

(4) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & x \\ c & d & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de f dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Le fait que $f(A) = B = A + \overrightarrow{AB}$ implique que $x = 1$ et $y = 0$. Puis le fait que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ donne $a = -1$ et $c = 1$. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ donc $b = -2$ et $d = 1$.

Exercice 3 :

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine réel d'espace vectoriel directeur E. On se donne des points $A, B, B', B'', C, C', C''$ comme dans la figure ci-contre. On suppose que A, B, C forment un repère affine et que l'on a



$$\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{1-b'}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AB''} = \frac{1}{1-b''}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{1-c'}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AC''} = \frac{1}{1-c''}\overrightarrow{AC}$$

où on suppose avoir $0 < b' < b'' < 1$ et $0 < c' < c'' < 1$.

(1) Donner les coordonnées barycentriques de $A, B, B', B'', C, C', C''$.

(2) Donner l'équation barycentrique des droites (BC') et $(B'C)$.

(3) Déterminer leur point d'intersection P''.

(4) Montrer que les points P, P', P'' sont alignés (plus long).

Correction

(1) On a $(1-b')\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'B}$ donc $-b'\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BB'} = 0$ et $B' = (-b', 1, 0)$ dans le repère (A, B, C). Le même raisonnement donne $B'' = (-b'', 1, 0), C' = (-c', 0, 1), C'' = (-c'', 0, 1)$.

(2) L'équation de la droite (BC') dans le repère (ABC) est donnée par $\begin{vmatrix} 0 & -c' & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$ ce qui donne $x + zc' = 0$. On a de même l'équation de $(B'C)$ de la forme $x + b'y = 0$.

(3) On résout ces deux équations en posant $x = b'c', y = -c', z = -b'$. Donc $P'' = (b'c', -c', -b')$.

(4) De la même façon, on a $P' = (b''c'', -c'', -b'')$. Le point $P = (x, y, z)$ satisfait les deux équations

$$\begin{vmatrix} -b'' & -c' & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -b' & -c'' & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$$

En développant on trouve $x + b''y + c'z = x + b'y + c''z = 0$. Ce qu'on résout en posant $x = b''c'' - b'c', y = c' - c''$ et $z = b' - b''$. On vérifie que les trois points P, P', P'' sont alignés en calculant :

$$\begin{vmatrix} b''c'' - b'c' & b''c'' & b'c' \\ c' - c'' & -c'' & -c' \\ b' - b'' & -b'' & -b' \end{vmatrix} = 0.$$