Contrôle Continu 5 - 30/04/2014

EXERCICE 1

Soit $\mathcal{E}$ un plan euclidien. Pour toute droite D de $\mathcal{E}$, on note s_D la symétrie orthogonale d'axe D.

(1) Soit D_1 et D_2 deux droites de $\mathcal{E}$. Discuter la nature de $s_{D_1} \circ s_{D_2}$ en fonction de D_1 et D_2.

(2) Soit σ_1, σ_2 deux symétries centrales de centres respectifs P_1 et P_2. Décrire l'isométrie $\sigma_1 \circ \sigma_2$.

(3) Soit $ABCD$ un carré parcouru dans le sens positif. Déterminer sans calcul les isométries

$$s_{(AB)}s_{(CD)}s_{(BC)}s_{(AD)} \text{ et } s_{(AB)}s_{(BC)}s_{(CD)}s_{(DA)}$$

EXERCICE 2 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (y - 1, z, x + 1)$$

(1) Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne standard.

(2) Montrer que f est un vissage et déterminer son axe, son angle et son vecteur de glissement.

EXERCICE 3 :

Soit $\mathcal{E}$ le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ d'équation $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 1$ et pour $i = 0, \ldots, 3$, soit P_i le point de coordonnées $x_i = 1$ et $x_j = 0$ si $j \neq i$.

(1) Soit s_{ij} l'application de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même qui échange les coordonnées x_i et x_j. Montrer qu'il s'agit d'une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan que l'on précisera.

(2) Montrer que s_{ij} induit sur $\mathcal{E}$ une symétrie orthogonale σ_{ij} par rapport à un plan que l'on précisera.

(3) Notons $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ et $G = \{f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E}) \text{ tel que } f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}\}$. Montrer que G est un groupe qui contient les applications σ_{ij}.

(4) Montrer que l'action de G sur $\mathcal{P}$ induit un morphisme surjectif $\phi : G \to \mathfrak{S}_4$.

(5) Montrer que ϕ est un isomorphisme.

(6) Quelle figure forme l'ensemble $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{E}$?